大学生（本科 非数学类）

数学竞赛辅导

高等数学精题精讲精练

陈启浩 编著

第2版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

大学生 本科/非数学类 数学竞赛辅导

第 2 版

高等数学
精题·精讲·精练

陈启浩 编著

机械工业出版社

本书是本科大学生数学竞赛辅导书，可供自学使用，也可用于竞赛培训.

书中通过典型例题的精解来梳理重点方法，同时穿插介绍一些有普遍性的解题技巧，通过题解后的总结和讨论使方法更系统和实用. 本书的例题精选自国内外各种数学竞赛，其中既有基本概念和基本方法运用的例题，也有综合性和技巧性较强的例题. 在例题之后还精选了一些练习题并在练习题之后附上解题过程和答案. 书后附有第一到第八届大学生数学竞赛初赛与决赛试题及精解 .

图书在版编目（CIP）数据

大学生(本科　非数学类)数学竞赛辅导第 2 版高等数学精题精讲精练/陈启浩编著 .—2 版 .— 北京 ：机械工业出版社，2018.2

ISBN 978-7-111-60118-0

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①陈…　Ⅲ. ①高等数学一高等学校一教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 116717 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　汤　嘉

责任校对：郑　婕　封面设计：路恩中

责任印制：孙　炜

保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2019 年 1 月第 2 版第 1 次印刷

184mm×260mm · 31.25 印张 · 769 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-60118-0

定价：79.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　网络服务

服务咨询热线：010-88379833　　机 工 官 网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649　　机 工 官 博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版　　金 书 网：www.golden-book.com

第 2 版前言

本书自 2013 年出版以来，深受全国数学竞赛（非数学专业）参赛同学和指导教师的欢迎．

从众多读者，特别是指导教师的反馈来看，大家对本书的题目选择评价很高，也有很多老师询问如何能找到如此丰富而精致的题目．我想，这主要归功于作者几十年来，广泛阅读了国内众多习题集和学习辅导材料，对于好题目的积累和研究做了很多工作，也从中收获了极大乐趣．

好的题目总是能得到数学爱好者们的共同认可．从第五届至第八届（2014～2017）全国大学生数学竞赛试题来看，有很多题目与本书的例题或练习题相同或相似，在此，作者的心情比较复杂．一方面，这对本书的写作质量是一种认可，作者很受鼓舞．另一方面，作者不希望参加数学竞赛的同学因为“押题”的目的去购买本书，希望同学们不要丧失了品味把玩这些有趣的数学题的精神头儿．我始终认为，这些较为“精致”的问题，是回报丰厚的问题，能为愿意投入时间和精力的同学们带来更大的乐趣和满足．

此次再版，改正了原书的一些不当之处，并添加了第五届至第八届预赛和决赛试题与精解．

由于作者水平有限，本版仍然难免有错漏之处，在此热切希望同学和老师们不吝赐教，同时也希望听到大家更多的宝贵建议和意见！

请大家发邮件到：cqhshuxue@qq. com.

北京邮电大学教授
陈启浩

前　　言

在大学生中开展数学竞赛，必能进一步激发他们学习数学的热情，提高他们分析、推演各种数学问题的能力. 毫无疑问，这是一项对提高大学数学教学质量和大学生的数学修养都极为有益的重要举措.

本书旨在为复习迎赛的大学生提供一份参考资料，帮助学生进一步融会贯通高等数学理论，熟练掌握各种计算方法和解题技巧，在较短时期内，使学生对各种高等数学问题的求解能力有一个较大幅度的提高，从容面对数学竞赛.

全书共七章，每章由以下四部分组成：

一、核心内容提要　这里简要地列出了全章的核心内容（注意：不是全部内容）.

二、典型例题精解　这是全章的主要部分，其中的例题有来自国内外数学竞赛题与硕士研究生入学试题，也有来自作者在长期数学教学中积累的问题，它们都是具有较强的综合性和技巧性、需用较多的概念和计算方法、结合解题技巧才能获解的问题，对每道例题都按分析、精解及附注作出精细、快捷的解答，并且例题分 A 组、B 组两个层次，或 A 组、B 组及 C 组三个层次，循序渐进.

三、主要方法梳理　这里对全章的解题方法（其中许多方法已在“典型例题精解”中使用过了）进行总结、整理，使之系统化和实用化. 因此，本书不是一本“题解集”，而是一本能帮助读者准确地掌握许多有效的解题方法的参考书.

