工业和信息化“十三五”规划教材

MATHEMATICAL MODELING

数学建模

梁进 陈雄达 钱志坚 杨亦挺 ◎ 编

传承经典，演绎数学之美

配录微课，共享精品资源

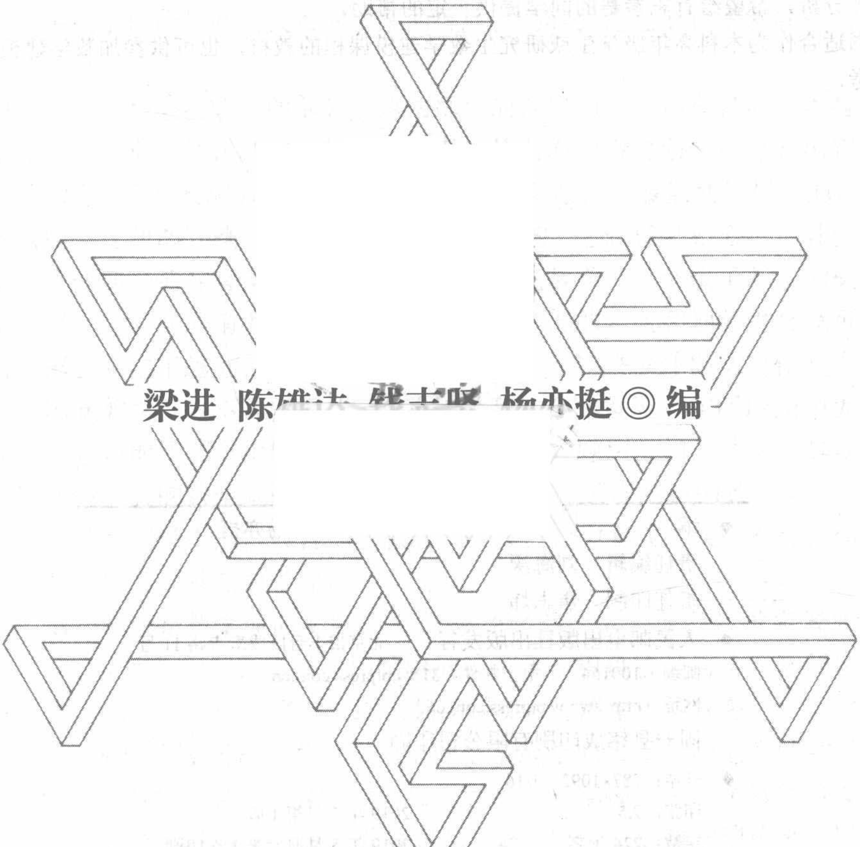
培养能力，满足教学需求

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

“十三五”规划教材

MATHEMATICAL MODELING

数学建模



梁进 陈雄达 钱志坚 杨亦挺 ◎ 编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（C I P）数据

数学建模 / 梁进等编. -- 北京 : 人民邮电出版社,
2019.5
ISBN 978-7-115-50497-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①梁… Ⅲ. ①数学模型 Ⅳ.
①0141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第285474号

内 容 提 要

本书在常规数学建模教学内容的基础上对建模的分析和计算问题进行了强化，并结合实例讲解各个模型的深度应用，特别增补了数据处理模型的内容，以应对大数据时代的建模需求．全书共 5 章，分别为图论模型、概率统计模型、动态模型、优化模型、竞赛攻略．其中，4 类模型可以应对大多数建模问题，竞赛攻略则介绍了竞赛的基本情况，并以同济大学数学建模竞赛一等奖论文为例进行点评分析，希望给有志参赛的同学提供一定的帮助．

本书适合作为本科高年级学生或研究生数学建模课程的教材，也可供参加数学建模竞赛的学生学习参考．

◆ 编　　　梁　进　陈雄达　钱志坚　杨亦挺
责任编辑　刘海溧
责任印制　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
固安县铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：9.5　　　　2019 年 5 月第 1 版
字数：224 千字　　　　2019 年 5 月河北第 1 次印刷

定价：32.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广登字 20170147 号

前言

古希腊数学最早分为代数和几何，分别起源于计数、丈量大地及天文观测等实践活动. 西方工业革命后，随着科学技术的发展，当时对静态的数量和空间关系的数学研究成果已不能满足需求，因此用于处理变量的微积分就应运而生. 当然，数学家们用了百余年才将其理论逐步完善，使得微积分成为今天强大的数学分析工具. 第二次世界大战期间，弹道设计、飞行控制、物资调运、密码破译等方方面面对数学的迫切需求，快速地将数学的应用推向了更多的领域，催生了一大批新的数学学科，迎来了应用数学蓬勃发展的时代. 这期间，电子计算机的诞生也大大改变了数学研究及数学应用的格局. 伴随而来的随机处理的理论和方法也进入了理论数学的“正厅”. 21 世纪，信息化社会和互联网时代对数学提出了更为广泛和深刻的要求. 具有时代特征的大数据正在有力地推动着数学科学的发展，现有的许多数学理论都面临大数据带来的挑战，同时，这也给数学发展进入一个新时期提供了难得的机遇.

