高级中学课本

高中二年级 第二学期

（试用本）

上海教育出版社

数学

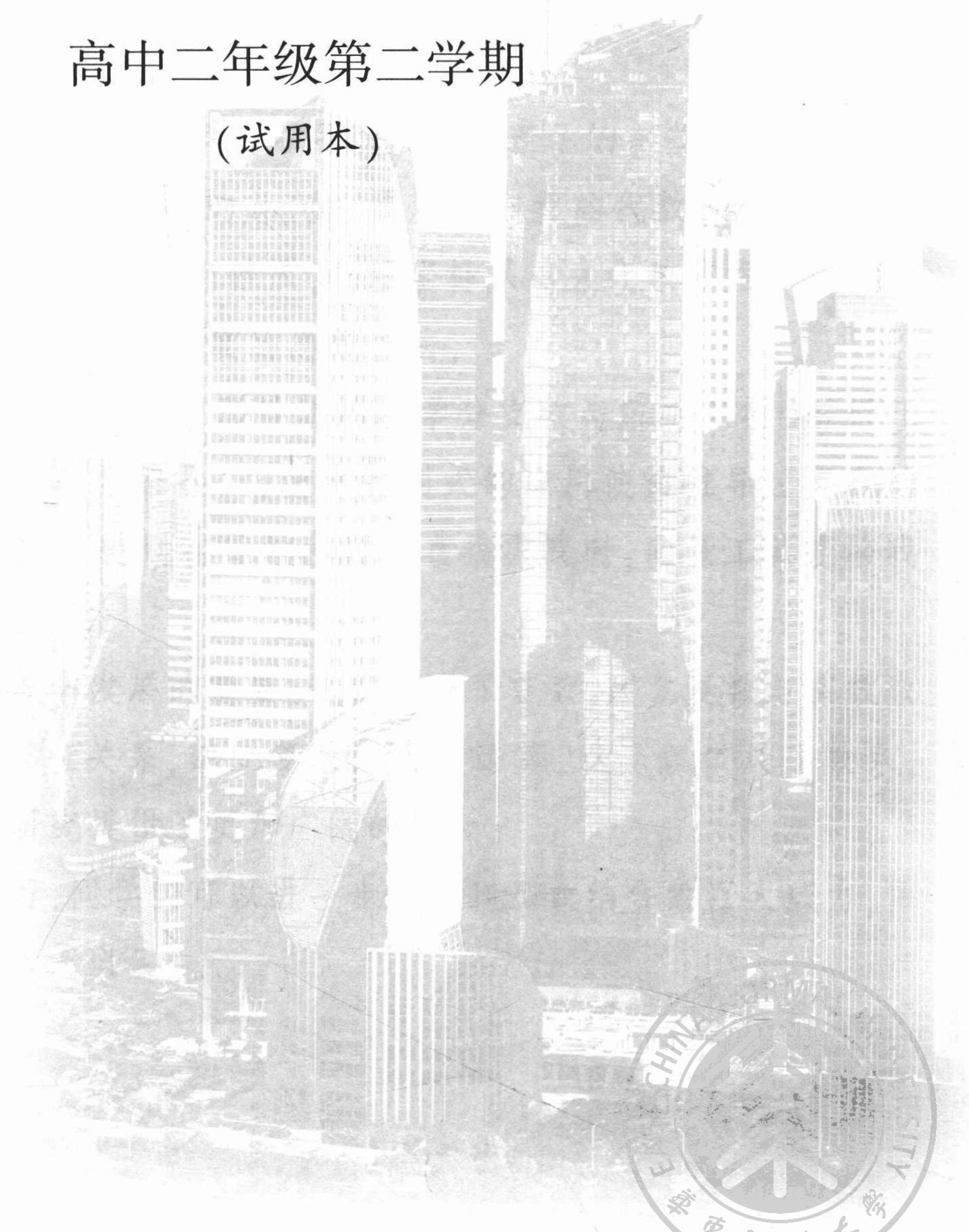
MATHEMATICS

高级中学课本

数学

高中二年级第二学期

(试用本)



上海教育出版社

编者的话

同学们，你们在初中里已经学过平面直角坐标系、一次函数、二次函数，学习过二元一次方程组和一元二次方程的解法，对于函数与方程、函数与其图像的对应关系已有一定认识.

