国家理科基地教材

数学核心教程系列 /柴俊 主编

数学专业50学时课程

复变函数

（第二版）

庞学诚 梁金荣 编著

科学出版社

国家理科基地教材

数学核心教程系列/柴俊　主编

复变函数

（第二版）

庞学诚　梁金荣　编著

科学出版社

内 容 简 介

本书介绍了复变函数的一些基础知识，主要包括复数与复变函数、解析函数与保形变换、复积分、级数、残数与辐角原理、解析开拓、正规族与 Riemann 映射定理、调和函数.

本书可作为高等学校数学类专业本科生的复变函数教材和参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/庞学诚, 梁金荣编著. —2 版. —北京：科学出版社, 2019.3
国家理科基地教材 · 数学核心教程系列
ISBN 978-7-03-060919-9

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①庞… ②梁… Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 051973 号

责任编辑: 王 静 李香叶 / 责任校对: 杨聪敏
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003 年 9 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16
2019 年 3 月第 二 版 印张: 11 3/4
2019 年 3 月第十次印刷 字数: 237 000

定价: 35.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

第二版前言

本书在第一版的基础上进行了大幅修订, 除仍保持第一版的内容丰富与适用面广的特色外, 在一些重点与难点的处理上更加细化, 增加了若干例题, 补充了部分性质及其证明, 调整了部分编排顺序, 使阅读起来更加方便.

修订后将第一版的 11 章内容变为 8 章. 第 2 章除了补充初等解析函数的变换性质以及如何求一些保形变换的例题外, 还详细阐述了初等多值函数的问题, 以便读者对多值解析函数能更好地理解与掌握. 第 3 章增加了柯西积分定理的 Goursat 证明, 以及一般形式的柯西积分定理在严格凸区域条件下的证明. 第 5 章补充了保域性定理及单叶解析函数的性质的证明. 第 6 章除了详述解析开拓的基本方法外, 作为解析开拓的一个应用, 增加了复 Γ 函数一节内容. 总之, 前 6 章仍是复变函数理论的基本知识和方法, 我们仍建议这部分作为高等学校数学类专业本科生学习的主要内容.

后两章是复分析中更深刻的内容, 是对第一版第 7~11 章的调整及补充. 修订后的第 7 章是第一版的第 8 章正规族以及第 10 章共形映射的部分内容, 并在这一章我们还增添了 Picard 大定理和 Picard 小定理的证明. 第 8 章的调和函数是第一版第 7 章经过重新调整编排后的内容. 关于第一版的第 9 章整函数和亚纯函数, 目前仅保留了整函数和亚纯函数的概念部分, 并放到了第 4 章. 考虑到拟共形映射是本科教学中可能涉及不到的内容, 因此, 删除了这部分内容.

由于作者水平有限, 书中不免会出现一些不妥之处, 敬请广大师生提出宝贵意见.

编著者

2019 年 1 月

第一版序言

自 20 世纪 90 年代后期开始, 我国的高等教育改革步伐日益加快. 在实行 5 天工作制, 教学总时数减少, 而新的专业课程却不断出现的背景下, 对传统的专业课程应该如何处置, 这样一个不能回避的问题就摆在了我们的面前. 而这时, 教育部师范司启动了面向 21 世纪教学改革计划. 在我们进行“数学专业培养方案”项目的研究过程中, 这个问题有两种方案可以选择: 一是简单化的做法, 或者削减必修课的数量, 将一些传统的数学课程从必修课的名单中去掉, 变为选修课, 或者少讲内容减少课时; 二是对每门课程的教学内容进行优化、整合, 建立一些理论平台, 减少一些烦琐的论证和计算, 以达到削减课时, 同时又能保证基本教学内容的目的. 我们选择了第二种方案.

当我们真正进入实质性操作时, 才感到这样做的困难并不少. 第一个困难是教师对数学的认识需要改变. 理论“平台”该不该建? 在人们的印象中, 似乎数学课程中不应该有不加证明而承认的定理, 这样做有悖于数学的“严密性”. 其实这种“平台”早已有之, 中学数学中的实数就是例子. 第二个困难是哪些内容属于整合对象, 优化从何处下手. 我们希望每门课程的内容要精练, 尽可能地反映这门课程的基本思想和方法, 重视数学能力和数学意识的培养, 让学生体会数学知识产生和发展的过程以及应用价值, 而不去过分地追求逻辑体系的严密性.

