

大师之作 醍醐灌顶 学好高数的必读经典

高等数学 **新生** 突破

无穷级数 · 常微分方程

邵 剑 著



见解独到，展示的解题思想深邃，发人深思

几乎每题都有“注记”评析

精心编排，深度挖掘，例题经典，梳理细致

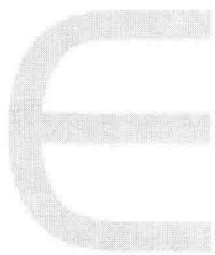
被众多数学教师大力推荐，被推崇为顶尖高数辅导书

 上海远东出版社

高等数学 突破

无穷级数 · 常微分方程

邵 剑 著



 上海远东出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学新生突破. 无穷级数·常微分方程 / 邵剑
著. —上海: 上海远东出版社, 2019

ISBN 978-7-5476-1516-4

I. ①高… II. ①邵… III. ①无穷级数—高等学校—
题解②常微分方程—高等学校—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 134106 号

责任编辑 曹 建

责任校对 祁东城

装帧设计 李 廉

责任印制 晏恒全

高等数学新生突破: 无穷级数·常微分方程

邵 剑 著

出 版 上海远东出版社

(200235 中国上海市钦州南路 81 号)

发 行 上海人民出版社发行中心

印 刷 上海锦佳印刷有限公司

开 本 890×1240 1/32

印 张 8

字 数 222,000

版 次 2019 年 8 月第 1 版

印 次 2019 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5476-1516-4/G·969

定 价 48.00 元

知识提升智慧,智慧加知识成就创新.

读书似乎是艰辛的又是寂寞的,但却是一种磨炼和储备,更是一种愉悦的享受.

以玩赏的心态认真学习,在认真学习中领悟玩赏的魅力.这是学习的最高境界.

我们都应该对天地对他人对法规对知识有敬畏、有感恩、能顺应.我们都应该按照自然规律生活,在合适的时间段合适的环境中做顺应自然规律的事.该读书时就好好读书,该恋爱成家时就好好享受爱情的甜蜜.

(摘自浙江大学学生记录的“邵爷爷语录”,有改动.下同.)

前言

朋友！你我不曾相识，但高兴的是我们有幸相聚于本书之中。这是一种缘分，更是一种信任与情感的交流，愿通过本书我们能成为好朋友——真正的好朋友！因为一切的美，数情最美。

你的可爱让我陶醉，你的优秀使我感动。

你的青春令我羡慕，你的现在由我陪同。

创新，是人类社会活动永恒的主题。创新活动和科学研究需要具有一定的基础与专业知识的积累，需要具有相当的创新思维，需要具有终身学习的能力。这些都是高等教育的基本任务，希望你们先从本书的学习中得以培养和提升。

笔者一辈子坚守并实践着的教和学的理念是：创新思维的教和学，情与爱的教和学，愉悦而轻松的教和学。

非初等数学的数学皆为高等数学。二者的根本区别在于：初等数学研究的是**有限的**，又是**静态的**；高等数学研究的是**无限的**，又是**动态的**。显然，高等数学比初等数学研究的范围更广、难度更大、探索的未知更多。人们俗称的高等数学课程，仅仅涉及整个高等数学中最基础的极少部分。

按创新思维与方法，专题梳理与解悟高等数学课程中各个知识点是一种较高的思想境界，可以让你掌握创新活动中一些常规的思维和方法，会让你觉得这种学习挺好玩儿的，能提高你的终身学习能力。本书就是强调创新思维与数学知识的贯通，突出用

撰写科学研究的路线加以阐述. 本书具有个性的“注记”就是对有关专题的剖析与延拓及其思想的最好解悟.

好人的充分必要条件是考虑到他人. 爱与情的核心也就在于尊重对方、考虑对方. 教师为学生着想, 作者为读者考虑, 均体现着爱与情. 学生接受这种被爱是对教师的敬重, 读者喜爱并接受书中的见解和字里行间的情是对作者的肯定. 这说明双方都是好人, 大家都持有“待贤者谦, 待善者恭”的精神.

正是笔者考虑着你们, 才把本书写成一部具有可读易懂、内容全面、方法多样、综合性强等特点的大全; 又具有概念清晰、叙述严谨、思想丰富、思维活跃等特色; 还在许多“注记”中提供了相关的练习题. 本书的写作风格是以朋友交流的谈话形式, 是没有声音的讨论式课堂教学.