数学分为理论数学和应用数学两部分，这两部分的发展动力分别来自数学本身的内在动力以及自然和社会需求的外在动力，特别是后者，从前面的历史回顾可以看出它是数学形成和发展的源动力. 这两股动力的合力就是数学生生不息、发展强劲的根本原因. 自数学诞生的第一天起，这两部分就是相辅相成，共同发展的. 它们息息相通，水乳交融，然而从表面上看，这两部分却各有自己的天地，特别是理论数学一旦形成了基本的概念和方法，就不一定需要来自实际的动力，更多时候凭借数学内部的矛盾和抽象思维就可以独自进行推进，甚至离实际越来越远，走进了象牙塔. 但数学一旦缺少外部动力作为本源的支持，终将式微，因此数学是离不开应用的. 随着科学和社会的发展，实际应用中大量的数学问题应运而生，急切地要求应用数学工具去解决，有些问题用已知的数学工具就可以解决，而有更多问题对现有的数学理论提出了挑战，甚至催生了许多新的数学分支. 所以数学的理论和应用的关系就像中国古典哲学思想的太极圆，你中有我，我中有你，而连接理论和应用的一个直接的纽带就是数学建模.

概括地说，数学建模是数学通向实际应用的必经之路，也是促进数学发展的重要因素. 数学建模面对的是实际问题，它是应用数学的第一步，担负着如何将实际问题翻译成数学语言，提出数学问题，最后再将数学结果翻译到实际应用中去的任务，所以其至少肩负着如下职责：(1)明白实际问题，发现问题中的数量或空间关系，用适当的数学工具表述这些关系；(2)深切理解数学，了解数学的长处和短处，掌握至少一个数学分支，并熟悉其他各分支，找到最适合的数学工具去处理对象问题. 所以一个数学建模者，既要了解实际问题，也要掌握数学的理论和方法.

然而数学模型并不是百分之百地反映了实际问题，在建模的过程中，人们对实际问题进行了一定的假设和简化，突出了主要矛盾而忽略了次要矛盾，这需要人们在应用数学模型时留意其适用范围，这样同一个实际问题才可能有不同的数学模型表述. 从某种程度上

说，这正是数学的各个分支百花齐放、各具芬芳的原因．正如1998年菲尔兹奖得主、英国数学家高尔斯(T. Gowers)所说，数学所研究的并非是真正的现实世界，而只是现实世界的数学模型，也就是研究现实世界的一种虚构和简化的版本．其实，数学各个分支的研究对象，几何、代数、变量、方程……哪一个不是某方面具有该分支特点的数学模型呢？因此，可以说数学模型也是理论数学的研究对象，是理论数学的原始出发点．数学的发展史就是建立各种从实际中提出数学模型并对其研究深化的历史，因此数学建模在数学研究领域的地位是举足轻重、极为关键的．

既然数学建模如此重要，那么数学建模就应该成为数学专业学生、其他理工科学生甚至是文科学生的必修课．合适的教材也就成了学生学习以及老师讲授数学建模课程的好帮手．近年来，参加各种各样数学竞赛的学生越来越多，常有学生问起，想参赛要达到什么样的要求？我们的回答是，没有特殊的要求，只要你懂点数学，能写作文即可．事实上，你可以用自己已知的数学知识去翻译实际问题、解决实际问题．当然，你的数学知识掌握得越多，就有可能做出越好的模型．所以数学建模的目的不是考验建模者会不会技巧，而是形成一个让人循序渐进、不断增强能力的过程．

数学建模学习过程中最困难的可能是如何将一个实际问题用数学语言表示出来．数学领域学科纷繁多样，其表达形式也有各种“方言”，要从中找到适合问题对象的数学工具．图1所示的建模路线图将本书主要介绍的模型联系起来，也许可以帮助读者尽快将需要解决的问题对号入座．