教材从 1998 年开始编写, 历时 5 年, 经反复试用, 几易其稿. 在这期间, 我们又经历了一些大事. 1999 年高校开始大幅度扩大招生规模, 学生情况的变化, 提示我们教材的编写要适应教育形势的变化, 迎接“大众教育”的到来. 2001 年, 针对教育发展的新形势, 高教司启动了 21 世纪初高等理工科教育教学改革项目, 在项目“数学专业分层次教学改革实践”的研究过程中, 我们对“大众教育”阶段的学生状况有了更具体、更直接的了解. 在经历大规模扩招后, 在校学生的差距不断增大, 我们应该根据学生的具体情况, 实行分层次、多形式的培养模式势在必行, 而每个培养模式应该有各自不同的教学和学习要求. 此外, 教材的内容还应该为教师提供多一些的选择, 给学生有自我学习的空间, 要反映学科的新进展和新应用, 使所有学生都能学到课程的基本内容和思想方法, 使部分优秀学生有进一步提高的空间. 这个指导思想贯穿了本套教材的最后修改稿.

在建立“理论平台”与打好数学基础之间如何进行平衡, 也是本套教材编写中重点考虑的问题. 其实任何基础都是随着时代的进步而变化的, 面对科学技术的进步, 对基础的看法也要“与时俱进”. 新的知识充实进来, 一部分老的知识就要被简

化、整合, 甚至抛弃. 并且基础应该以创新为目标, 并不是什么都是越深越好、越厚越好. 在现实条件下, 建立一些“课程平台”或“理论平台”是解决课时偏少的有效手段, 也可以使数学教学的内容加快走向现代化. 不然的话, 100 年以后, 我们的数学基础大概一辈子也学不完了.

本套教材的主要内容适合每周 3 学时, 总共 50 学时左右的教学要求. 同时, 教材留有适量的选学内容, 可以作为优秀学生的课外或课堂学习材料, 教师可以根据学生情况决定.

教材的编写和出版得益于国家理科基地的建设和教育部师范司、高教司教改项目的支持. 我们还要对在本套教材出版过程中提供过帮助的单位和个人表示衷心的感谢. 首先要感谢华东师范大学数学系的广大师生自始至终对教材编写工作的支持, 感谢华东师范大学教务处领导对教材建设的关心. 最后, 感谢张奠宙教授作为教育部两个项目的负责人对本套教材提出的极为珍贵的意见和建议.

尽管我们的教材经过了多次试用, 但其中仍难免有疏漏之处, 恳请广大读者批评指正. 另外, 如对书中内容的处理有不同看法, 欢迎探讨. 真诚希望大家共同努力将我国的高等教育事业推向一个新阶段.

柴　俊

2003 年 6 月

于华东师范大学

第一版前言

这是一本大学数学系本科各专业基础课复变函数论的教材，它具有以下特色：

(1) 内容丰富. 本书十分精练且系统地介绍了复变函数论的基础知识和方法，介绍了复变函数理论及其应用中的一些具有某种深度的专题和最新发展，因此本书既包括了复变函数理论的基本知识和方法 (一至六章)，又有为进一步学习所作的相关理论的铺垫 (七至十一章)，这为读者进一步地学习与研究打通了道路.

(2) 适用面广. 本书在内容的编排上，简明扼要，循序渐进，突出重点，分散难点. 它既可作为少课时 (50 学时左右) 的大学数学系、应用数学系本科生基础课同名课程的教材 (阅读前六章即可)，又可供在相关领域进一步学习的研究生、专科生和一些对理科专业感兴趣的读者阅读或参考.

全书共十一章. 第一章是复数与复变函数. 主要介绍复数、复变函数、复变函数的极限与连续等有关概念，介绍闭域上的连续函数的性质以及复球面和无穷远点. 第二章是解析函数与保形变换. 主要讲述了解析函数、初等解析函数、初等多值函数以及一类重要的保形变换——线性变换. 特别着重讲述了如何找出多值函数的支点以及在什么样的区域内多值函数可以分出单值解析分支，指数函数与对数函数、幂函数与根式函数、线性变换的映射性质等. 第三章是复积分. 主要讲述了复积分的概念、性质，以及 Cauchy 积分定理、Cauchy 积分公式、Cauchy 导数公式和 Cauchy 不等式. 此外，还证明了最大模原理和 Schwarz 引理. 第四章是级数. 主要讲述了幂级数、解析函数的唯一性定理、双边幂级数、解析函数的孤立奇点与分类. 第五章是残数与辐角原理. 主要讲述了残数定理、残数总和定理、辐角原理、Rouché 定理以及利用残数定理计算一些实积分的方法. 第六章是解析开拓. 主要介绍解析开拓的基本概念、连续开拓定理、对称原理以及单值性定理. 第七章是调和函数. 主要介绍调和函数的一些性质，包括调和函数的最大最小值定理、Poisson 积分以及调和测度、次调和函数的概念和一些基本性质. 第八章是正规族. 介绍了 Montel 定理、正规族、Marty 定理以及以色列数学家 L. Zalcman 的一个著名定理. 第九章是整函数和亚纯函数. 主要介绍分解定理 (包括 Hadamard 分解定理) 以及整函数的级和零点收敛指数. 第十章是共形映射. 主要介绍 Riemann 映射定理、边界对应原理、Schwarz-Christoffel 公式以及 Koebe 覆盖定理. 第十一章是平面拟共形映射简介. 主要介绍平面拟共形映射的有关概念、拟共形映射的存在性以及一些基本性质. 每章后都附有习题，这是本书的重要组成部分. 一些练习性的习题是为了加深对教学内容的理解，一部分有一定难度的习题是为了锻炼学生的综合分析能力.

