

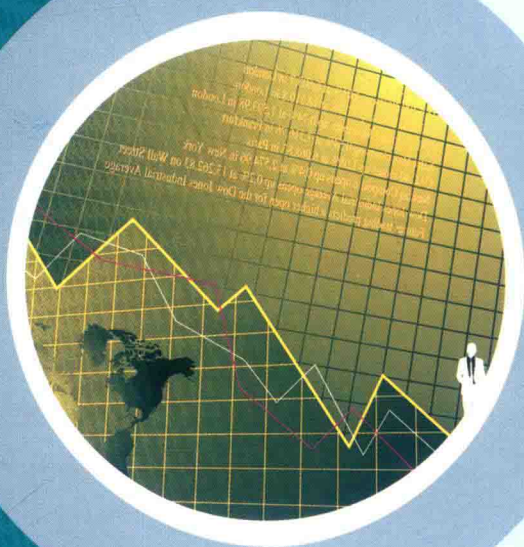
普通高等院校『十二五』规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

(上册)

主编◎赵润华



清华大学出版社

普通高等院校“十二五”规划教材

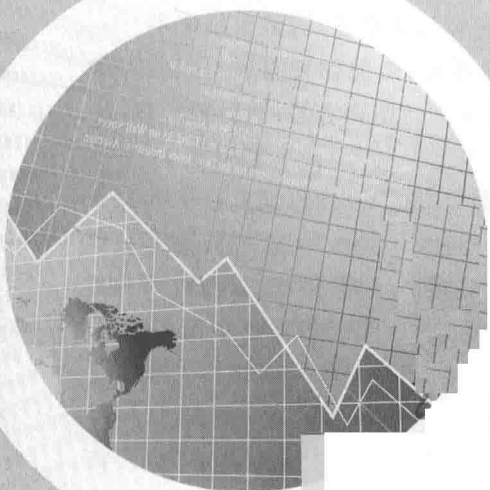
高等数学

(上册)

GAODENG SHUXUE

主 编◎赵润华

副主编◎张超敏 李跃武 郝多明



清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书在高等数学教学实践的基础上,在保证知识的系统性和完整性的同时,以专业服务和应用为目的,以体现数学文化、加强实验教学、强化数学建模能力训练为指导思想而编写的。

本书分上、下两册,上册包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用。各章末附有习题,书末附有常用数学公式、常用数学符号和几种常用的曲线及其方程。

本书可作为普通高等院校教材,也可供管理、财经专业及非数学类理科专业的学生学习参考。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/赵润华主编.--北京:清华大学出版社,2015

(普通高等院校“十二五”规划教材)

ISBN 978-7-302-40748-5

I. ①高… II. ①赵… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 162041 号

责任编辑:刘志彬

封面设计:汉风唐韵

责任校对:王凤芝

责任印制:王静怡

出版发行:清华大学出版社

网 址:<http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市海新印务有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185 mm×260 mm

印 张:12.5

字 数:287 千字

版 次:2015 年 8 月第 1 版

印 次:2015 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:29.00

产品编号:066160-01

为了适应“高等数学面向 21 世纪数学内容和课程体系改革规划”的需要,探索以工程应用为目的的高等数学改革模式,培养经济、管理、农林、生命科学等专业学生的数学素质和工程实践应用能力,我们在高等数学教学实践的基础上,本着理论体系完整、密切联系实际、专业应用突出的基本原则,编写了本教材。

本书在保证知识的科学性、系统性和严谨性的基础上,还具有以下特点:

1. 科学性

本书在内容安排上力求由浅入深,重点突出,结构清晰;在认知规律上,以实践背景为主线,引入数学概念,以便学生理解和掌握,符合认知规律。本书理论严谨,叙述简练,体现数学文化理念,便于模块化教学。数学不仅是一种重要的工具,也是一种思维模式即逻辑思维;数学不仅是一门科学,也是一种文化即数学文化;数学教学不仅传授知识,更重要的是培养学生运用数学工具解决实际问题的能力即数学建模能力,提升学生的数学素养。