在本书中，同学们将进一步学习可以用方程表示的一些常见曲线(直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线)的几何性质及其方程的代数性质.在学习时，同学们要抓住用图形的几何性质，利用坐标系建立代数方程和用代数方程的特性来讨论几何图形性质的思想方法.

这种用坐标法研究几何图形性质的数学分支称为解析几何.解析几何需要较多的计算和数学推导.向量和行列式的应用使得推导过程和结果表达更为简洁、便捷.特别在推导和讨论直线方程时，向量工具能给我们带来很大的便利.

由实际应用和数学发展的需要，我们引进了复数，建立复数与实数数对(a,b)间的一一对应关系，建立复数的代数运算.这不仅扩展了数系，而且为数学应用和研究提供了更加广阔的舞台.

通过本书的学习，同学们可以进一步体会到形数结合的巨大威力，体会到复数引进的重大意义.

2007 年 11 月

目　录 CONTENTS

第11章 坐标平面上的直线

Straight Lines on a Coordinate Plane

在初中平面几何里,我们定性地研究直线的平行、垂直或直线相交所成角是否相等.在函数教学中,直线是一次函数的图像.在本章中,我们进一步用定量的方法来研究直线.

一次函数$y=kx+b$可以写成二元一次方程$kx+b-y=0$. 我们将看到直线与一般的二元一次方程的对应关系.

由于方程的解是可以计算的,我们就能用定量的方法研究直线了.比如用二元一次方程研究直线倾斜的程度、平行线之间的距离、夹角大小等数量关系.我们也可以用二元一次方程组研究直线间的相互位置(如平行、垂直)等定性关系.这真是:数形结合威力大,定性、定量都能做.

11.1 直线的方程

Equations of Straight Lines

我们知道，如果在平面上作一条直线 l，使它经过某个已知点 P，且与已知的非零向量 $\vec{d}$ 平行，那么这样的直线 l 是唯一确定的.

在直角坐标平面上，已知非零向量 $\vec{d}=(u,v)$，设点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，经过点 P，且与向量 $\vec{d}$ 平行的直线为 l，如图 11－1 所示. 因为直线 l 平行于向量 $\vec{d}$，所以对直线 l 上的任意点 Q，都有 $\overrightarrow{PQ}/\!/\vec{d}$.

> 在本书中，直线与非零向量平行(垂直)是指直线与非零向量所在的直线平行(垂直).

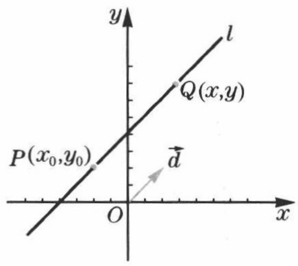


图 11－1

设点 Q 的坐标为 (x,y)，可得向量 $\overrightarrow{PQ}=(x-x_0,y-y_0)$. 由 $\overrightarrow{PQ}/\!/\vec{d}$ 的充要条件，得

$$v(x-x_0)=u(y-y_0), \qquad ①$$

即

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ u & v \end{vmatrix}=0.$$

> 可以验证，点 P 的坐标 (x_0,y_0) 也是方程的解.

反之，如果 (x_1,y_1) 是方程①的任意一组解，即

$$v(x_1-x_0)=u(y_1-y_0),$$

那么把 $P(x_0,y_0)$ 作为起点，把坐标为 (x_1,y_1) 的点 Q_1 作为终点的向量 $\overrightarrow{PQ_1}$ 与向量 $\vec{d}$ 平行，即点 Q_1 在直线 l 上.

由此可见，直线 l 上所有的点的坐标 (x,y) 都满足方程①，而以方程①的所有解 (x,y) 作为坐标的点都在直线 l 上. 这样就建立了直线 l 上所有点组成的集合与方程①的解的集合之间的对应关系. 我们把方程①叫做直线 l 的方程(equation of line l)，直线 l 叫做方程①的图形(graph of equation ①)，把与直线 l 平行的向量叫做直线 l 的方向向量(direction vector)，向量 $\vec{d}=(u,v)$ 是直线 l 的一个方向向量.