四、精选备赛练习题　这些练习题都经过精心挑选和编排，分 A 组和 B 组两个层次，由浅入深，它们既能衡量读者已经达到的水平和具有的能力，又能通过练习进一步提高读者分析问题和解决问题的本领. 为了方便读者使用本书，每章后都附有该章练习题的解答.

本书最后附有第一～四届全国大学生（本科　非数学类）数学竞赛初赛与决赛试题及其详细解答.

本书编写仓促，错讹之处请读者和同仁批评指正. 可通过 cqhsx@gmail. com 联系我 .

北京邮电大学教授　陈启浩

目　　录

第一章 极限与连续

一、核心内容提要

1. 函数极限运算法则

以下的 $x\to x_0$ 也可以换为 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$.

(1)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，$k$ 为常数，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to x_0}kf(x)=kA,\quad \lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=AB;$$

(2)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B};$$

(3)设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=A^B;$$

(4)设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且在点 x_0 的某个去心邻域内，$u=\varphi(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

注：数列极限是特殊的函数极限，所以以上运算法则对数列极限也是适合的.

2. 数列极限存在准则

准则Ⅰ　设数列 $\{x_n\}$，如果存在数列 $\{y_n\}$，$\{z_n\}$，使得

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)，且\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}z_n=A,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

准则Ⅱ　如果数列 $\{x_n\}$ 单调不减有上界或单调不增有下界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

3. 施笃兹定理

设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，其中 $\{y_n\}$ 单调增加且趋于 $+\infty$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 存在或为 ∞，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$.

4. 重要极限与常用极限

(1)重要极限

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;推广形式:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}=k$(其中,$k$ 为常数).

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 或$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,推广形式:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}^{k}$ 或$\lim\limits_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{k}$(其中,$k$ 为常数).

(2)常用极限

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1$ 以及$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$.

5. 无穷小与等价无穷小

以下的 $x\to x_0$ 也可以换为 $x\to x_0^{+}$,$x\to x_0^{-}$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$或 $x\to-\infty$.

(1)无穷小

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称 $f(x)$是 $x\to x_0$ 时的无穷小,它有以下性质:

性质 1. 有限个无穷小之和或之积为无穷小;

性质 2. 有界函数与无穷小之积为无穷小;

性质 3. 不恒为零的无穷小的倒数是无穷大量,无穷大量的倒数为无穷小.

(2)等价无穷小

设 $f(x)$,$g(x)$都是 $x\to x_0$ 时的无穷小,如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称 $f(x)$与 $g(x)$是 $x\to x_0$ 时的等价无穷小,记为 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$,等价无穷小有以下性质(以下使用的 $\alpha(x)$,$\beta(x)$,$\gamma(x)$,$\alpha_1(x)$,$\beta_1(x)$都是 $x\to x_0$ 时的无穷小):

性质 1:如果 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,$\beta(x)\sim\gamma(x)(x\to x_0)$,则 $\alpha(x)\sim\gamma(x)(x\to x_0)$;

性质 2:如果 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,$\alpha_1(x)\sim\beta_1(x)(x\to x_0)$,则 $\alpha(x)\alpha_1(x)\sim\beta(x)\beta_1(x)(x\to x_0)$;

性质 3:如果 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,$\alpha_1(x)=o(\alpha(x))(x\to x_0)$(这里 $\alpha_1(x)=o(\alpha(x))(x\to x_0)$ 表示 $x\to x_0$ 时,$\alpha_1(x)$是比 $\alpha(x)$的高阶无穷小),则 $\alpha(x)+\alpha_1(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$;

性质 4:设 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$,$\beta(x)\sim\beta_1(x)(x\to x_0)$. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在或为$\infty$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$(等价无穷小代替定理).

6. 洛必达法则

以下的 $x\to x_0$ 也可以换为 $x\to x_0^{+}$,$x\to x_0^{-}$,$x\to\infty$,$x\to+\infty$或 $x\to-\infty$.

(1)$\dfrac{0}{0}$型洛必达法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$,在点 $x=x_0$ 的某个去心邻域内 $f(x)$,$g(x)$可导且 $g'(x)\neq0$,则当$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$时,$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2)$\dfrac{\infty}{\infty}$型洛必达法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,在点 $x=x_0$ 的某个去心邻域内 $f(x)$,$g(x)$可导且 $g'(x)\neq0$,

则当$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在或为$\infty$时，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

7. 函数连续性与间断点

(1)函数的连续性

设函数$f(x)$在点$x=x_0$的邻域内有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称$f(x)$在点$x=x_0$处连续，称$x=x_0$是$f(x)$的连续点；否则称$f(x)$在点$x=x_0$处间断，称$x=x_0$是$f(x)$的间断点.

