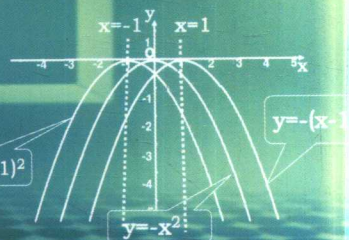




“十三五”江苏省高等学校重点教材

mathematics



数学教学论导引

SHUXUE JIAOXUELUN DAOYIN

第二版

● 刘耀斌 编著



南京大学出版社



“十三五”江苏省高等学校重点教材

编号: 2016-1-127

Mathematics 数学教学论导引

SHUXUE JIAOXUELUN DAORYIN

第二版

● 刘耀斌 编著



南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学教学论导引 / 刘耀斌编著. —2 版. —南京:
南京大学出版社, 2018.11

ISBN 978-7-305-21211-6

I. ①数… II. ①刘… III. ①中学数学课—教学研究
IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 260058 号

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号

邮 编 210093

出 版 人 金鑫荣

书 名 数学教学论导引

编 著 刘耀斌

责任编辑 贾 辉 吴 汀

编辑热线 025-83686531

照 排 南京紫藤制版印务中心

印 刷 南京人民印刷厂有限责任公司

开 本 787×960 1/16 印张 13.75 字数 256 千

版 次 2018 年 11 月第 2 版 2018 年 11 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-305-21211-6

定 价 35.00 元

网 址 <http://www.njupco.com>

官方微博 <http://weibo.com/njupco>

官方微信 njupress

销售咨询 (025)83594756

* 版权所有, 侵权必究

* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

第二版前言

《数学教学论导引》(第一版)是在新一轮基础教育课程改革背景下和实际教学需要情况下编写的。出版后,教育部于2011年12月颁布了《义务教育数学课程标准(2011年版)》,是对2001年公布并付诸实施的《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》的修订,新修订的《义务教育数学课程标准(2011年版)》在体例与结构、前言、课程目标、内容标准、实施建议等方面都有大的修改。突出对学生创新意识的培养,提出“四基、四能”等目标,给出数学十个核心概念。在注重直接经验、自主探究的同时,也关注间接经验、教师的作用,同时关注直观与抽象的统整,演绎与归纳的结合。《数学教学论导引》修订后将体现新修订的《义务教育数学课程标准(2011年版)》的精神,并注意与《普通高中数学课程标准(2017版)》呼应,重视渗透数学核心素养培养的理念。另外,教育部从2015级师范生起,施行教师资格证统一考试,《数学教学论导引》(修订)将保持与教育部教师资格证统一考试大纲要求的一致性。《数学教学论导引》(修订)进一步渗透数学教学首先是数学的理念,强调数学教学一方面要把握数学本质,另一方面要接受教育理论的指导。

《数学教学论导引》(第一版)出版已有近六年的时间,基础教育研究成果层出不穷,修订时尽量吸收与教材主题相关的内容,同时纳入编者本人近年来教学科研新思考。

《数学教学论导引》(修订)在每章后配备适量思考题,既是对本章重点内容的总结,也是促进师范生消化思考、技能训练的一个途径。

再次重申,书中引用了许多研究者的研究成果,其中能确切指出材料和观点的,均以适当方式说明,有些材料系辗转引用,受条件所限一时无法深入考证与查实。在此,对书中所引用材料的作者再次致以最深深的谢意。

感谢戴风明教授的进一步指导,感谢王双副教授(博士)参与修订工作。

编者

目 录

认识“数学教学论”	1
第一章 数学教学的价值	12
第一节 数学的价值	12
一、数学的研究对象	12
二、数学的特征	16
三、数学的地位及贡献	21
四、数学的价值	34
第二节 数学教育的功能	35
第二章 数学课程概述与新课标简介	38
第一节 课程和数学课程的含义	38
第二节 影响中学数学课程设置的因素分析	40
一、社会因素	40
二、数学因素	42
三、学生因素	43
四、教师因素	44
五、教育理论因素	45
六、课程的历史因素	45
第三节 国际数学课程改革回顾	45
一、克莱茵-贝利运动	45
二、新数学运动	46
三、“回到基础”和“大众数学”	49
第四节 我国数学新课程介绍	52
一、新课程标准的背景	52
二、《全日制九年义务教育数学课程标准(实验稿)》简介	53