> **注 意**
>
> 所有与 $\vec{d}$ 平行的向量都是直线 l 的方向向量.

如果向量 $\vec{d}$ 的坐标都不为零，即 $u\neq0$，$v\neq0$ 时，那么方程①可化为

$$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}. \qquad ②$$

我们把方程②叫做直线 l 的点方向式方程(point-direction form of equation).

如果向量 $\vec{d}$ 的坐标中有一个为零，不妨设 $\vec{d}=(0,v)$，$v\neq 0$，那么方程①可化为 $x-x_0=0$，它表示经过点 $P(x_0,y_0)$，且平行或重合于 y 轴的直线，如图 11－2 所示. 如果向量 $\vec{d}=(u,0)$，$u\neq 0$，那么方程①可化为 $y-y_0=0$，它表示经过点 $P(x_0,y_0)$，且平行或重合于 x 轴的直线，如图 11－3 所示.

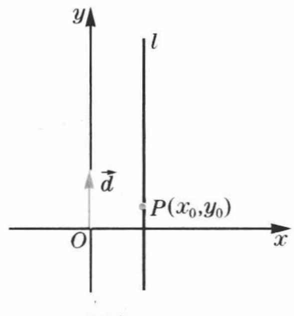


图 11－2

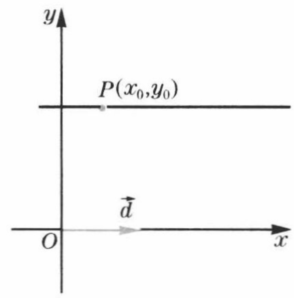


图 11－3

例 1 已知 $A(4,6)$、$B(-3,-1)$、$C(4,-5)$ 三点，求经过点 A 且与 BC 平行的直线 l 的点方向式方程.

解 如图 11－4，由题意知，直线 l 经过点 $A(4,6)$，它的一个方向向量 $\overrightarrow{BC}=(4-(-3),-5-(-1))=(7,-4)$，

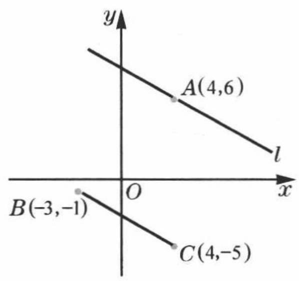


图 11－4

所以直线 l 的点方向式方程为

$$\frac{x-4}{7}=\frac{y-6}{-4}.$$

一般地，经过点 $P(x_1,y_1)$ 和点 $Q(x_2,y_2)$ 的直线的点方向式方程为 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

例 2 求经过点 $A(-3,1)$ 和点 $B(4,-2)$ 的直线 l 的点方向式方程.

解 因为直线 l 经过 A、B 两点，可知它的一个方向向量为 $\overrightarrow{AB}$，而 $\overrightarrow{AB}=(7,-3)$，所以直线 l 的点方向式方程为

$$\frac{x+3}{7}=\frac{y-1}{-3}.$$

练习 11.1(1)

1. 已知直线 l 的方程是 $5x-12y+13=0$，判断点 $A(-17,-6)$、$B(2,-2)$ 是否在直线 l 上.

2. 求过点 P 且与向量 $\vec{d}$ 平行的直线 l 的点方向式方程.

(1) $P(3,-5)$, $\vec{d}=(3,4)$;

(2) $P(0,3)$, $\vec{d}=(3,-4)$.

3. 求经过 A、B 两点的直线 l 的点方向式方程.

(1) $A(-3,-2)$, $B(3,-7)$;

(2) $A(0,3)$, $B(2,4)$.

我们知道,在坐标平面上经过已知点 $P(x_0,y_0)$,且与已知的非零向量 $\vec{n}=(a,b)$ 垂直的直线 l 是唯一确定的. 如何根据条件求出直线 l 的方程呢?