(2)函数间断点的分类

设$x=x_0$是$f(x)$的间断点.如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$都存在，则称$x=x_0$是$f(x)$的第一类间断点，其中当$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$时，称$x=x_0$为可去间断点；当$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$时，称$x=x_0$为跳跃间断点.

设$x=x_0$是$f(x)$的间断点，但不是第一类间断点，则称$x=x_0$是$f(x)$的第二类间断点.

8. 连续函数在闭区间上的性质

性质1.(有界性定理)设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上有界，且有最大值与最小值.

性质2.(介值定理)设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$A=f(a)$，$B=f(b)$，则对介于A与B之间的任一实数C，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=C$.

特别地，设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且M,m分别是它在$[a,b]$上的最大值与最小值，则对任意介于M与m之间的实数C，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=C$.

性质3.(零点定理)设$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$.

二、典型例题精解

A　组

例 1.1　极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^4}+\frac{1^2+2^2}{n^4}+\cdots+\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^4}\right)=$________.

分析　将$\frac{1^2}{n^4}+\frac{1^2+2^2}{n^4}+\cdots+\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^4}$的各项分子加在一起后再计算极限.

精解　由于

$$\begin{aligned}
&1^2+(1^2+2^2)+\cdots+(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(1^2+2^2+\cdots+k^2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\\
&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2+k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k\\
&=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{12}[n^2(n+1)^2+n(n+1)(2n+1)+n(n+1)],$$

所以,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^4}+\frac{1^2+2^2}{n^4}+\cdots+\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^4}\right)$$
$$=\frac{1}{12}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2+n(n+1)(2n+1)+n(n+1)}{n^4}$$
$$=\frac{1}{12}\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^4}=\frac{1}{12}.$$

附注 计算和的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ 时,首先考虑的是将和中各项加在一起,即用一个比较简单的表达式表示 $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$.

解题时用到以下公式:

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1),\quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\quad \sum_{k=1}^{n}k^3=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

例 1.2 设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{n}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)\right]^{\frac{1}{x}}=$________.

分析 本题是 1^∞ 型未定式极限的计算问题.

精解

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{n}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{1}{n}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)},\tag{1}$$

其中,

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{1}{n}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^x-1)\right]}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^x-1)}{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to0}\frac{a_i^x-1}{x}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln a_i=\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n).$$

将它代入式(1)得

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{n}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

附注 对 1^∞ 型未定式极限 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$ 总是按以下步骤计算:

(1)将幂指函数指数化,即

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}.\tag{*}$$

(2)计算 $\infty\cdot0$ 型未定式极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)$,然后将计算结果代入式(*)的右边.

例 1.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{x^3\sin\frac{1}{x^2}}-3\right)\sin x^2=$__________.

分析　由于 $x\to\infty$时，$\sin x^2$ 的极限不存在，但却是有界的，所以从考虑$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}-3\right)$入手计算本题.

精解　由于$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}\xlongequal{令\ t=\frac{1}{x^2}}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}-3\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}-3=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}-3$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}-3=\frac{3}{1}-3=0,$$

即$\dfrac{3x-5}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}-3$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小，而 $\sin x^2$ 是有界函数，所以 $x\to\infty$ 时，$\left(\dfrac{3x-5}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}-3\right)\sin x^2$是无穷小，从而有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}-3\right)\sin x^2=0.$$

附注　有界函数与无穷小之积仍为无穷小，是无穷小的重要性质之一，应记住.

例 1.4　极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}}}{\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1}$与$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$分别为________.

分析　第一个极限中令 $t=\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1$，第二个极限中令 $t=x-1$，把所给极限都转换成 $t\to0$ 时的极限.

精解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}}}{\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1}\xlongequal{令\ t=\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=\dfrac{1}{2}.$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x^{x-1}-1)}{\ln x-(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{e^{(x-1)\ln x}-1}{\ln x-(x-1)}\xlongequal{令\ t=x-1}\lim_{t\to0}\frac{e^{t\ln(1+t)}-1}{\ln(1+t)-t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t\ln(1+t)}{\ln(1+t)-t}=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{\ln(1+t)-t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{-\dfrac{1}{2}t^2}=-2.$$

其中,利用 $\ln(1+t)$ 的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式得

$$\ln(1+t)-t=t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)-t=-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\sim-\frac{1}{2}t^2\ (t\to 0).$$

附注 在函数极限计算中往往需施行变量代换,使得便于应用重要极限或常用极限,或便于寻找等价无穷小,或便于应用洛必达法则. 根据极限的特点选择适当的变量代换,往往能快捷求得所给极限. 如本题中的 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$,选择变量代换,$t=\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1$ 使得问题快捷获解.