本书篇幅不算长, 但内容丰富, 而且有一定的深度, 在现有的学时下要完成本书是困难的, 也是不可能的, 读者可根据需要取舍. 一般来说, 前六章作为大学数学系本科生学习的内容是足够的, 这其实就是这门课程的基本内容. 后五章可以为读者进一步攻读后续课程做准备, 这对于巩固和加深基础知识, 了解发展趋势, 培养能力是有益的.

书中难免有缺点、错误和不足之处, 希望大家批评指正.

编著者

目　　录

第1章　复数与复变函数

所谓复变函数就是定义域和值域均在复数集上的函数, 本章主要讨论复变函数的极限、连续和复球面性质.

1.1　复数域上的基本性质

1. 复数域

形如 $z=x+\mathrm{i}y(\mathrm{i}=\sqrt{-1})$ 的数称为复数, 其中实数 x,y 分别称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的实部与虚部, 记作

$$x=\mathrm{Re}z;\quad y=\mathrm{Im}z.$$

特别当 $y=0$ 时, $z=x+\mathrm{i}0$ 就视为实数 x, 而当 $x=0,y\neq 0$ 时, $z=0+\mathrm{i}y$ 称为纯虚数. 我们规定: 两个复数当且仅当它们的实部与虚部分别相等时我们才认为相等. 当 $x=y=0$ 时, 记 $0=0+\mathrm{i}0$.

对于任意两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$, 其四则运算定义如下:

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$.

(2) $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)$.

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0$.

明显地有：加法与乘法分别满足交换律和结合律, 并且它们之间满足分配律, 即

(4) $z_1+z_2=z_2+z_1$.

(5) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

(6) $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

(7) $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

(8) $(z_1\pm z_2)\cdot z_3=z_3\cdot(z_1\pm z_2)=z_1z_3\pm z_2z_3$.

全体复数引进上述运算后称为复数域, 用符号 $\mathbb{C}$ 表示. 很明显, 在实数域内的一切代数恒等式在复数域内仍成立, 例如

$$z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2).$$

设复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 称 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为复数 z 的模, 记作 $|z|$. 显然有

(1) $|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ (三角不等式).

(2) $|z| = |x + \mathrm{i}y| = 0$ 的充要条件是 $x = y = 0$.

称复数 $x - \mathrm{i}y$ 为复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的共轭复数, 记为 $\bar{z}$. 容易得到:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.

(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} (z_2 \neq 0)$.

(4) $\overline{(\overline{z})} = z$.

(5) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, $2 \cdot \mathrm{Re}z = z + \overline{z}$, $2\mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}z = z - \overline{z}$.

在平面上取定直角坐标系, 则复数域与平面上的点可以建立一个一一对应, 这样就可以用平面上的点表示复数, 其中横坐标表示实部, 纵坐标表示虚部, 由此称 x 轴为实轴, y 轴为虚轴, 这样的平面称为复平面.

2. 复数的三角表示

设 P 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一点 (x, y), 它所表示的复数为 $z = x + \mathrm{i}y$, 而以原点 O 为起点, 终点为 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 被称为复向量. 显然这三者之间是一一对应的, 今后将不再加以区别. 如图 1.1 所示.