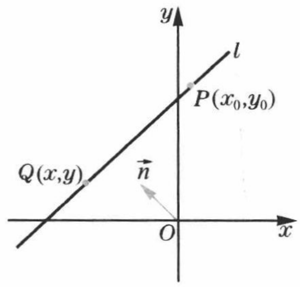


图 11-5

如图 11-5,设 $Q(x,y)$ 为直线 l 上任意一点,由题意知 $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{n}$,由向量垂直的充要条件可知,$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=0$. 因为 $\overrightarrow{PQ}=(x-x_0,y-y_0)$,$\vec{n}=(a,b)$,所以

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0. \quad ③$$

这就是说,经过已知点 $P(x_0,y_0)$,且与向量 $\vec{n}=(a,b)$ 垂直的直线 l 上任意点的坐标 (x,y) 都满足方程③.

反之,如果 (x_1,y_1) 是方程③的解,即 $a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)=0$,那么以 $P(x_0,y_0)$ 为起点、以 $Q(x_1,y_1)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{PQ}=(x_1-x_0,y_1-y_0)$ 与向量 $\vec{n}=(a,b)$ 的数量积为零,可推得 $\overrightarrow{PQ}\perp\vec{n}$,于是可知点 $Q(x_1,y_1)$ 在直线 l 上.

我们把与直线 l 垂直的向量叫做直线 l 的法向量(normal vector),方程③叫做直线 l 的点法向式方程(point-normal form of equation). 向量 $\vec{n}=(a,b)$ 是直线 l 的一个法向量.

在直角坐标平面上,对于任意的直线,是否都可以得到它的点法向式方程?

注 意

所有与 $\vec{n}$ 平行的向量都是直线 l 的法向量.

例 3 已知点 $A(-1,2)$ 和点 $B(3,4)$,求线段 AB 的垂直平分线 l 的点法向式方程.

解 因为 l 是 AB 的垂直平分线,所以 l 经过线段 AB 的中点,且垂直于向量 $\overrightarrow{AB}$. 由中点坐标的公式可求得 AB 的中点 M 的坐标:

$$\begin{cases} x=\dfrac{(-1)+3}{2}=1, \\ y=\dfrac{2+4}{2}=3, \end{cases}$$

> **注 意**
>
> 因为向量$(4,2)=2(2,1)$，所以向量$(2,1)$也是直线 l 的法向量，l 的点法向式方程为
> $2(x-1)+y-3=0$.

即中点 M 的坐标为$(1,3)$. 又因为向量$\overrightarrow{AB}=(3-(-1),4-2)=(4,2)$是直线 l 的一个法向量，所以直线 l 的点法向式方程为

$$4(x-1)+2(y-3)=0.$$

例 4 如图 11－6，已知点 $A(1,6)$、$B(-1,-2)$和点 $C(6,3)$是三角形的三个顶点，求：

(1) BC 边所在直线的方程；

(2) BC 边上的高 AD 所在直线的方程.

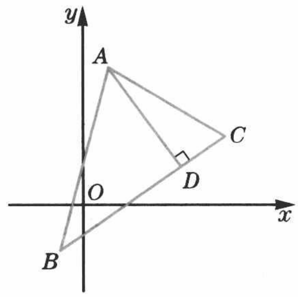


图 11－6

解 (1) 因为 BC 边所在直线的一个方向向量$\overrightarrow{BC}=(6-(-1),3-(-2))=(7,5)$，且该直线经过点 $B(-1,-2)$，所以 BC 边所在直线的点方向式方程为

$$\frac{x+1}{7}=\frac{y+2}{5}.$$

(2) 因为 BC 边上的高 AD 所在直线的一个法向量为$\overrightarrow{BC}=(7,5)$，且经过点 $A(1,6)$，所以高 AD 所在直线的点法向式方程为

$$7(x-1)+5(y-6)=0.$$

练习 11.1(2)

1. 求经过点 P 且垂直于向量 $\vec{n}$ 的直线的点法向式方程.

(1) $P(3,-5)$，$\vec{n}=(1,2)$；

(2) $P(0,3)$，$\vec{n}=(3,-4)$；

(3) $P(0,0)$，$\vec{n}=(3,4)$；

(4) $P(3,0)$，$\vec{n}=(1,0)$.

2. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(1,6)$、$B(-1,-2)$、$C(6,3)$.

(1) 求 AB 边上的高 CF 所在直线的方程；

(2) 求 AC 边的垂直平分线的方程.

例 5 已知 $A(1,2)$、$B(4,1)$、$C(3,6)$三点，点 M 为 AC 的中点，求直线 BM 的方程.

解 由中点坐标公式，得

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{1+3}{2}=2, \\ y_M=\dfrac{2+6}{2}=4. \end{cases}$$

所以中点 M 的坐标为$(2,4)$.

又因为$\overrightarrow{BM}=(2-4,4-1)=(-2,3)$是直线 BM 的一个方向向量，所以，直线 BM 的点方向式方程为

$$\frac{x-4}{-2}=\frac{y-1}{3}.$$

例 6 已知在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，点 B、C 的坐标分别为$(4,2)$、$(2,8)$，向量 $\vec{d}=(3,2)$，且 $\vec{d}$ 与 AC 边平行，求$\triangle ABC$ 的两条直角边所在直线的方程.

解 如图 11－7，因为 AC 与向量$\vec{d}=(3,2)$平行，所以，直线 AC 的点方向式方程是

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-8}{2}.$$

又因为 $AB\perp AC$，所以 $\vec{d}=(3,2)$是直线 AB 的法向量.

所以，直线 AB 的点法向式方程是

$$3(x-4)+2(y-2)=0.$$

因此，$\triangle ABC$ 的两条直角边所在直线的方程分别是

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-8}{2}\text{和 } 3(x-4)+2(y-2)=0.$$

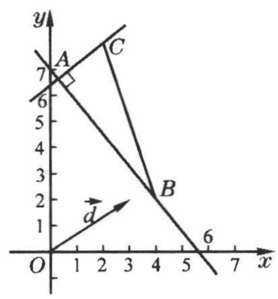


图 11－7

练习 11.1(3)

1. 已知 $A(x_1,y_1)$和 $B(x_2,y_2)$是直线 l 上的两点，若 $x_2-x_1\neq0$，$y_2-y_1\neq0$，求直线 l 的法向量.

2. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1,2)$、$B(4,1)$、$C(3,6)$，求 BC 边上的中线 AM 和高 AH 所在直线的方程.

11.2 直线的倾斜角和斜率

Angles of Inclination and Slopes of Straight Lines

如图 11－8，l_1 与 l_2 是平面直角坐标系中的两条直线. 这两条直线都经过点(0,1)，不同之处在于相对于 x 轴来说，直线 l_1 较平坦些，而 l_2 较陡些. 那么我们如何用数学概念来刻画直线的"陡"的程度呢？现在我们给出直线倾斜角的概念.

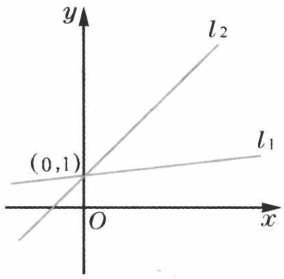


图 11－8

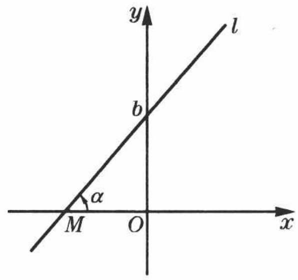


图 11－9

设直线 l 与 x 轴相交于点 M，将 x 轴绕点 M 按逆时针方向旋转至与直线 l 重合时所成的最小正角 α 叫做直线 l 的倾斜角(angle of inclination of the line l)，如图 11－9. 当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定其倾斜角 $\alpha=0$. 因此直线的倾斜角 α 的范围是 $0\leqslant\alpha<\pi$.

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，把 α 的正切值 $k=\tan\alpha$ 叫做直线 l 的斜率(slope).

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，直线的斜率 k 不存在(趋向无穷大).