例 1.5 设当 $x\to 0$ 时,$\arcsin(\sin^2x)\ln(1+x^2)$ 是比 $(e^x-1)\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $\sin(\sqrt{1-x^{n+1}}-1)$ 是比 $\ln^2(e^{\sin^2x}+\sqrt{1-\cos x})$ 高阶的无穷小,则正整数 $n=$________.

分析 只要确定 $x\to 0$ 时,$\arcsin(\sin^2x)\ln(1+x^2)$,$(e^x-1)\sin x^n$,$\sin(\sqrt{1-x^{n+1}}-1)$ 及 $\ln^2(e^{\sin^2x}+\sqrt{1-\cos x})$ 的形如 cx^k 的等价无穷小,即可由题设确定 n 的值.

精解 由于 $x\to 0$ 时,

$$\arcsin(\sin^2x)\ln(1+x^2)\sim\sin^2x\cdot x^2\sim x^4,$$

$$(e^x-1)\sin x^n\sim x\cdot x^n=x^{n+1},$$

$$\sin(\sqrt{1-x^{n+1}}-1)\sim\sqrt{1-x^{n+1}}-1\sim-\frac{1}{2}x^{n+1},$$

$$\ln^2(e^{\sin^2x}+\sqrt{1-\cos x})=\ln^2(1+(e^{\sin^2x}-1+\sqrt{1-\cos x}))$$

$$\sim(e^{\sin^2x}-1+\sqrt{1-\cos x})^2$$

$\sim 1-\cos x$(因为 $x\to 0$ 时,$e^{\sin^2x}-1$ 是比 $\sqrt{1-\cos x}$ 高阶的无穷小)

$$\sim\frac{1}{2}x^2,$$

所以,由 $\arcsin(\sin^2x)\ln(1+x^2)$ 是比 $(e^x-1)\sin x^n$ 高阶的无穷小知

$$4>n+1;\tag{1}$$

由 $\sin(\sqrt{1-x^{n+1}}-1)$ 是比 $\ln^2(e^{\sin^2x}+\sqrt{1-\cos x})$ 高阶的无穷小知

$$n+1>2.\tag{2}$$

因此,由式(1)、式(2)得 $n+1=3$,即 $n=2$.

附注 应熟记以下的 $x\to 0$ 时的等价无穷小:

$$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$$

$$e^x-1\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad (1+x)^\mu-1\sim\mu x(\mu\neq 0),$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$$

例 1.6 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\displaystyle\int_a^{+\infty}xe^{-2x}dx$ 成立的 $a=$________.

分析 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty}xe^{-2x}dx$,得到一个关于 a 的方程,解之可得 a 的值.

精解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^x}{\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x}=\dfrac{e^{-a}}{e^a}=e^{-2a}$,

$$\int_a^{+\infty}xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int_a^{+\infty}x\,de^{-2x}=-\frac{1}{2}\left(xe^{-2x}\Big|_a^{+\infty}-\int_a^{+\infty}e^{-2x}dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}ae^{-2a}+\frac{1}{4}e^{-2a}.$$

所以,由题设得方程

$$e^{-2a}=\frac{1}{2}ae^{-2a}+\frac{1}{4}e^{-2a}\text{,即 }a=\frac{3}{2}.$$

附注 重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 的推广形式是$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=e^k$,记住它可以加快计算速度.

例 1.7 设函数 $F(x)=\int_0^{x^2}t\sin(x^2-t^2)^{\frac{1}{2}}dt$,则$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{F(x)}{x^3}=$__________.

分析 本题的极限需用洛必达法则计算,即需对 $F(x)$ 求导,因此应先将 x 从 $\int_0^{x^2}t\sin(x^2-t^2)^{\frac{1}{2}}dt$ 的被积函数中移出.

精解 因为 $F(x)=\int_0^{x^2}t\sin(x^2-t^2)^{\frac{1}{2}}dt$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin(x^2-t^2)^{\frac{1}{2}}d(x^2-t^2)\xlongequal{\text{令 }u=x^2-t^2}-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0\sin\sqrt{u}du$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{u}du\text{ ,}$$

所以 $$\lim_{x\to0^+}\frac{F(x)}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{u}du}{x^3}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

附注 本题解答中有两点值得注意:

(1) 对形如$\int_a^{\alpha(x)}f(x,t)dt$ 的函数求导时,应先将 x 从被积函数中移出;

(2) 计算$\dfrac{0}{0}$型未定式极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$时,如果 $f(x)$或 $g(x)$是积分上限函数,则可用洛必达法则消去积分运算.