数学建模导读

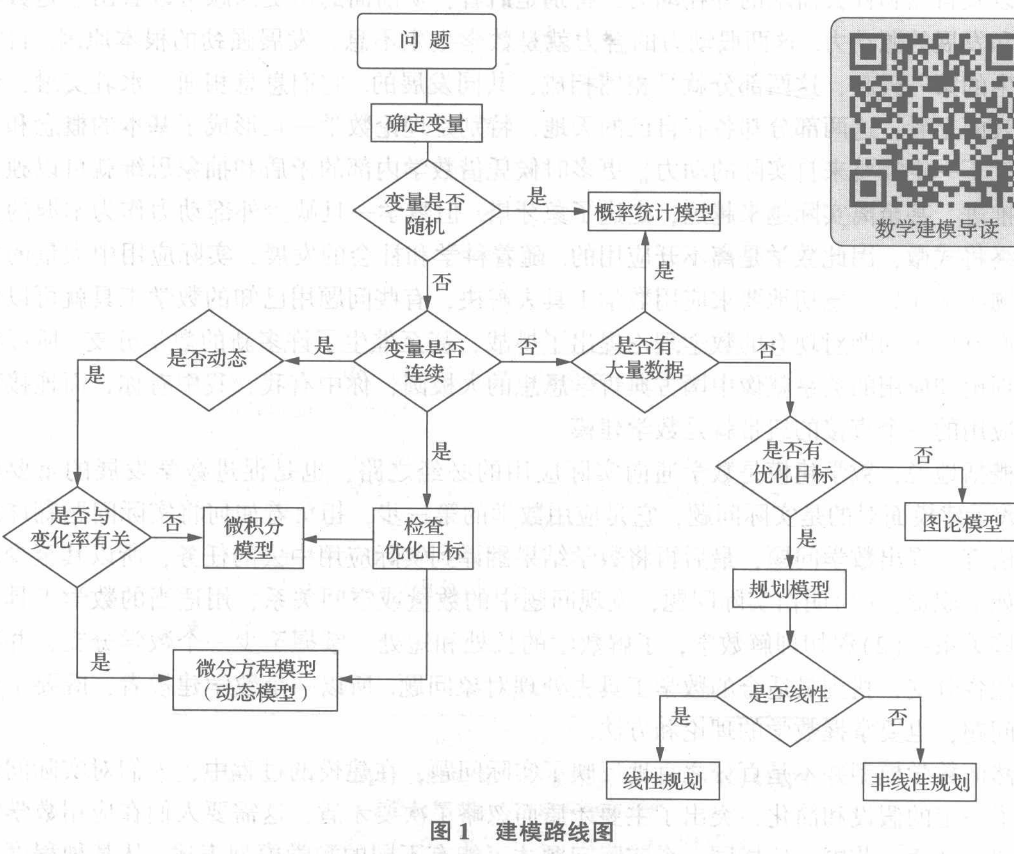


图1　建模路线图

然而这张示意图并不是“建模秘诀”，同一个问题可能需要使用多个工具建模，也可能这个问题用不同的工具都可以处理，所以学习数学建模需要通过对数学理论的深刻理解和掌握以及建模应用的实践逐渐加强解决问题的能力.

《数学建模讲义》是基于我们近十年在同济大学进行数学建模教学实践所出的第一本教材. 该教材出版后受到师生们的欢迎和好评. 随着现代社会日新月异的发展以及人们对数学建模各层次学习的需求，这本教材已不能完全满足所有的课程对象，于是我们组织撰写了这本《数学建模》. 如果说《数学建模讲义》是学习数学建模的入门教材，那么这本《数学建模》就是一本进阶教材. 两本教材都保持了语言通俗、例子有趣的特点，但又各有侧重.《数学建模讲义》中有大量初等模型的例子，详述了线性规划，对建模的过程和基本方法进行逐步深入的详细解释，尤其对建模的其他要素，如写作、评估等也有详解. 而《数学建模》在继承《数学建模讲义》重视计算的基础上，加强了分析问题的环节，深化了图论、动态和优化模型，特别是增添了概率统计模型，以应对大数据时代的需求.《数学建模》还针对目前越来越受欢迎的数学建模竞赛，专开一章介绍参赛攻略，希望给有志参赛的同学提供一定的帮助.

读者扫描旁边的二维码，可以观看由本书编者主演的《数学之城》科普短片(版权归上海东影传媒有限公司所有)。该片是本书很好的导读片，荣获 2017 年国家科普影片最高奖“科蕾杯”一等奖，片中涉及许多城市生活中的问题，其数学建模方法在本书有详细的介绍。读者观看后会感受到：数学建模是和我们的生活密不可分的。

《数学之城》短片

本书共 5 章，除前言外，分别为图论模型(杨亦挺编写)、概率统计模型(钱志坚编写)、动态模型(梁进编写)、优化模型(陈雄达、梁进编写)和竞赛攻略(梁进编写). 黄芝轩同学对第 2 章的计算工作进行了有力支撑，在此表示感谢. 本书提供了部分程序代码示例和动画(陈雄达、钱志坚编写)，读者可从人邮教育社区(www.ryjiaoyu.com)搜索本书书名，在对应页面下载. 本书面向的读者对象主要是有一定数学建模基础的同学. 与《数学建模讲义》一样，教师在授课时可以根据实际情况进行删减. 每章最后附有精心挑选的习题. 希望这本书可以对读者学习数学建模和提高数学建模能力有所帮助.

编者

2019 年 3 月

目 录

第1章 图论模型

本章中我们着重介绍图论相关的一些模型和算法. 先从一个经典的图论模型——哥尼斯堡七桥问题谈起.

18世纪初在普鲁士的哥尼斯堡城有一条河穿过城市的中心，河中分布着两个小岛，这两个岛与河岸由七座桥连接起来，如图1.1(a)所示. 有人提出一个有趣的问题，即一个步行者怎样才能不重复、不遗漏地一次走完七座桥，最后回到出发点. 这一问题被命名为哥尼斯堡七桥问题，也被认为是图论学科的起源. 这个问题看似非常简单，但是却难住了当时博学的教授们，最后大数学家欧拉解决了这一问题. 他解决这一问题的过程可以看作是一个简单的数学建模过程.

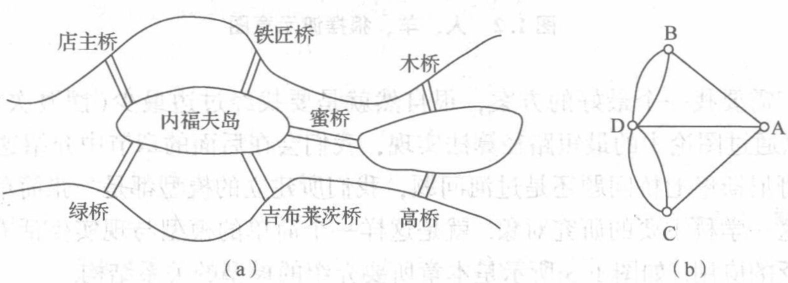


图1.1 哥尼斯堡七桥示意图

第一步，我们把这个问题的本质提炼出来，即人们分别在岸上和岛上行走的路线与距离，桥的形状长度与本问题无关，我们只需要关注过桥的顺序. 基于这一考虑，第二步我们可以分别用四个点来表示河的两岸和河中的岛屿，而用点之间的连线表示连接它们之间的桥，这样我们就得到了一张简单的图，如图1.1(b)所示. 我们所要求解的问题就转化成了是否可以从图中一点出发，经过每条连线恰好一次回到起点. 第三步，我们观察到在经过图中点时必然由一条连线进另一条连线出，因此我们所要求的走法存在的必要条件是图中每个点相关联的连线数目是偶数，从而得出结论，哥尼斯堡七桥问题中所要求的走法是不存在的.