直线 l 的方向向量 $\vec{d}=(u,v)$、倾斜角 α 和斜率 k 都可刻画直线 l 的方向，它们之间可以相互转化：

为什么方向向量 $\vec{d}=(u,v)$ 时，斜率 $k=\frac{v}{u}$？为什么斜率为 k 时，方向向量 $\vec{d}=(1,k)$？

如果已知 $\vec{d}=(u,v)$，那么当 $u\neq0$ 时，$k=\frac{v}{u}$，α 可以由 $\tan\alpha=\frac{v}{u}$ 求得；当 $u=0$ 时，k 不存在(趋向无穷大)，$\alpha=\frac{\pi}{2}$.

如果已知 α，那么 $k=\tan\alpha$，$\vec{d}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

如果已知 k，那么 α 可以由 $\tan\alpha=k$ 求得，$\vec{d}=(1,k)$.

例 1 已知直线 l 上的两点 A、B，求直线 l 的斜率 k 及倾斜角 α：

(1) $A(1,2)$，$B(3,4)$；

(2) $A(0,3)$，$B(2,\sqrt{2})$.

解 (1) 因为直线 l 过点 A、B，它的一个方向向量可表示为 $\overrightarrow{AB}=(3-1,4-2)=(2,2)$，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{2}{2}=1$，倾斜角 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

(2) 因为直线 l 过点 A、B，它的一个方向向量可以表示为 $\overrightarrow{AB}=(2,\sqrt{2}-3)$，所以直线 l 的斜率 $k=\dfrac{\sqrt{2}-3}{2}$.

由 $k=\tan\alpha$ 可求得直线 l 的倾斜角 $\alpha=\pi-\arctan\dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$.

因为 $0\leqslant\alpha<\pi$，所以当 $k<0$ 时，$\alpha=\pi+\arctan k$ 或 $\alpha=\pi-\arctan(-k)$.

一般地，如果直线 l 经过点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，其中 $x_1\neq x_2$，那么 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$ 是 l 的一个方向向量，于是直线 l 的斜率 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，再由 $k=\tan\alpha$ 和 $0\leqslant\alpha<\pi$，可求出直线 l 的倾斜角 α.

注 意

当 $x_1=x_2$ 时，直线 l 的斜率不存在，直线的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{2}$.

例 2 已知直线 l 的倾斜角为 $\alpha\left(0\leqslant\alpha<\pi,\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}\right)$，且通过点 $N(x_0,y_0)$，求直线 l 的方程.

解 当 $\alpha=0$ 时，所求直线必与 x 轴平行或重合，且过点 $N(x_0,y_0)$. 因此所求直线方程为 $y=y_0$.

当 $\alpha\neq0$ 时，可求得与 l 平行的一个单位向量 $\vec{d}$ 的坐标为 $(\cos\alpha,\sin\alpha)$. 且直线经过点 $N(x_0,y_0)$，如图 11—10，所以直线 l 的点方向式方程为

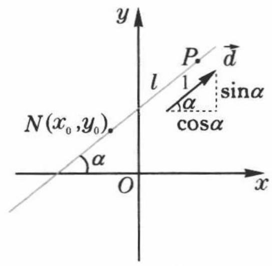


图 11—10

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\sin\alpha},$$

即

$$(y-y_0)\cos\alpha=(x-x_0)\sin\alpha.$$

当 $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$ 时，整理得

$$y-y_0=(x-x_0)\tan\alpha.$$

记 $\tan\alpha=k$，方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 叫做直线 l 的点斜式方程(point-slope form of equation).

练习 11.2(1)

1. 已知直线 l 与向量 $\vec{d}$ 平行，求直线 l 的斜率与倾斜角.

(1) $\vec{d}=(2,-\sqrt{3})$；　　(2) $\vec{d}=(-4,-3)$；

(3) $\vec{d}=(-2,0)$；　　(4) $\vec{d}=(0,-5)$.

2. 求经过下列两点的直线的斜率和倾斜角.

(1) $P(-2,-2)$，$Q(2,2)$；　　(2) $P(1,\sqrt{3})$，$Q(2,2\sqrt{3})$.

3. 已知直线 l 经过点 P 且倾斜角为 α，求直线 l 的方程.

(1) $P(-2,5)$，$\alpha=30^\circ$；　　(2) $P(3,-4)$，$\alpha=70^\circ$.