2. 先进性

本书结构新颖,各章节相对独立,便于模块化教学;在内容编写上充分吸收国内外优秀教材的优点,在例题的配置与习题的选择上,注重与专业相结合,富有时代性;适合应用型人才兼顾拔尖创新型人才的能力培养。

3. 拓广性

本书注重知识的拓广,强化数学建模的能力训练。每个章节都安排有数学实验课、数学建模习题等板块,以此来培养学生用数学分析的方式解决工程实际问题的能力,提高数学素质,培养创新意识。

4. 适用性

本书针对不同专业学生对数学学科的不同要求,配备不同层次的习题,分为 A、B 两类。A 类是体现基本要求的习题,以够用为度;B 类是对基本内容提升、扩展及综合运用性质的习题,并与《全国硕士研究生入学统一考试大纲》的要求接轨。内容的安排以及习题选配都遵循了教学活动自身的规律性,以便组织教学。

参加编写的人员都是多年从事公共数学基础课程教学研究和高等数学课程教育教学改革实践的资深教育专家和教师。本书由主编负责设计编写大纲,

编者共同完成。各章编写分工如下：赵润华编写第1章；李跃武编写第2、3章；赵晓芬编写第4章；石国红、张若平编写第5、6、10章；赵雪婷编写第8章；张超敏编写第9章；郗多明、孙静编写第7、11章。

在本书的编写过程中，参考了许多国内外优秀教材，并且得到了清华大学出版社的大力支持，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不足和疏漏之处，敬请广大读者批评指正。

编 者

Contents

目 录

第1章 函 数

1.1 函数的概念	3
1.1.1 集合及其运算	3
1.1.2 区间与邻域	4
1.1.3 函数概念	5
1.2 函数的几种基本性质	6
1.2.1 有界性	6
1.2.2 单调性	7
1.2.3 奇偶性	7
1.2.4 周期性	7
1.3 复合函数与反函数	8
1.3.1 复合函数	8
1.3.2 反函数	9
1.4 初等函数	10
1.4.1 函数的四则运算	10
1.4.2 初等函数	10
1.5 经济学中的常用函数	10
1.5.1 单利与复利函数	10
1.5.2 成本函数、收益函数与利润函数	11
1.5.3 需求函数与供给函数	12
本章小结	12
习题一	13
阅读材料 I	16
阅读材料 II	18

第2章 极限与连续

2.1 数列的极限	23
-----------------	----

2.1.1	数列极限的定义	23
2.1.2	数列极限的性质	26
2.2	函数的极限	27
2.2.1	$x \rightarrow x_0$ 时,函数的极限	27
2.2.2	$x \rightarrow \infty$ 时,函数的极限	29
2.2.3	函数极限的性质	30
2.3	无穷小与无穷大	31
2.3.1	无穷小	31
2.3.2	无穷小的性质	32
2.3.3	无穷大	33
2.4	极限运算法则	34
2.4.1	极限的四则运算法则	34
2.4.2	复合函数的极限运算法则	37
2.5	极限存在准则 两个重要极限	38
2.5.1	极限存在准则	38
2.5.2	两个重要极限	39
2.6	无穷小的比较	42
2.7	函数的连续性与间断点	44
2.7.1	函数的连续性概念	44
2.7.2	连续函数的运算法则与初等函数的连续性	46
2.7.3	函数的间断点及其分类	46
2.7.4	闭区间上连续函数的性质	48
	本章小结	49
	习题二	52
	阅读材料	57

第3章 导数与微分

3.1	导数概念	61
3.1.1	引例	61
3.1.2	导数定义	62
3.1.3	左导数和右导数	63
3.1.4	函数的导函数	64
3.1.5	导数的几何意义	65
3.1.6	函数可导性与连续性的关系	66
3.2	求导法则与基本初等函数导数公式	66
3.2.1	导数的四则运算法则	66
3.2.2	反函数的求导法则	68