下面我们再给出一个看似和图无关，但可由图来巧妙解决的问题——过河问题.

一只狼，一只羊，一筐菜位于河的同侧. 一个摆渡人要将它们运过河去，由于船小，运力有限，一次只能载三者之一. 很显然，狼和羊，羊和菜都不能在无人监视的情况下留在一起，那么摆渡人应该怎样把它们运过河呢?

我们的目标是将羊，狼，菜从河的一边运到另一边，在每次摆渡发生后，羊、狼、菜中最多一个以及人的位置会发生变化(即从河岸的一边到另一边)，而根据题意，其中一些位置的组合是不可以出现的. 因此，整个摆渡过程可以看成是狼、羊、菜、人的位置的可行的变化过程. 我们可以建立一张图来刻画这一过程. 不妨设开始三者都在河的北岸，需要运到南岸.

我们用一个长度为 4 的 0，1 序列来表示人、羊、狼、菜在摆渡发生前或后的位置，其中 1 表示北岸，0 表示南岸. 根据要求，我们列出可能的 10 种状态，分别用平面上 10 个点来表示，对于它们当中任何两个点，用一条线相连，当且仅当这两点所表示的位置状态可以通过一次摆渡转化. 这样我们就得到了一张图(见图 1.2)，而图中从点(1,1,1,1)经过一些边到点(0,0,0,0)的每一种走法都对应一种可行的摆渡方案.

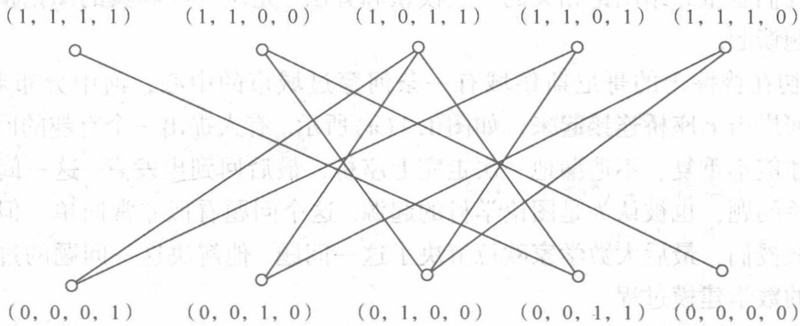


图 1.2　人、羊、狼摆渡示意图

如果我们需要找一个最好的方案，很自然就是要找经过边最少(摆渡次数最少)的方案. 这点可以通过图论中的最短路径算法实现，我们会在后面的章节中介绍这一算法.

不论是哥尼斯堡七桥问题还是过河问题，我们所建立的模型都是一张简单的“图”，而它就是图论这一学科主要的研究对象. 就是这样一个简单的模型与现实生活有着紧密的联系，有着广泛的应用. 如图 1.3 所示是本章所要介绍的模型的关系结构.

第 1 章微课

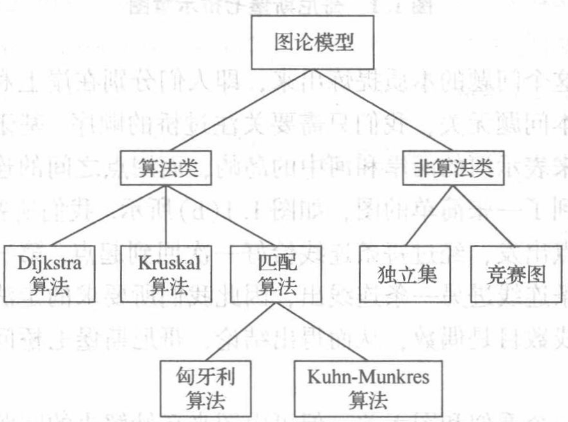


图 1.3　图论模型的关系结构

1.1　图论模型的基本理论

对于前面的两个例子，我们可以这样来理解，所谓的图就是由平面上的一些点以及这些点之间的连线构成的结构. 这里我们对点的位置，连线的曲折程度、长短不做区分，重点在于哪些点对是相连的，由几条线相连. 图中的点在图论中称为顶点，两点之间的连线

称为边. 和某一点有边连接的其他点都称为它的邻点.

在过河问题的解决方案中，从一点出发，通过一些边经过不同的点到达另一点的路径我们称之为路，所含边的数目称为路的长度. 一般来说，图中连接两点的路不止一条，我们把这些路中所含边数最少的路所含的边数称为这两点之间的距离.

实际问题中所建立的图论模型往往比上述问题复杂，因此需要借助计算机并通过好的图论算法来解决. 我们将在本章对一些基本算法逐一介绍，然后在以后的章节里通过模型加以应用. 而运用计算机解决图上的问题，首先我们要让计算机学会读取图的信息. 为了做到这一点，我们引进了关联矩阵和邻接矩阵.

- 关联矩阵：当图 G 中顶点集和边集分别为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 时，我们可以写出其对应的关联矩阵 $M(G)=(m_{ij})$，其中，如果 v_i 是边 e_j 的一个端点则 m_{ij} 为 1，否则为 0.
- 邻接矩阵：当图 G 的顶点集为 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 时，我们可以定义它的邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为连接顶点 v_i 与 v_i 的边的数目.