好人考虑着他人, 就是让他人有收益、有快乐. 学生喜爱的好教师是这样, 读者喜爱的好作者也是如此. 笔者怀着为了学生和读者有收益有快乐的理念, 坦诚用心写成了本书. 当然也期望你们用心、静心研读本书, 诚如是, 则你一定会在系统梳理数学知识的同时, 在学业上、思维上都有收益和提高, 进入更高的境界, 并愉悦又轻松着.

本书(一套四册)适用于工学、理学、经济学、管理学等各学科、各专业的如下几类读者:

(1) 正在学习“高等数学”(含“微积分”、“常微分方程”等)课程的读者. 本书各章节的编排是与“高等数学”(含“微积分”、“常微分方程”等)课程的常用教材及其教学顺序相一致的, 故对初学者, 尤其是大学新生来说它是一部极好的高等数学同步辅导用书.

另外,请读者根据自己报考研究生的专业要求,按照教育部当年颁布的数学考试大纲选用本书中有关章节的相关内容.

(2) 正在选学“数学分析”课程的读者. 本书覆盖了“数学分析”课程中纯分析理论以外的全部内容,且达到了相应的高度. 所以本书也是正在学习“数学分析”课程读者的很好的辅导用书.

(3) 从事“高等数学”课程和“数学分析”课程教学工作的教师. 本书可以作为这些教师朋友的教学参考用书,愿对大家有一定的帮助.

这里,特别感谢本书责任编辑、上海远东出版社曹建编审! 感谢他的关注,使笔者长期创立的教学理念与教学风格在本书中得以部分展示. 他在每个细节中处处体现出来的考虑读者、关心作者的好人品质让我感动.

本书的不当甚至差错之处,唯望从各位同仁与朋友中多获教言以增益,谢谢!

邵 剑

2019年7月于杭州

目 录

前言

第 11 章 无穷级数 / 3

§ 11.1 无穷级数的基本概念与性质 / 4

11.1.1 无穷级数敛散性的定义 / 4

11.1.2 无穷级数的基本性质 / 12

§ 11.2 无穷级数敛散性的判断 / 20

11.2.1 无穷级数敛散性的判别 / 20

11.2.2 利用无穷级数讨论数列极限的存在性 / 57

第 12 章 幂级数与傅里叶级数 / 65

§ 12.1 幂级数的收敛域及其和函数 / 66

12.1.1 幂级数收敛域的确定 / 66

12.1.2 幂级数和函数的求取 / 78

12.1.3 数项级数和值的求取 / 91

12.1.4 幂级数的和函数与微分方程 / 98

§ 12.2 函数的幂级数展开 / 105

§ 12.3 函数的傅里叶级数展开 / 121

12.3.1 函数的傅里叶系数与傅里叶级数 / 121

12.3.2 傅里叶级数的收敛定理 / 122

12.3.3 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数的展开

/ 123

12.3.4 定义在 $[0, l]$ 上函数的傅里叶级数的展开

/ 131

第 13 章 常微分方程 / 143

§ 13.1 常微分方程的基本概念及其解的性质 / 144

13.1.1 常微分方程的基本概念 / 144

13.1.2 线性微分方程解的性质与解的结构理论

/ 149

§ 13.2 一阶微分方程 / 153

13.2.1 一阶线性微分方程 / 153

13.2.2 一阶非线性微分方程 / 170

13.2.3 一阶微分方程的应用 / 185

§ 13.3 高阶微分方程 / 193

13.3.1 常系数线性微分方程 / 193

13.3.2 变系数线性微分方程 / 222

13.3.3 非线性微分方程 / 236

创新思维的魅力在于其深邃的思想、沉淀的文化、品质的凝聚、精神的支撑、多学科的融合。

因为相应的创新思维蕴含于各个学科之中，故每个教师在讲授专业知识的同时应该分析指出相应的创新思维。

在这样的教学环境熏陶下，学生收获的创新思维必定会终生受用无穷，会自然而然对新的东西产生强烈的探索欲望和思考欲望。

创新需要多学科、多领域、跨部门、跨地域的协同合作和讨论交流。这要求创新者具有善于倾听反思、善于沟通合作的团队精神，还要有该坚持时锲而不舍，该放弃时就会放弃的修养。