3.2.3 复合函数的求导法则	69
3.2.4 隐函数与参变量函数求导法则	70
3.3 高阶导数	73
3.3.1 高阶导数的概念	73
3.3.2 高阶导数的计算	73
3.4 微分及其运算	76
3.4.1 微分的概念	76
3.4.2 微分基本公式与微分法则	77
3.4.3 微分的几何意义及在近似计算中的应用	79
3.5 导数与微分在经济学中的应用	80
3.5.1 边际分析	81
3.5.2 弹性分析	82
本章小结	84
习题三	86
阅读材料	90

第 4 章 微分中值定理与导数应用

4.1 微分中值定理	95
4.1.1 罗尔定理	95
4.1.2 拉格朗日中值定理	96
4.1.3 柯西定理	98
4.2 洛必达法则	99
4.2.1 洛必达定理	99
4.2.2 其他类型的未定式	100
4.3 泰勒公式	101
4.4 函数的单调性、曲线的凹凸性与极值	103
4.4.1 函数的单调性	104
4.4.2 曲线的凹凸性	105
4.4.3 函数极值与最值	107
4.5 导数在经济学中的应用	110
4.5.1 利润最大化	110
4.5.2 成本最小化	112
4.6 函数图形的描绘	113
本章小结	116
习题四	118
阅读材料	121

第5章 不定积分

5.1 不定积分的概念和性质	125
5.1.1 原函数的概念	125
5.1.2 不定积分的概念	125
5.1.3 基本积分表	126
5.1.4 不定积分的线性性质	128
5.2 换元积分法	129
5.2.1 第一换元法(或凑微分法)	129
5.2.2 第二类换元法	131
5.3 分部积分法	134
5.4 有理函数的积分	136
本章小结	138
习题五	140
阅读材料	143

第6章 定积分及其应用

6.1 定积分的概念与性质	149
6.1.1 引例	149
6.1.2 定积分的概念	150
6.1.3 定积分的性质	152
6.2 微积分基本公式	153
6.2.1 积分上限函数及其导数	154
6.2.2 微积分基本公式	155
6.3 定积分的计算方法	157
6.3.1 定积分的换元法	157
6.3.2 定积分的分部积分法	159
6.4 反常积分	161
6.4.1 无穷限的反常积分	161
6.4.2 无界函数的反常积分	162
6.5 定积分的应用	164
6.5.1 定积分的微元法	164
6.5.2 平面图形的面积	165
6.5.3 已知截面面积的立体的体积	168
6.5.4 旋转体的体积	169

6.5.5 平面曲线的弧长	170
6.5.6 定积分在经济学上的应用	171
本章小结	173
习题六	176
阅读材料	183

附 录

附录 A 常用数学公式	187
附录 B 常用数学符号	188
附录 C 几种常用的曲线及其方程	189

第 1 章

函 数

函数是高等数学的主要研究对象,也是现代数学的基本概念之一.在初等数学中已经学习过函数的相关知识,本章将对函数的概念进行系统复习和必要补充,并介绍常用经济函数,为今后的专业学习奠定必要的基础.

1.1 函数的概念

1.1.1 集合及其运算

自从德国数学家康托(Georg Cantor, 1845—1918)于19世纪末创立了集合论以来,集合论已渗透到数学的各个分支及工程技术领域,成为现代数学的基石和语言,有着非常广泛的应用.一般地,具有某种确定性质的对象的总体称为集合(简称集).组成集合的各个对象称为该集合的元素.例如,某大学一年级学生的全体组成一个集合,其中该大学的每个一年级学生为该集合的元素;全体自然数组成一个集合(称为自然数集)等.

通常用大写的英文字母(又称拉丁字母) $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合的元素.用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素,读作 a 属于 A ,用 $a \notin A$ 表示 a 不是集合 A 的元素,读作 a 不属于 A .若集合的元素为有限个,则称为有限集,否则称之为无限集;不含任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.