三、课程改革的争鸣	55
四、《义务教育数学课程标准(2011 年版)》简介	58
第三章 数学教学基本知识	67
第一节 数学教学过程	67
一、数学教学过程中的基本要素	67
二、数学教学过程的动态结构	68
第二节 数学教学及其本质	69
第三节 数学教学模式	74
一、数学教学模式的含义	74
二、常见的数学教学模式	75
第四节 数学教学方法	81
一、教学方法的启发式原则	81
二、常用的数学教学方法	82
第四章 数学学习的基本知识	87
第一节 数学教育与数学学习	87
第二节 数学学习的特点和类型	88
一、学生的学习活动	88
二、数学学习的特点	89
三、数学学习的类型	90
四、数学学习的四个阶段	92
第三节 数学学习的“建构学说”	94
第四节 数学学习的“再创造”理论	97
一、什么是“再创造”	97
二、有指导的“再创造”	98
三、怎样指导“再创造”	99
第五章 数学教学原则	102
第一节 教学原则的一般概念	102
第二节 数学教学原则及其选择	103
一、数学教学的基本原则	103
二、数学教学的特殊原则	107

三、数学教学原则的选择	131
第六章 数学教学的基本工作	133
第一节 备课与说课	133
一、教材分析	133
二、了解学生	136
三、编写教案	138
第二节 说课	149
一、说课的类型	150
二、说课应注意的问题	152
第三节 微课	152
第四节 数学教学艺术的追求	153
第七章 中学数学中的逻辑问题	160
第一节 逻辑规律	160
一、同一律	161
二、矛盾律	161
三、排中律	162
四、充足理由律	162
第二节 概念	163
一、概念的概述	163
二、概念的分类	165
三、概念的定义	166
四、概念的系统	168
第三节 判断	169
一、数学命题	169
二、命题的结构	169
三、命题的变化	170
四、等价命题	171
五、命题的复杂性	172
第四节 推理和论证	173
一、推理	173
二、论证	174

第八章 数学教学质量的测量与评价	181
第一节 数学教学测量与评价概述	181
一、教学测评的功能	182
二、教学评价的分类	183
三、教学测评的特征	185
第二节 数学学习质量的测评	186
一、数学试题的题型和编制	186
二、数学试卷的编制	188
三、学生学习评价的改革趋势	189
第三节 数学课堂教学质量评价	191
一、数学课堂教学质量评价的教师因素分析	191
二、数学课堂教学质量评价方案	192
三、听课和评课	193
第九章 数学教师的进修与科研	198
第一节 中学数学教师的基本素质	198
一、道德素质	198
二、文化素质	199
三、能力素质	201
四、身心素质	201
五、教师的风度仪表	202
第二节 数学教师的进修	202
一、数学教师进修与提高的必要性	202
二、数学教师进修与提高的途径	203
三、数学教师进修的内容	203
第三节 数学教师的科研	204
一、选题	205
二、写作	208
参考文献	212

认识“数学教学论”

数学是一门给人以智慧的科学,数学教学是一种充满魅力的艺术。伟大的德国数学家希尔伯特的学生外尔曾经这样评价希尔伯特,“希尔伯特这位吹笛人所吹的甜蜜的芦笛声,诱惑着许多老鼠投入数学的深河”。希尔伯特讲课的内容“不仅是数学,还有希尔伯特对科学的信念以及对理性和科学的热爱”。这样的境界多么令人憧憬!

随着人类教育现象的出现,逐步就有了学校教育,自然就会出现教学方法的问题。开始时,教学方法并没有形成独立的科学体系,人们只是摸索、积累自己的经验和零散地学习别人的有关经验。如孔子的教育思想就属此类。师范教育出现后,为了有效地提高教授水平,逐步出现了“教授法”、“教学法”、“教材教法”。以我国来说,1904年清政府在《奏定优级师范学堂章程》中明确规定了师范生在校期间必须学习“教育学”,其中包括各科“教授法”,1917年以后,将“教授法”改称为“教学法”。1939年国民政府教育部颁布的《师范学院分系必修及选修科目表施行要点》又把这个学科的名称定为“分科教材及教法研究”。这期间,我国高等师范院校里就出现了“数学教材教法”的课程。新中国成立后,中央人民政府教育部在1950年颁布的《北京师范大学暂行规程》中明确规定了中学教材教法为公共必修课程。1957年,教育部在修订教材教法课的内容时,规定这门课程的内容为:了解中小学教材内容和编写原则,熟悉基本的教学方法,对使用教材过程的经验和问题进行研究。此后,我国各地师范院校大专科的数学专业就设立了“中学数学教法”或“中学数学教材教法”等课程。