例如，如图 1.4 所示，其关联矩阵和邻接矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

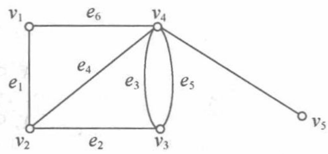


图 1.4　图 G

很显然，图的邻接矩阵是对称的，因此为了节约计算机储存空间，我们往往只需要读取对角线及以上部分.

在实际问题中，我们遇到的绝大多数图中两点之间至多只有一条边连接，且没有自己到自己的边，这样的图称为简单图. 如果根据实际问题需要，对图中的边赋予一定的权重，我们称这样的图为赋权图，记边 (v_i,v_j) 的权为 $w(v_i,v_j)$. 对于赋权图，两点间的距离的定义和一般图就不一样了，它是指连接两点之间的所有路中权重最小的路的权重. 有时我们需要对图的每一条边都规定方向，加了定向的图我们称为有向图. 当然，为了突出有向图的方向性，它的邻接和关联矩阵都和无向图有所区别，我们将在后面的章节中介绍.

最后，我们介绍几类后面章节中将要涉及的图类，如表 1.1 所示.

表 1.1　图类及说明

图　类	说　　明
完全图	图中任何两点都有唯一一条边连接的图[见图 1.5(a)]
连通图	图中任意两点之间至少有一条路径相连
圈	从一顶点出发，不重复地经过一些点和边又回到自己
树	一个不含圈的连通图
二部图	图的顶点集可以分成两部分，使得图中的每条边的两个端点都分别在这两个部分
完全二部图	任意取自两个部分的点都有边相连的二部图
哈密顿路	通过图的每个顶点一次，且仅一次的通路
双连通图	图中任何两点之间有两条方向相反的有向路连接

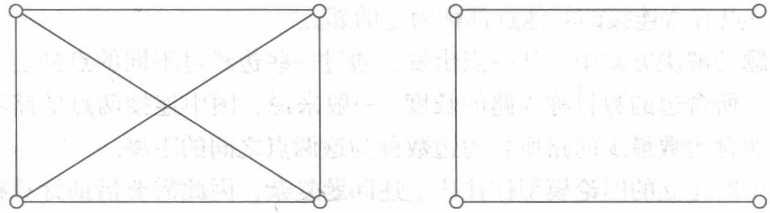


图 1.5 完全图和支撑树示意图

通常我们可以通过去边和去点的方法得到包含在一个大图中的小图，我们称之为子图，注意去点时也去掉该点相关联的边. 包含所有顶点的子图叫作支撑子图，特别地，如果一个支撑子图是树时，我们称它为图的支撑树[见图 1.5(b)]. 由两两无公共端点的边所组成的子图称为图的匹配，如果该匹配涵盖了图的所有顶点，则称其为图的完美匹配. 图 1.6 所示就是一个二部图和它的一个完美匹配.

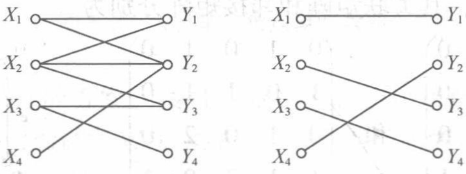


图 1.6 二部图及其完美匹配

1.1.1 图的独立集

图的一个顶点子集如果满足其中任何两个顶点之间都没有边相连，那么我们称其为一个独立集. 如果把图看成集合上的二元关系，独立集中的顶点相互没有关系，所以在信息科学研究中常称其为稳定集. 所含顶点个数最多的独立集称为最大独立集，而这一最大值称为图的独立数. 如何找点数多的独立集以及确定图的独立数是图论研究中一个极其重要的问题. 我们可以通过取点然后删去它的邻点，再取点再删邻点的这种贪婪算法得到独立集，但并不能保证所得的独立集所含点数足够多. 如果一个独立集不包含于任何其他独立集，我们称其为极大独立集. 如何将一个图的顶点集划分成尽可能少的独立集的并即为图的着色问题.

图的覆盖是与图的独立集紧密相关的一个概念. 图的一个顶点子集如果满足图中任意一条边都与其中某一点关联，则称该子集为图的一个覆盖. 所含点数最小的覆盖称为最小覆盖. 如果一个点覆盖不包含其他覆盖，我们称其为图的极小覆盖. 如果以顶点集为全集，每个独立集的补集为图的一个覆盖，而任何一个覆盖的补集必为一个独立集. 所以极大独立集与极小覆盖也为互补关系，因此寻找极大独立集和寻找极小覆盖为两个等价的问题.

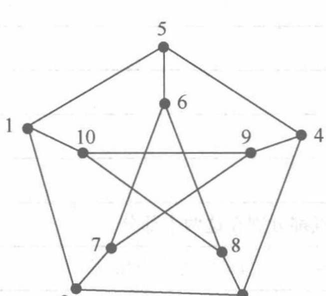


图 1.7 独立集与覆盖示例

如图 1.7 所示，{5,7,8} 是一个极大独立集，{1,4,7,8} 是一个最大独立集，{1,2,3,4,6} 是一个极小覆盖，{2,3,5,6} 是一个最小覆盖.