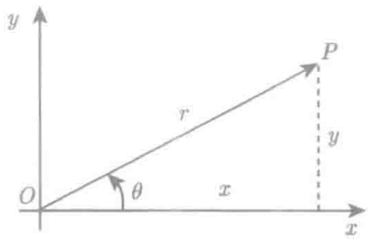

图 1.1

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}z = r\cos\theta = |z|\cos\theta, \\ y &= \mathrm{Im}z = r\sin\theta = |z|\sin\theta, \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 θ 是复向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向的夹角, 称之为复数 z 的辐角. 显然, 若 $z \neq 0$, z 的辐角存在, 并且有无穷多个, 它们都相差 2π 的整数倍, 记为 $\mathrm{Arg}\, z$. 若在 $\mathrm{Arg}\, z$ 中取定一个值, 记为 $\arg z$, 这个值称为 z 的主辐角, 于是

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

当 $z \neq 0$ 时, 若主辐角 $\arg z$ 满足 $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, 则它可以用复数 z 的实部与虚部 $\left(\text{或反正切 } \arctan\dfrac{y}{x}\right)$ 来表示:

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geqslant 0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0.\end{cases}$$

复数 $z=0$ 没有确定的辐角, 也称复数 0 的辐角没有意义.

由 (1.1) 式, 不难得到

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.2}$$

通常称 (1.2) 式为复数 z 的三角表示式. 如果再利用欧拉 (Euler) 公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta, \tag{1.3}$$

那么 (1.2) 式就可以有一个简洁的表达式

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.4}$$

通常称 (1.4) 式为复数 z 的指数表示式, 其中 $r=|z|$, θ 为 z 的任一个辐角.

例 1 求下列复数的模及其辐角.

(1) -2; (2) $1+\mathrm{i}$.

解 (1) 模 $|-2|=2$, 辐角 $\mathrm{Arg}\,(-2)=\pi+2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(2) 模 $|1+\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, 辐角 $\mathrm{Arg}\,(1+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

例 2 将复数 $z=-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 化为三角表示和指数表示.

解 因为 $x=-1$, $y=-\sqrt{3}$, 所以

$$|z|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2.$$

又 z 在第三象限内, 从而有

$$\arg z=\arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$$

或

$$\mathrm{Arg}\,z=\arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1}-\pi+2k\pi=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

故复数 z 的三角表示为

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

或

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)\right], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

指数表示为

$$z = 2\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}} \quad 或 \quad z = 2\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i} + 2k\pi}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

例 3　证明:

(1) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$;　(2) $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$;　(3) $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$.

证　我们只证 (1). 由 (1.3) 式

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} &= (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) \\
&= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \mathrm{i}(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1) \\
&= \cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2) \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2. \tag{1.5}$$

应该指出, (1.5) 式指的是两个集合相等.

因为 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1$, 所以

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|; \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0). \tag{1.6}$$

由例 3 中的 (2) 得到

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta,$$

称为棣莫弗 (De Moivre) 公式.

例 4　求 $\cos 3\theta$ 和 $\sin 3\theta$ 用 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 表示的式子.

解　由棣莫弗公式,

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta,
\end{aligned}$$

因此,

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

注 如果把复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的这种表示称为代数表示法, 那么我们关于复数及其四则运算的定义都是从这种表示法开始的. 关于复数及其运算的几何解释却容易从向量表示法 (见前面的 $\overrightarrow{OP}$) 得到, 而关于复数运算中的模与辐角的变化规律则容易从三角表示或指数表示法得到. 所以, 前面涉及的几种表示法各有各的特点.

3. 复变函数

设 D 是复平面上的一个点集, 若 $f: D \to \mathbb{C}$ 是一个映射, 则称 f 是定义在 D 上的一个复变函数. 若 f 是单值的, 则称 f 为单值复变函数, 反之称为多值复变函数.

设 $w = u + \mathrm{i}v, z = x + \mathrm{i}y$, 则复变函数 $w = f(z)$ 可表示为 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y), z = x + \mathrm{i}y \in D$. 例如, $w = z^2$ 也可写成 $w = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$.

例 5 讨论函数: $w = \sqrt[n]{z}$ ($z = w^n$ 的反函数).

解 (1) 若 $z = 0$, 则

$$w(0) = \sqrt[n]{0} = 0.$$

(2) 若 $z \neq 0$, 设 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, 则

$$\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

因为左、右两端均是复数的三角表达式, 所以

$$\rho = \sqrt[n]{r}; \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

即 $\sqrt[n]{z}$ 恰有 n 个值

$$w_k = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

利用例 5 及复数的性质可以方便地证明初等数学中的一些结论.

例 6 证明: $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2^3}$.