集合的表示方法主要有两种:列举法和描述法.列举法是将集合的元素一一列出的方法.例如, $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ 等.描述法是指明组成集合的元素所具有的性质,并将具有某种确定性质的元素 x 所组成的集合 A 记作:

$$A = \{x | x \text{ 具有某种确定性性质}\}$$

例如, $N = \{n | n = 0, 1, 2, \dots\}$; $\mathbf{R} = \{x | x \text{ 为实数}\}$.又如,方程 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 的根组成的集合可记为 $S = \{x | x^2 + 3x + 2 = 0\}$,而集合 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1, x, y \text{ 为实数}\}$ 表示 Oxy 平面单位圆周上点的集合.

习惯上,用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集,用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集,用 $\mathbf{R}$ 表示实数集.

集合之间的关系主要有子集与相等.

子集:设 A, B 是两个集合,若 A 的每个元素都是 B 的元素,即若 $a \in A$,且 $a \in B$,则称 A 是 B 的子集,记作 $A \subseteq B$,读作 A 包含于 B (或 B 包含 A);若 $A \subseteq B$,且存在元素 $a \in B$,但 $a \notin A$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A \subset B$.例如 $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{Z}$ 的真子集.注:约定空集是任何集合的子集,即对于任何集合 A ,有 $\emptyset \subseteq A$.

集合相等:若 $A \subseteq B$,且 $B \subseteq A$,则称集合 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

集合的运算,就是以给定的集合为对象,按照确定的规律得到另外一些集合.主要的运算有并集、交集和差集.

并集:由属于 A 或属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,即

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

交集:由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$,即

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

注:并集与交集可推广至任意有限个集合的情形.

差集:由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集,记作 $A-B$ (或 $A \setminus B$),即

$$A-B = \{x | x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

两个集合的并集、交集、差集的文氏图为图 1-1 所示阴影部分.

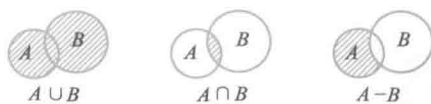


图 1-1

在一定范围内,如果所有集合均为某一集合的子集,则称该集合为全集,记作 E . E 与 E 中的任何集合 A 的差集 $E \setminus A$ 简称为 A 的补集 (或余集),记作 $\bar{A}$ (或 A^c).

集合的运算满足以下运算律:

(1) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$; (交换律)

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; (结合律)

(3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$; (分配律)

(4) $A \cup A = A, A \cap A = A$; (幂等律)

(5) $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$; (吸收律)

(6) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. (德·摩根律)

1.1.2 区间与邻域

设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a < b$, 数集

$$(a, b) = \{x | a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为开区间. 数集

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为闭区间. 数集

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为左闭右开区间; 数集

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为左开右闭区间. a, b 分别称为区间的左端点和右端点, 它们都是有限区间, $b - a$ 称为区间长度. 此外还有无限区间:

$$(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty, x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R};$$

$$(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b, x \in \mathbf{R}\};$$

$$(a, +\infty) = \{x | a < x < +\infty, x \in \mathbf{R}\}$$

等等. 这里“ $-\infty$ ”与“ $+\infty$ ”分别表示“负无穷大”与“正无穷大”.

设 $x_0 \in \mathbf{R}, \delta > 0$, 记 $U(x_0, \delta) = \{x | |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$, 称为点 x_0 的 δ 邻域, x_0 称为邻域中心, δ 称为邻域半径. 易知 $U(x_0, \delta) = (x - x_0, x + x_0)$.

$\overset{\circ}{U}(x_0, \delta) = \{x | 0 < |x - x_0| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$, 不含点 x_0 的称为点 x_0 的去心 δ 邻域. 如图 1-2 所示.

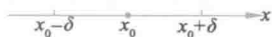


图 1-2

注:在不关心邻域半径 δ 的具体值时,常省略 δ , 邻域简记为 $U(x_0)$.

1.1.3 函数概念

函数是描述变量之间相互关系的一种数学模型.