创新应分别满足三大必要条件：扎实而宽厚的知识储备和文化沉淀；丰富而灵活的创新思维和一定的哲学思想；强大而又自觉的终身学习能力和生活的磨炼。

智慧是辨析判断与发明创造的能力。有智慧未必有创新。没有智慧，创新当然有难度。

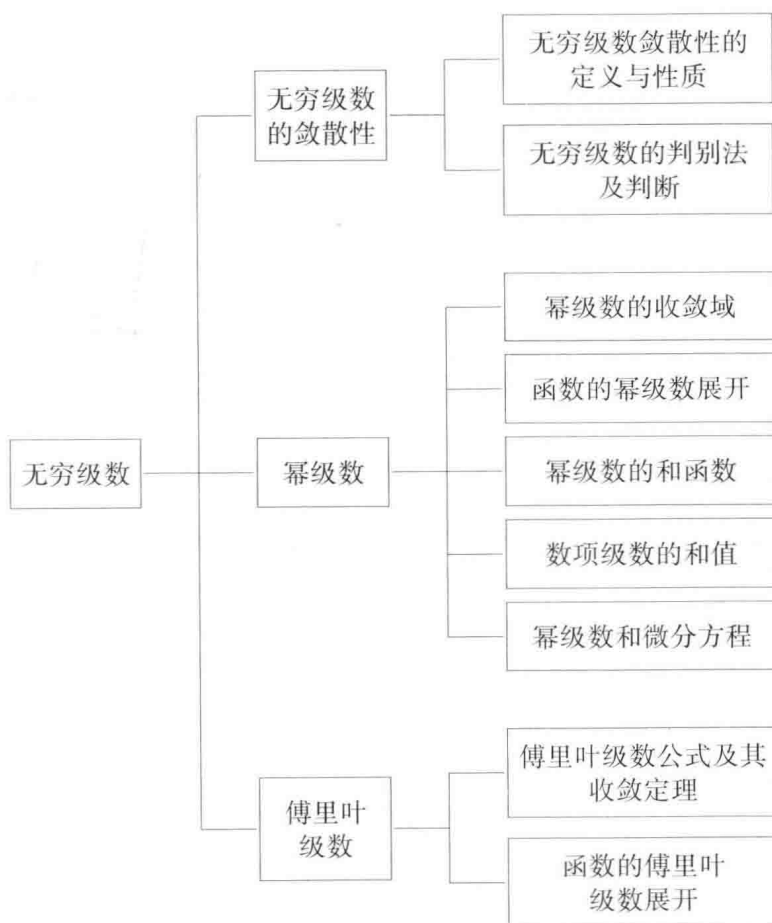
一个人的智慧不是天生的，是需要被教育的，是需要知识的一定积累和一定的时间延续的。其中的知识也包括通过阅人、倾听、反思等行为和自己良好的习惯所获得的人生阅历。

没有一定的知识积累就不可能有一定高度的智慧。

知识提升智慧，知识加智慧实现创新、改变命运。

第 11 章

无 穷 级 数



无穷级数是建立在无限观念上的又一重要概念. 无穷级数的概念与数列极限有着密切的联系. 无穷级数又是函数表示的一种重要方式. 本章主要讨论无穷级数的基本概念, 无穷级数敛散性的判断, 幂级数的收敛域与它的和函数, 函数的幂级数展开与傅里叶级数展开.

§ 11.1 无穷级数的基本概念与性质

众所周知, 有限个数相加, 其和总是存在的. 但是, 无限多个数相加的无穷级数, 其和未必存在. 这是事物的量与质的对立统一规律的一种反映.

11.1.1 无穷级数敛散性的定义

(1) 设无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项部分和数列为 $\{S_n\}$, 其中,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k, \quad n = 1, 2, \dots;$$

而 $u_1 = S_1, u_n = S_n - S_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$.

则无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是 its 部分和数列 $\{S_n\}$ 在 $n \rightarrow$

∞ 时收敛于 S , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 或者说, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的充要条件为 $n \rightarrow \infty$ 时 $\{S_n\}$ 是发散的.

上述定义说明了无穷级数的敛散性等价于它的部分和数列的敛散性, 二者之间建立了密切的联系. 为此, 研究级数的敛散性可以归结为研究它的部分和数列 $\{S_n\}$ 极限的存在性. 同时, 当部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限存在时, 该极限值 S 就是其相应收敛级数之和.

(2) 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 极限存在性的常用方法有: 裂项相消法、数学归纳法、利用求和公式法等. 也可以利用单调有界准则及夹逼准则来确定 $\{S_n\}$ 的极限存在, 如正项级数比较判别法的证明就是采用此方法.

(3) 按照逆向思维考虑, 在给定一个数列 $\{a_n\}$, 又总可以构造一个以 a_n 为部分和的级数

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}),$$

且有

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

由此可见, 数列 $\{a_n\}$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 的存在性等价于级数 $a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 的收敛性.