1.1.2　竞赛图

竞赛图是一种特殊的有向图，它的任何一对顶点之间都有一条唯一的有向边相连. 换句话说，竞赛图实际上是由对完全图的每条边都赋上一个方向得到. 之所以称之为竞赛图，是因为我们可以用它来记录一场小组内循环赛的比赛结果. 因为对每一条边的方向只有两个选择，所以，我们只能记录必须分出胜负的比赛，不允许出现打平的情况，例如篮球比赛. 我们可以用顶点来表示运动员或运动队，用有向边来记录两队的比赛结果. 具体地，如果甲赢了乙，在甲和乙之间用一条由甲指向乙的边来连接. 这样我们得到了一张竞赛图记录了所有的比赛. 竞赛图当前主要应用于包括投票理论和社会选择理论在内的研究.

下面我们介绍两个竞赛图的基本性质.

性质 1　任何竞赛图都含有一个有向的哈密尔顿路.

我们定义一个无向图的哈密尔顿路，即从图某一点出发到达另一顶点且经过图中所有其他顶点恰好一次的路径. 对于有向图，我们有类似的定义，所谓有向的哈密尔顿路是从一点出发到达另一顶点并经过所有顶点恰好一次的有向路径，这里有向路径是指路径中的边的方向都一致.

性质 2　任何竞赛图都有一个唯一的双连通分支的线性排序.

如果图中任意两个顶点之间都有两条方向相反的有向路连接，则称其是双连通或强连通的. 对于不是双连通的图，都可以分解成若干个极大的双连通分支. 上述性质指出对于竞赛图，存在极大的双连通分支的唯一的一个线性排列，即 $D_1, D_2, \cdots, D_k$，其中对于任何 $i<j$，D_i 和 D_j 之间的有向边的方向均为从 D_i 的顶点指向 D_j 的点.

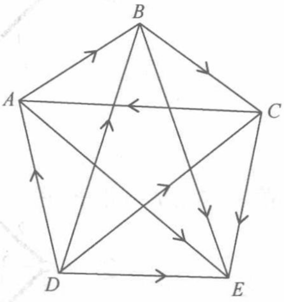


图 1.8　竞赛图示例

如图 1.8 所示是一个竞赛图，它不是双连通的，$D \to A \to B \to C \to E$ 为一条有向的哈密尔顿路，该图有 3 个双连通分支且唯一线性排序为 $D_1 = \{D\}$，$D_2 = \{A, B, C\}$，$D_3 = \{E\}$.

1.1.3　Dijkstra 算法

Dijkstra 算法(迪杰斯特拉算法，一般用其英文)是一个用来计算给定赋权图中一点到其他各点之间距离的算法，也称为最短路径算法.

输入：n 个顶点的赋权图 G，顶点 u_0.

(1) 置 $l(u_0) = 0$，对 $v \neq u_0$，$l(v) = \infty$，$S_0 = \{u_0\}$ 且 $i = 0$.

(2) 对每个 $v \in \bar{S}_i$，用 $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_i, v)\}$ 代替 $l(v)$. 计算 $\min\limits_{v \in \bar{S}_i}\{l(v)\}$，并且把达到这个最小值的一个顶点记为 u_{i+1}，置 $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.

(3) 若 $i = n-1$，则停止. 若 $i < n-1$，则 $i+1$ 代替 i，并转入(2).

输出：u_0 和图中任意点之间的距离.

注意： Dijkstra 算法是一个多项式时间算法，事实上它能执行不超过 n^2 次简单运算(n 为图中顶点的个数)，算出赋权图上任意两点之间的距离.

下面我们运用 Dijkstra 算法来计算图 1.9 中点 u_0 到其他各点的距离.

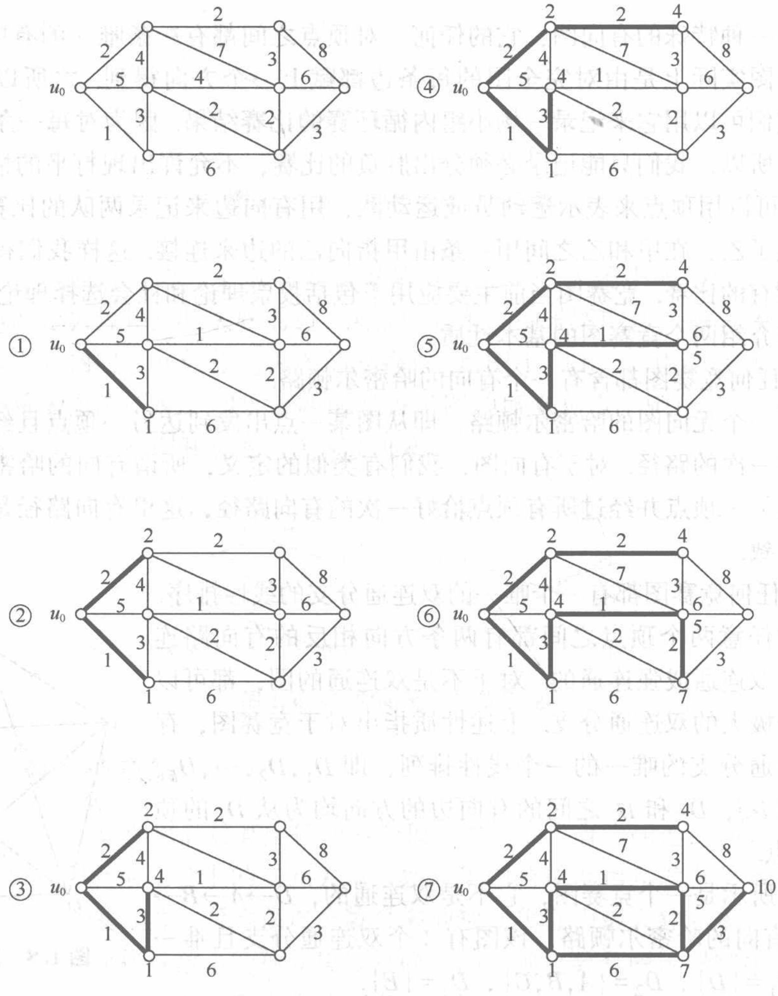


图 1.9　Dijkstra 算法示意图

1.1.4　Kruskal 算法

要求一张赋权图的最小支撑树，我们可以采用如下的 Kruskal 算法(克鲁斯卡尔算法，一般用其英文)，也称为最小支撑树算法.