直线的点方向式方程、点法向式方程、点斜式方程都可化为关于 x、y 的二元一次方程

$$ax+by+c=0(a、b\text{不同时为零}) \qquad ①$$

的形式. 对于二元一次方程 $ax+by+c=0$(a、b 不同时为零),不妨设 $b\neq0$,我们可将方程①化为 $a(x-0)+b\left(y+\frac{c}{b}\right)=0$ 的形式,由直线的点法向式方程可知,它是以 $\vec{n}=(a,b)$ 为法向量,且经过点 $\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ 的直线的方程;当 $b=0$ 时,a 必不为零,此时方程①可化为 $ax+c=0$ 或 $x+\frac{c}{a}=0$ 的形式,它是垂直于 x 轴且经过点 $\left(-\frac{c}{a},0\right)$ 的直线的方程.

直角坐标平面上的直线 l 可用二元一次方程 $ax+by+c=0$ 表示,当 $b\neq0$ 时,也可表示成一次函数 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$,我们知道一次函数的图像是坐标平面上的直线 l,因此,坐标平面上的直线、一次函数、二元一次方程表示同样的对象.

我们把方程①叫做直线的一般式方程(genenal form of equation). 由上述分析可知,x、y 的系数 a、b 组成的向量 $\vec{n}=(a,b)$ 是直线 l 的一个法向量,易推得 $(b,-a)$ 是直线 l 的一个方向向量.

为什么 $\vec{d}=(b,-a)$ 是直线 l 的一个方向向量?

例 3 求过点 $A(-3,4)$ 且平行于直线 l_0:$3x-4y+29=0$ 的直线的方程.

解 方法一:由直线的一般式方程中系数的几何意义可知,向量 $\vec{n}=(3,-4)$ 是直线 l_0 的一个法向量. 因为所求直线平行于 l_0,所以 $\vec{n}=(3,-4)$ 也是所求直线的一个法向量. 又因为该直线过点 $A(-3,4)$,所以它的点法向式方程为

$$3(x+3)-4(y-4)=0.$$

经整理,所求直线的方程为

$$3x-4y+25=0.$$

方法二:因为 $\vec{n}=(3,-4)$ 是直线 l_0 的一个法向量,而所求直线与 l_0 平行,所以 $\vec{n}=(3,-4)$ 也是所求直线的一个法向量. 于是可设所求直线的一般式方程是

$$3x-4y+c=0.$$

又因为所求直线经过点 $A(-3,4)$,所以点 A 的坐标满足上述方程,即 $3\times(-3)-4\times4+c=0$,解得 $c=25$.

因此,所求直线的方程为 $3x-4y+25=0$.

注 意

求直线的方程时,最后结果通常用直线的一般式方程表示.

例 4 已知直线 l 经过点 $P(1,2)$,且垂直于直线 l_0:$x-3y-5=0$,求直线 l 的方程.

解 因为直线 l 垂直于直线 l_0,所以直线 l_0 的一个方向向量 $\vec{d}=(3,1)$ 是直线 l 的一个法向量. 又直线 l 过点 $P(1,2)$,故可得直线 l 的点法向式方程

$$3(x-1)+1(y-2)=0,$$

即直线 l 的方程为

另解:直线 l_0 的一个法向量 $\vec{n}=(1,-3)$ 是直线 l 的方向向量,又因为直线 l 经过点 $P(1,2)$,所以得直线 l 的点方向式方程

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3},$$

整理得 $3x+y-5=0$.

$$3x+y-5=0.$$

例 5 已知直线 l：$2x+3y-6=0$，求直线 l 的点法向式方程和点方向式方程.

解 在 $2x+3y-6=0$ 中，令 $x=0$，得 $y=2$，即 $(0,2)$ 是直线 l 上一点的坐标.

由 l 的方程，可知直线 l 的法向量 $\vec{n}=(2,3)$，直线 l 的方向向量 $\vec{d}=(-3,2)$.

所以，直线 l 的点法向式方程为

$$2x+3(y-2)=0;$$

直线 l 的点方向式方程为

$$\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{2}.$$

注意

由一般式方程化为点法向式方程和点方向式方程时，取的点是不唯一的，一般取与坐标轴的交点较简便些.