“文革”期间,学科教材教法受到了冲击。“文革”后,特别是进入20世纪80年代以来,我国在学科教学的改革上取得了显著的成绩,积累了许多有益的经验,还十分注意吸收外国的先进经验。国家教育领导部门也十分重视学科教育学的发展,原国家教委副主任柳斌同志在1988年就说过,“我们不但要建立自己的教育学,还要建立自己的学科教育学,这方面的工作是大量的,有广阔的天地,大有可为。如果要讲学术性,我们师范教育的学术性的特色就在这里……”

随着社会的进步,科学技术的发展,特别是出现了社会数学化的趋势,从幼儿教育到高等教育,从学校教育到社会教育,数学教育都占有相当重要的地位,

并已经成为整个教育的一个重要组成部分。过去的数学教学法或教材教法已经不能充分地承担数学教育的重担,因而提出了创建数学教育学的问题。这是社会发展和科学进步的必然。

自1982年我国数学教育界提出创建具有中国特色的数学教育学以来,广大数学教育工作者在数学教学理论和实践等方面进行了深入细致的研究,并取得了丰硕的成果。目前,我国对数学教育学的研究日臻成熟,已进入了理论建构的新阶段,呈现出一派欣欣向荣的景象。

随着现代教学论和数学学科的发展,以及数学教育学理论的建立,师范院校曾经开设的数学教材教法课程,已逐步演变为数学教育学。传统的教材教法课注重教学经验的总结与归纳,注重教学技能的传授与获取,而数学教育学则是一门研究数学教育现象,揭示数学教育规律的学科,是建立在数学和教育学的基础上,并综合运用心理学、认知科学、逻辑学等成果于数学教育实践而形成的一门文理渗透型的交叉学科,是教育科学的重要组成部分。数学教学论又是数学教育学的一个分支,它旨在研究传授数学知识的一般规律,并为指导和改进数学教学实践提供科学的理论依据。

数学科学、教育科学、认知科学、心理科学所取得的重大成就和进展,为数学教学论的教学提供了新的理论基础和新的方法论,广大数学教师多年积累的教学经验为数学教学论研究提供了丰富的素材。因此,在教学中,要力求做到精益求精、求新务实,尽量反映我国数学教学多年来的成功经验,反映现代教学理论研究的新成果,以及国际数学教育中涌现的新思想、新观点和新方法。

那么,师范生为什么要学习和研究“数学教学论”?根据以往数学教学法课程教学的经验,师范生往往不够重视,存在“一听就懂,一看就会,一做就难”的现象。这里有必要首先和同学们说一说学习必要性的问题。一个合格的师范生乃至将来成为优秀的中学数学教师,必须至少具备三个条件:①具有坚实的数学理论基础,能在高观点下研究和处理中学数学问题。②掌握基本的数学教育理论,能在正确的数学教育理论指导下,进行数学教学研究与实践。③形成娴熟的数学教学技能,能将板书、语言、多媒体、教具等有机结合起来,提高课堂教学效率。

师范生在校期间必须掌握必备的数学专业知识、基本的数学教育理论和规律,学会备课、上课、辅导和批改作业等教学基本功,了解中学数学教改形势,把握最新数学教改动态等。有人说中学数学内容我了如指掌,又学了那么多的高等数学,教初中、高中数学还不是易如反掌,学不学教学法无所谓;甚至还能列举一些没有经过师范教育培训而成为优秀教师的例子。这种想