证 因为 $z^7 - 1 = 0$ 的根为 $z = \sqrt[7]{1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{7}}$, $k = 0, 1, \cdots, 6$, 即

$$1, \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{7}\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{7}\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{\frac{6\pi}{7}\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{\frac{8\pi}{7}\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{\frac{10\pi}{7}\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{\frac{12\pi}{7}\mathrm{i}},$$

所以

$$(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^6)=z^7-1=(z-1)(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}})\cdots(z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{12\pi}{7}}).$$

消去 $z-1$, 并用 $z=1$ 代入得

$$\begin{aligned}7&=\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{7}\mathrm{i}}\right)\cdots\left(1-\mathrm{e}^{\frac{12\pi}{7}\mathrm{i}}\right)=\prod_{n=1}^{6}\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{7}\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{7}\mathrm{i}}-\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{7}\mathrm{i}}\right)\\&=\mathrm{e}^{\frac{21\pi}{7}\mathrm{i}}\prod_{n=1}^{6}(-1)^6(2\mathrm{i})^6\sin\frac{n\pi}{7}=2^6\left(\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}\right)^2.\end{aligned}$$

故 $\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2^3}$.

注　由 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, 很容易推得

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8},$$

由此又可得到

$$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7}=\sqrt{7}.$$

1.2　复数域上的极限和连续

1. 复点集

我们首先定义两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的距离为

$$\rho(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

这就表明了复平面上的两个点的距离与相应的实平面两个点的距离相等, 即映射

$$z=x+\mathrm{i}y\to(x,y)$$

为一保距映射, 所以这两个平面的度量完全相同. 因此复平面上的点列极限完全等同实平面上的极限. 例如, 若 $z_n=x_n+\mathrm{i}y_n, n=1,2,\cdots,z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0$$

的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x_0,\quad \lim_{n\to\infty}y_n=y_0.$$

复平面 $\mathbb{C}$ 上的邻域、开集、闭集、区域 (开区域)、闭域等概念完全是实平面中相应概念通过 “复化” 来实现的, 故我们不加解释地列出这些概念.

(1) **邻域** 设 $z_0 \in \mathbb{C}, \delta$ 为正数, 称集合

$$B(z_0,\delta)=\{z||z-z_0|<\delta\}$$

为以 z_0 为中心, δ 为半径的邻域. 而称集合

$$B^\circ(z_0,\delta)=\{z|0<|z-z_0|<\delta\}$$

为以 z_0 为中心, δ 为半径的空心邻域.

(2) **内点** 设 $z_0 \in E \subset \mathbb{C}$, 若存在 $\delta>0$, 使 $B(z_0,\delta)\subset E$, 则称 z_0 是 E 的一个内点. E 的内点的全体记作 $\mathrm{int}E$.

(3) **开集** 设 $E\subset\mathbb{C}$, 若 $\mathrm{int}E=E$, 则称 E 是开集.

(4) **聚点** 设 $z_0\in\mathbb{C}, E\subset\mathbb{C}$, 若对任意正数 δ, 有

$$B^\circ(z_0,\delta)\cap E\neq\varnothing,$$

则称 z_0 是 E 的聚点, E 的聚点全体称为 E 的导集, 记为 E^d.

(5) **闭集** 设 $E\subset\mathbb{C}$, 若 $E^d\subset E$, 则称 E 是闭集.

(6) **闭包** 设 $E\subset\mathbb{C}$, 称 $E\cup E^d$ 为 E 的闭包, 记为 $\bar{E}$.

(7) **边界** 设 $z_0\in\mathbb{C}, E\subset\mathbb{C}$. 若对于任意正数 δ, 有

$$B(z_0,\delta)\cap E\neq\varnothing,\quad B(z_0,\delta)\cap(\mathbb{C}-E)\neq\varnothing,$$

则称 z_0 是 E 的一个界点, E 的所有界点构成的集合称为 E 的边界, 记为 ∂E.

(8) **外点** 设 $z_0\in\mathbb{C}, E\subset\mathbb{C}$, 若存在正数 $\delta>0$, 使

$$B(z_0,\delta)\cap E=\varnothing,$$

则称 z_0 是 E 的一个外点.

(9) **区域** 设 $D\subset\mathbb{C}$, 若 D 是连通的开集, 则称 D 是区域.

集合 D 是连通的, 是指 D 中任意两点都可用全在 D 内的折线连接.

(10) **闭区域** 若集合 $E\subset\mathbb{C}$, 且 E 可以写成一个区域 D 与该区域边界的并集, 称之为闭区域, 一般记为 $\bar{D}$.

应用关于复数 z 的不等式来表示 z 平面上的区域, 有时是很方便的. 例如, z 平面上以原点为圆心、R 为半径的圆盘 (圆形区域) 是 $|z|<R$, z 平面上以原点为圆心、R 为半径的闭圆盘 (圆形闭区域) 是 $|z|\leqslant R$. 它们都以圆周 $|z|=R$ 为边界.

例 7 将圆周曲线 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 用复方程表示.

解 设 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$, 圆周曲线的参数方程为

$$x=x_0+R\cos\theta;\quad y=y_0+R\sin\theta.$$