输入：赋权图 $G(V,E,w)$，其中 w 为各条边权重的赋值函数.

(1) 选择边 e_1，使得 $w(e_1)$ 尽可能小.

(2) 若已经选定边 $e_1,e_2,\cdots,e_i$，则从 $E\setminus\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中选取 e_{i+1}，使得

① 由 $e_1,e_2,\cdots,e_i$，构成的子图 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{i+1}\}]$ 为无圈图；

② $w(e_{i+1})$ 是满足(1)的尽可能小的权.

(3) 当第(2)步不能继续执行时则停止.

输出：最小支撑树 $T(G)$.

下面我们运用 Kruskal 算法，求出图 1.10 中的最小支撑树(最后一张图加粗边为支撑树).

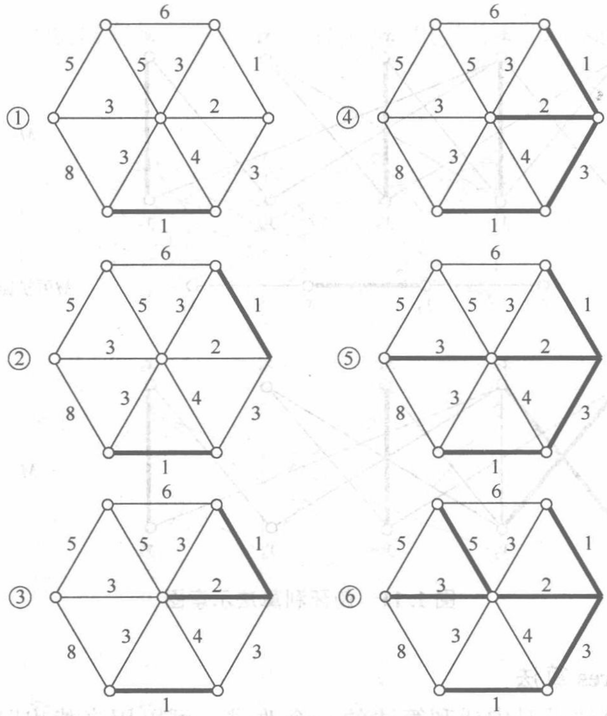


图 1.10　Kruskal 算法示意图

1.1.5　匹配算法

本节中我们将介绍与匹配相关的两个经典算法——匈牙利算法和 Kuhn-Munkres 算法(也称 KM 算法)。

为了便于理解算法，我们先介绍两个相关的概念. 假设 M 是图 G 的一个匹配，v 是 G 的一个顶点，如果 v 是 M 中某条边的端点，则称 M 饱和 v，否者称 v 是 M 的非饱和点.

一条连接两个非饱和点 x 和 y 的由 M 外的边和 M 的边交错组成的路称为 M 的可扩 (x,y) 路. 设 S 为 G 中一些顶点组成的集合，记 $N(S)$ 为 S 中各点邻点的并集.

图 1.11 中的匹配 M 中就存在可扩路 P，经过更新后得到一个边数更多的匹配$\hat{M}$.

1. 匈牙利算法

匈牙利算法主要用于求已知二部图的最大匹配，如果二部图两部分顶点一样多，该算法显然可以确定完美匹配是否存在.

(1) 若 M 饱和 X 的每个顶点，则停止. 否则，设 u 是 X 中的 M 非饱和点. 置 $S=\{u\}$ 及 $T=\varnothing$.

(2) 若 $N(S)=T$，由于 $|T|=|S|-1$，所以 $|N(S)|<|S|$，因而停止，因为根据 Hall 定理(参考文献[1])，不存在饱和 X 的每个顶点的匹配. 否则，设 $y\in N(S)\setminus T$.

(3) 若 y 是 M 饱和的. 设 $yz\in M$，用 $S\cup\{z\}$ 代替 S，$T\cup\{y\}$ 代替 T，并转到第(2)步. 否则，设 P 是 M 可扩 (u,y) 路，用$\hat{M}=M\Delta E(P)$代替 M，并转到第(1)步. 其中 $E(P)$ 为 P 的边集. 符号 Δ 表示集合的对称差运算. 通常，对于集合 A，B，其对称差 $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