例如, 设数列 $\{u_n\}$ 满足关系式 $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$. 因为级数 $u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 的前 n 项部分和 $S_n = u_n$, 且有 $u_{n+1} - 1 = (u_n - 1)^2 = \cdots = (u_1 - 1)^{2^n}$, 则由极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 - 1)^{2^n}$ 容易判定 $u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ 在 $0 \leq u_1 \leq 2$ 时收敛, 而在 $u_1 < 0$ 与 $u_1 > 2$ 时发散.

(4) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是含有参数 x 的无穷级数. 与数项级数的敛散性定义一样, 研究函数项级数的敛散性就是研究它的前 n 项部分和函数序列 $\{S_n(x)\}$ 的敛散性; 同样, 对于一个函数序列 $\{a_n(x)\}$, 也能构造一个以 $a_n(x)$ 为部分和函数的级数

$$a_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n(x) - a_{n-1}(x)].$$

不过, 函数项级数要考虑其收敛域与发散域. 也就是说, 讨论函

数项级数的一项主要任务是确定它的收敛域,使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛的参数 x 所取的范围是它的收敛域. 例如, p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 可以看成参数 p 的函数项级数,它的收敛域是 $p > 1$, 它的发散域是 $p \leq 1$; 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的收敛域是 $|x| < 1$, 它的发散域是 $|x| \geq 1$.

几何级数与 p -级数是两个基本的函数项级数. 它们在判断某级数敛散性时常常作为用于比较的基本级数. 例如, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ ($a > 0$) 的敛散性时, 因 $a^{\ln n} = n^{\ln a}$, 故它转化为考虑 p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln a}}$ 的敛散性. 显然, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ 在 $a > e$, 即 $\ln a > 1$ 时收敛; 在 $0 < a \leq e$, 即 $\ln a \leq 1$ 时发散.

(5) 函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 作为变量 x 的函数, 设其和函数为 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, 则它在其收敛域 I 内某一点 x_0 的值是数项级数

$$\begin{aligned} S(x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0) \\ &= [u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots] \Big|_{x=x_0}, \quad x_0 \in I. \end{aligned}$$

例如, 给定幂级数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n + \frac{1}{n}\right) x^{n-1}$, $-1 < x < 1$, 它在 $x = 0$ 处的和值是

$$S(0) = \left[2 + \frac{5}{2}x + \frac{10}{3}x^2 + \cdots + \left(n + \frac{1}{n}\right)x^{n-1} + \cdots\right] \Big|_{x=0} = 2.$$

这一过程是由一般到特殊的转化.

反之, 充分发掘给定的数项级数的特殊性, 由数项级数构造相对应的一般化的函数项级数, 以利于在更为广阔的范围内用更多更有

效的方法进行研究. 这是一种由特殊到一般转化的思想方法. 以后, 在求一已知的数项级数和值时, 往往是先构造一个相对应的幂级数, 在求得该幂级数的收敛域及其和函数之后, 让幂级数在其收敛域内某点 x_0 的值就是所求数项级数的和值. 整个过程是一个“特殊——一般——特殊”的思维过程.

例 1 (1) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $S_n = \frac{n+1}{n}$, 试写出该级数, 并求其和值.

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数为 $S_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, 试求该级数的通项 $u_n(x)$ 及其和函数 $S(x)$.

解 (1) 由级数通项与它的部分和的关系得通项为

$$u_1 = S_1 = 2, \quad u_n = S_n - S_{n-1} = -\frac{1}{n(n-1)}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

故所求级数为 $2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$, 且该级数的和值等于 1, 即有

$$2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

(2) 由函数项级数通项与它的部分和函数的关系得通项为

$$u_1(x) = S_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$u_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) = \frac{2x^{2n-2}(x^2-1)}{(1+x^{2n-2})(1+x^{2n})},$$

$n=2, 3, \dots,$

则所求的函数项级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-2}(x^2-1)}{(1+x^{2n-2})(1+x^{2n})}$, 且其和函数为

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \begin{cases} -1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$$

注记 函数项级数在其收敛域内的和函数可能是分段函数,甚至不是连续函数,在求和函数时要多加注意.

例 2 (1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ 是收敛的.

(2) 设 $\{a_n\}$ 是正项数列,证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n)}$$

是收敛的.

证明 (1) 因该级数的通项

$$\begin{aligned} u_n &= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

故这个级数的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}; \end{aligned}$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 - \sqrt{2}$, 因级数收敛的充要条件是它的部分和数列收敛, 则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ 收敛. 且其和

$$S = 1 - \sqrt{2}.$$

(2) 因该级数通项 $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_n)} > 0$,

故它的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加. 又因

$$u_n = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2) \cdots (1+a_{n-1})}$$