定义 1-1 设 x, y 是两个变量, D 为非空实数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 按照一定的法则 f , 都有唯一的 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的一元函数, 或称 y 是 x 的一元函数, 记作 $y=f(x)$. D 称为函数 f 的定义域, 记作 D_f , x 称为自变量, y 为因变量. 对于 $x \in D$, 称其对应的值 y 为函数 f 在点 x 的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y=f(x)$. 通常, 称因变量与自变量的这种相依关系为函数关系. 所有函数值的全体组成的集合称为 f 的值域, 记作 R_f (或 $f(D)$), 即 $R_f = \{f(x) | x \in D\}$.

注 1: 定义表明了函数模型的结构. 定义域和对应法则是函数的两要素. 如果两个函数 f 和 g 的定义域和对应法则都相同, 那么这两个函数相同 (也称相等). 函数这一模型如同一部机器, 把 D 中的任一原材料 x 输入 $f(x)$ 中, 便能产出实数 $y=f(x) \in R_f$.

注 2: 确定函数的定义域分为两种情形: 一种是所谓的自然定义域, 即使该函数解析式有意义的自变量的全体; 一种是实际定义域, 即函数是实际问题的描述, 则使实际问题有意义的自变量全体.

函数的表示法一般有三种: 表格法、图像法和解析法 (也称公式法). 这三种方法各有优点, 表格法一目了然; 图像法形象直观; 解析法便于运算和推导.

在平面直角坐标系中, 点集 $\{(x, y) | y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图像. 通常, 函数 $y=f(x)$ 的图像是一条曲线, $y=f(x)$ 也称为这条曲线的方程, 如图 1-3 所示.

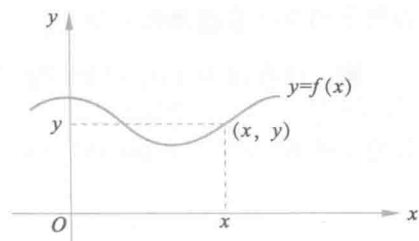


图 1-3

现列举一些函数的具体例子.

例 1-1 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

定义域 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f = [0, +\infty)$, 其图像如图 1-4 所示.

例 1-1 所表示的函数在其定义域的不同子集上要用不同的表达式来表示对应法则, 这种函数称为分段函数.

例 1-2 取整函数

$$y=[x]$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 其图像如图 1-5 所示.

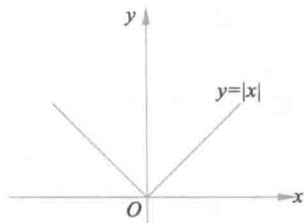


图 1-4

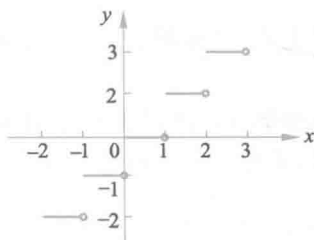


图 1-5

例 1-3 统计学上将饮食消费占日常支出的比例称为恩格尔系数. 它反映一个国家或地区富裕的程度(或生活水平), 是国际通用的一项重要指标.

联合国根据恩格尔系数来划分一个国家国民的富裕程度: 恩格尔系数 $< 20\%$ 为绝对富裕; $20\% \leq$ 恩格尔系数 $< 40\%$ 为比较富裕; $40\% \leq$ 恩格尔系数 $< 50\%$ 为小康水平; $50\% \leq$ 恩格尔系数 $< 60\%$ 为温饱水平; 恩格尔系数 $\geq 60\%$ 为贫困. 其图像如图 1-6 所示.

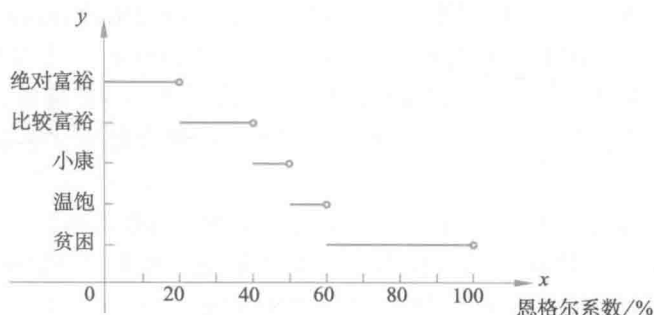


图 1-6

例 1-4 某企业生产某产品, 年产量为 a 件, 分若干批生产. 设每批生产准备费用为 b 元, 平均库存量为批量的一半, 每年每件产品的库存费为 c 元. 试求一年中库存费与生产准备费之和与批量的函数关系.