练习 11.2(2)

1. 如果过 $P(-2,m)$、$Q(m,4)$ 两点的直线的斜率为 1，那么 m 的值是 (　　)

(A) 1；　(B) 4；　(C) 1 或 3；　(D) 1 或 4.

2. 求下列方程所表示的直线的斜率.

(1) $\frac{x+2}{2}=3(y-1)$；　(2) $3(x-3)-4(y+1)=0$.

3. 求经过下列两点的直线的斜率，并判断其倾斜角是锐角还是钝角.

(1) $P(2,3)$、$Q(6,5)$；　(2) $A(-3,5)$、$B(4,-2)$.

4. 已知直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a,0)$，与 y 轴的交点为 $B(0,b)$，且 $a\neq0$，$b\neq0$，求直线 l 的方程.

我们已经讨论了直线的多种形式的方程. 根据不同的条件，选择适当的形式，可以较便利地写出直线的方程，那么同一条直线的不同形式的方程之间有怎样的联系呢？

例如，对于直线 l 的点方向式方程

$$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}, \quad ①$$

其中向量 $\vec{d}=(u,v)$ $(u\neq0, v\neq0)$ 是 l 的一个方向向量.

可将方程①化为直线 l 的点法向式方程

$$v(x-x_0)-u(y-y_0)=0,$$

其中向量 $\vec{n}=(v,-u)$ 是直线 l 的一个法向量.

还可将方程①化为直线 l 的一般式方程

思考

请学生证明 $\vec{d}=(u,v)$ 与 $\vec{n}=(v,-u)$ 是相互垂直的.

$$vx-uy+(y_0u-x_0v)=0,$$

与它的一般形式 $ax+by+c=0$ 相比较，可知

$$a=v, b=-u, c=y_0u-x_0v.$$

由此可见，当直线的方向向量 $\vec{d}=(u,v)$ 中 $u\neq0, v\neq0$ 时，直线的不同形式的方程之间是可以互换的，我们将 $\vec{d}$、$\vec{n}$ 和斜率 k 互换的结果列表如下（表 1），其中空白处请同学自己填入：

思 考

试讨论当 u、v 或 a、b 之一为零时的直线的方向向量 $\vec{d}$、法向量 $\vec{n}$ 和斜率 k 之间的互换.

表 1

直线方程	方向向量 $\vec{d}$	法向量 $\vec{n}$	斜率 k
$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}$	(u,v)	$(v,-u)$	$\frac{v}{u}$
$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$		(a,b)	
$y-y_0=k(x-x_0)$			k
$ax+by+c=0$		(a,b)	

例 6 求下列方程所表示的直线的斜率.

(1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}$；　　(2) $3(x-1)-5(y-2)=0$.

解 (1) 将方程 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}$ 化为点斜式方程，得

$$y+1=\frac{4}{3}(x-2).$$

所以斜率 $k=\frac{4}{3}$.

(2) 将方程 $3(x-1)-5(y-2)=0$ 化为点斜式方程，得

$$y-2=\frac{3}{5}(x-1).$$

所以斜率 $k=\frac{3}{5}$.

另解：

(1) 由原方程可知，直线的方向向量 $\vec{d}=(3,4)$，可得斜率 $k=\frac{4}{3}$；

(2) 由原方程可知，直线的法向量 $\vec{n}=(3,-5)$，可得斜率 $k=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$.

例 7 已知 $A(3,2)$、$B(-4,1)$、$C(0,-1)$ 三点，求直线 AB、BC、CA 的斜率，并判断这些直线的倾斜角是锐角还是钝角.

解 直线 AB 的一个方向向量

$$\overrightarrow{AB}=(-4-3, 1-2)=(-7,-1).$$

所以，直线 AB 的斜率为

$$k_{AB}=\frac{-1}{-7}=\frac{1}{7}.$$

直线 BC 的一个方向向量

$$\overrightarrow{BC}=(0-(-4), -1-1)=(4,-2).$$

所以，直线 BC 的斜率为

$$k_{BC}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.$$