例 1.8 设 $\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)]=0$,则常数 a,b 分别为________.

分析 将函数有理化后再计算极限.

精解 $0=\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2-x+1}-(ax+b)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{(1-a^2)x-(1+2ab)+\dfrac{1-b^2}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+a+\dfrac{b}{x}},$$

由此可得

$$\begin{cases}1-a^2=0,\\1+2ab=0,\text{即 } a=-1,b=\dfrac{1}{2}.\\-1+a\neq 0,\end{cases}$$

附注 题解中应注意的是:当 $x\to-\infty$ 时,$\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{x}=-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$.

例 1.9 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}-2\mathrm{e}^{x^2}+1}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$______.

分析 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续得

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}-2\mathrm{e}^{x^2}+1},$$

于是计算上式右边的极限即得 a 的值.

精解 $a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}-2\mathrm{e}^{x^2}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{x^4}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot\sin 2x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 2x}{4x^3}=\frac{1}{2}.$$

由此可知,当 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续时,常数 $a=\dfrac{1}{2}$.

附注 由于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)^2}$ 的分子是积分上限函数,所以需施行洛必达法则,消除其中的积分运算.

例 1.10 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x\cdot\ln(x^2-1)^2, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin\pi x}{x(x^2+2x-3)}, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的间断点(需指明类型)为

______.

分析 分 $x<0,x>0$ 及 $x=0$ 三种情形考虑函数 $f(x)$ 的间断点.

精解 $x<0$ 时,$f(x)=\sin x\cdot\ln(x^2-1)^2$ 有间断点 $x=-1$,由于 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{\sin x\cdot\ln(x^2-1)^2}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}[\sin x\cdot\ln(x^2-1)^2]=\infty$. 因此 $x=-1$ 是第二类间断点(无穷间断点).

$x>0$ 时,$f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x(x^2+2x-3)}$ 有间断点 $x=1$,由于

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x(x+3)(x-1)}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}\xlongequal{\text{令 } t=x-1}\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}=-\frac{\pi}{4},$$

所以 $x=1$ 是第一类间断点(可去间断点).

下面考虑 $x=0$ 的情形. 由于

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}[\sin x\cdot\ln(x^2-1)^2]=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\pi x}{x(x^2+2x-3)}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\pi x}{x}=-\frac{\pi}{3},$$

即 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$都存在,但不相等,所以 $x=0$ 是第一类间断点(跳跃间断点).

附注　对于第一类间断点,应分清是可去间断点还是跳跃间断点.

例 1.11　(1)设数列$\{x_n\}$定义如下:

$$x_1\in(0,1),x_{n+1}=x_n(1-x_n)(n=1,2,\cdots).$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

(2) 设数列$\{y_n\}$定义如下:

$$y_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\ y_{n+1}=\sin y_n.(n=1,2,\cdots).$$

证明:$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}y_n=\sqrt{3}$.

分析　(1) 由于$\{x_n\}$是由递推式定义的,所以用数列极限存在准则Ⅱ证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,然后对数列$\left\{\dfrac{n}{\frac{1}{x_n}}\right\}$应用施笃兹定理证明$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$.

(2) 由于$\{y_n\}$是由递推式定义的,所以也用数列极限存在准则Ⅱ证明$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,然后用施笃兹定理证明$\lim\limits_{n\to\infty}ny_n^2=3$,由此得到$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}y_n=\sqrt{3}$.

精解　(1) 由 $x_1\in(0,1)$得

$$0<x_2=x_1(1-x_1)\leqslant\left(\frac{x_1+1-x_1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},$$

同理可证　$0<x_n<\frac{1}{4}(n=3,4,\cdots)$, 所以$\{x_n\}$有界,并且由此推出正项数列$\{x_n\}$有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-x_n<1(n=1,2,\cdots),$$

即$\{x_n\}$单调减少. 因此由数列极限存在准则Ⅱ知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,记为 A,则 $A\in\left[0,\frac{1}{4}\right)$. 令 $n\to\infty$对递推式 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$两边取极限得 $A=A(1-A)$. 解此方程得 $A=0$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

由于$\{nx_n\}=\left\{\dfrac{n}{\frac{1}{x_n}}\right\}$,其中$\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$单调增加趋于$+\infty$,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n-1}}{x_{n-1}-x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}(1-x_{n-1})x_{n-1}}{x_{n-1}-x_{n-1}(1-x_{n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-x_{n-1})=1,$$

所以,由施笃兹定理知

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=1.$$