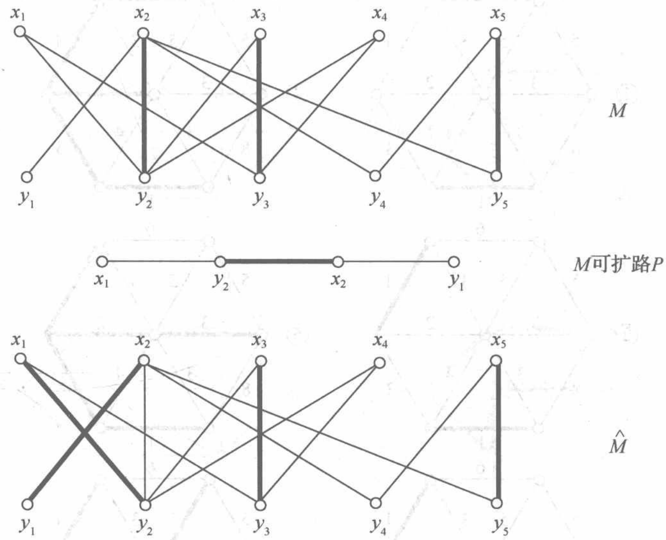


图 1.11 匈牙利算法示意图

2. Kuhn-Munkres 算法

Kuhn-Munkres 算法是对匈牙利算法的一个改进，可以用来找出赋权完全二部图的最优匹配.

假设 l 是顶点集 $X\cup Y$ 上的实函数，且满足对于所有的 $x\in X$ 及 $y\in Y$，均有

$$l(x)+l(y)\geqslant w(x,y),$$

其中 $w(x,y)$ 为边 xy 的权重，则称 l 为 G 的一个可行顶点标号. 这样的标号一定是存在的，例如，我们可以对所有 Y 中的点都标零，而对于 X 中的点 x 标上与它关联的所有边的权重的最大值即可. 记 G_l 为在标号 l 下，那些使得上式取等号的边组成的 G 的子图. G_l 中与顶点集 S 关联的点的集合记为 $N_{G_l}(S)$.

从任一可行顶点标号 l 开始，然后决定 G_l，并且在 G_l 中选取任意一匹配 M.

(1) 若 X 是饱和的，则 M 是完美匹配，并且是最优的，算法终止；否则，令 u 是一个 M 非饱和点，置 $S=\{u\}$，$T=\varnothing$.

(2) 若 $N_{G_l}(S)\supset T$，则转入(3)；否则 $N_{G_l}(S)=T$. 计算

$$\alpha_l=\min_{\substack{x\in S\\ y\notin T}}\{l(x)+l(y)-w(xy)\},$$

且由

$$\hat{l}(v)=\begin{cases} l(v)-\alpha_l, & 若\ v\in S,\\ l(v)+\alpha_l, & 若\ v\in T,\\ l(v), & 其他.\end{cases}$$

给出可行顶点标号$\hat{l}$. 以$\hat{l}$代替 l，以 $G_{\hat{l}}$代替 G_l.

(3) 在 $N_{G_l}(S)\setminus T$ 中选择一个顶点 y. 考察 y 是否 M 饱和. 若 y 是 M 饱和的，并且 $yz\in M$，则用 $S\cup\{z\}$ 代替 S，用 $T\cup\{z\}$ 代替 T，再转到(2)；否则，设 P 是 G_l 中 M 可扩 (u,y) 路，用$\hat{M}=M\Delta E(P)$代替 M，并转到(1).

图 1.12 所示为一个赋权完全二部图 $G=(G,w)$，以及在标号 l 和 $\hat{l}$ 下的子图以及最优匹配.

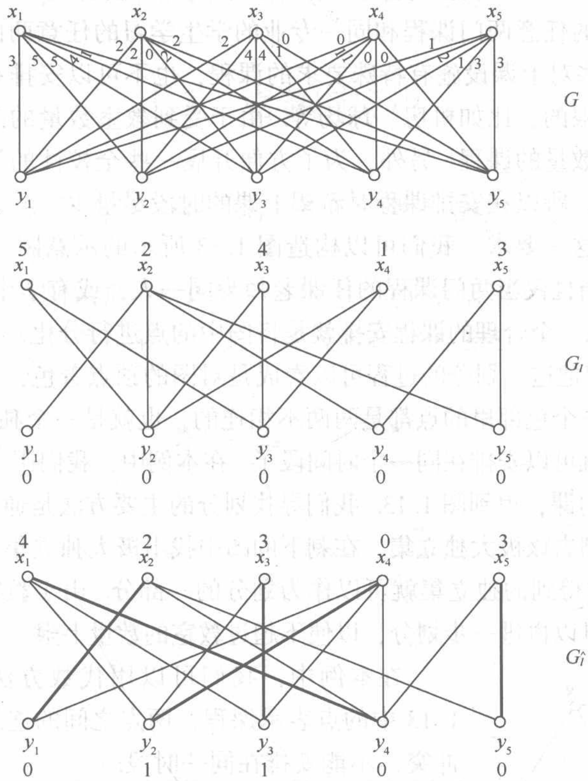


图 1.12　Kuhn-Munkres 算法示意图

1.2　图的独立集应用

问题描述　各大学教务处每学期临近结束时，都需要根据各任课老师任课计划和学生选课情况，再结合教室资源情况安排下一学期的课程及上课时间和地点. 表 1.2 所示是某大学电信学院的大三各专业部分课程情况. 该学院每届学生按专业分班，统一选课. 另外，学院只有一间普通机房和一间高级机房. 那么应该如何合理地安排这些课程呢?

表 1.2　课程安排

课　程	专　业	任 课 老 师	上 课 地 点
人工智能	自动化	刘宇	教室
程序设计	计算机科学	刘宇	普通机房
数据结构	计算机科学	张明	教室
动画制作	自动化	王文	高级机房
动画制作	计算机科学	张明	高级机房
数据结构	信息安全	张明	教室
程序设计	信息安全	王文	普通机房