解 设批量为 x , 库存费与生产准备费之和为 $f(x)$, 则由题意知每年生产批数为 $\frac{a}{x}$, 设其为正整数, 于是生产准备费为 $b \cdot \frac{a}{x}$, 由于库存量为 $\frac{x}{2}$, 所以库存费为 $c \cdot \frac{x}{2}$. 故

$$f(x) = b \cdot \frac{a}{x} + c \cdot \frac{x}{2} = \frac{a \cdot b}{x} + \frac{c}{2}x \quad x \in (0, a] \text{ 且为正整数.}$$

例 1-4 表明, 函数也是解决实际问题的一种数学模型; 数学在各方面的应用是数学的生命, 是数学发展最重要的动力; 数学建模是联系数学与应用的必要途径和关键环节. 通过建模的方法去分析问题、解决问题是能力培养和锻炼的过程, 应予以高度重视.

1.2 函数的几种基本性质

► 1.2.1 有界性

定义 1-2 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义, 如果存在整数 M , 使得

$$|f(x)| \leq M \quad x \in D,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界, 也称 $y=f(x)$ 是 D 上的有界函数; 否则, 称 $y=f(x)$ 在 D 上无界, 或称 $y=f(x)$ 是 D 上的无界函数.

例如, $y=\sin x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数; $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上无界的, 在 $[1, +\infty)$ 上是有界的.

► 1.2.2 单调性

定义 1-3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加; 如果对于任意的 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调减少. 单调增加和单调减少的函数统称单调函数.

例如, $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加, 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上单调减少; $y=e^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加.

► 1.2.3 奇偶性

定义 1-4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$), 如果对于任意的 $x \in D$, 都有

- (1) $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数;
- (2) $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例如, $y=x^2, y=\cos x$ 都是偶函数; $y=x^3, y=\sin x, y=\tan x$ 都是奇函数; $y=c (c \neq 0)$ 是偶函数; $y=x^2+x$ 既不是偶函数, 也不是奇函数(称为非奇非偶函数).

注: 偶函数的图像关于 y 轴对称, 如图 1-7(a) 所示; 奇函数的图像关于原点对称. 如图 1-7(b) 所示.

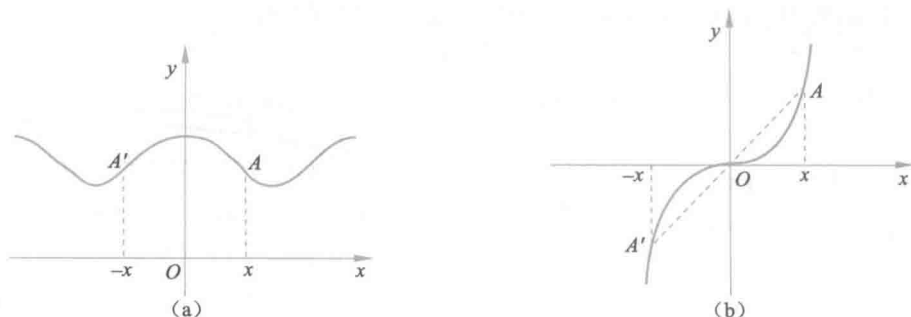


图 1-7

► 1.2.4 周期性

定义 1-5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在常数 $T \neq 0$, 使得对于任意 $x \in D$ 有 $x \pm T \in D$, 并且 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期通常是指最小正周期.

例如, 函数 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图像在每个长度为 T 的区间上有相同的形状, 如图 1-8 所示.

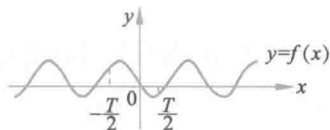


图 1-8