法是否正确,一个合格的师范生乃至将来成为优秀的中学数学教师,必须至少具备哪些条件,探讨以下几个实际问题后,大家可以自己去寻找答案。

问题1 算术与代数的区别与联系。

我们所面对的“代数”课本,不是简单知识的罗列,它是千年当中若干代数学家辛勤探索的知识宝库,它是活泼、生动、不断发展的数学思想的辉煌展示。曾经在中学数学教师培训班上和老师们讨论这个问题:小学里的方程与初中里的方程有什么区别与联系?几乎所有老师不能全面而准确地回答。这个问题看似简单,其实很重要,不能理解这个问题,就不能处理好小学数学和初中数学教学衔接问题,就不能很好地完成各自的教学目标,小学里容易造成“拔苗助长”,中学里容易造成“囫囵吞枣”。事实上,这个问题实质是在问算术与代数的区别与联系问题?事实上就是要回答:

(1) 算术与代数的根本区别在哪里?

(2) 字母代数思想有什么优越性?

众所周知,用字母表示数是代数学的基本思想。算术与代数是数学中最基础、最古老的两个分支学科,算术是代数的基础,代数则是由算术演进而来的,正是由于字母代数这种数学思想的产生,促进了算术向代数的演进。由字母代替数字,或由“数字符号化”而产生了“代数”这个数学分支学科,但人类从“算术”走向“代数”却历经千年(现在中学却在几年的时间就学习了初等代数的全部内容),代数的产生是“数学中真正的进展”,“代数”的确是“更有力的工具和更简单的方法”。因此,我们所面对的“代数”课本,不是简单的知识罗列,它是千年来一代又一代数学家辛勤探索的知识结晶,它是活泼、生动、不断发展的数学思想的辉煌展示。

这个问题的根本区别就在于算术把未知数排斥在运算之外,而代数则允许未知数作为运算对象参与运算。如果说算术也论及未知数的话,那么这个未知数只能单独地处在等式的左边,所有已知数在等式右边进行运算,未知数没有参与运算的权利。因此,算术方法有很大的局限性,对于那些大量的具有复杂数量关系的实际问题,运用算术方法往往需要很强的技巧,列算式也不那么容易。而对于那些含有多个未知数的实际问题,要利用算术方法解决实际问题常常是不可行的。

在代数中,方程作为由已知数与未知数构成的条件等式,本身就意味着未知数与已知数有着同等的地位,未知数不仅成为运算的对象,而且可以依照法则从等式一边移到另一边。解方程的过程,实际上是通过已知数与未知数的重新组合,把未知数转化为已知数的过程,即把未知数置于等式的一边,把已知数

置于等式的另一边,从这种意义上看,算术运算是代数运算的特殊情况,代数运算是算术运算的发展和推广。

由于引入了字母代数思想,代数运算较之算术运算有了更大的普遍性和灵活性,极大地扩展了数学的应用范围。许多用算术无法解决的问题,用代数方法却能轻而易举地解决。

不仅如此,字母代数的思想的出现对整个数学的发展也产生了巨大而深远的影响,数学中的许多重大发现都与字母代数思想有关。如解一元二次方程的根的问题导致了虚数的发现,对五次以上方程的求解导致了群论的诞生。正因为如此,人们把字母代数思想的诞生作为数学思想方法发生重大转折的重要标志。

一般说来,字母代数思想有巨大的优越性:

- (1) 用字母表示数能够简明地表示事物的本质特征和规律。
- (2) 用字母表示数具有辩证性。字母表示数既具有任意性,可代表任一个数;同时字母表示数又具有确定性,可表示一个确定的具体的数。

就数学教学而言,“由算术到代数的过渡”是中学数学教学的重大难关之一,教学中不仅要教课本上列举出来的知识,更要教渗透在其中的数学思想方法,使学生深刻领会字母代数思想,灵活运用字母代数的方法。否则,学生始终会对 $|a| = \pm a$ 模糊不清,也不能接受 $S = ab$ 是运算结果。

以上问题的讨论充分说明,我们只有基础扎实,才能深刻理解与吃透教材,才能居高临下,把握数学的本质。

问题2 关于逆运算。

关于有理数的四则运算之间的关系,有一学习资料中是这样表述的,“加法与减法互为逆运算,乘法与除法互为逆运算。”而另一教材中是这样表述的,“小学学过的方法是根据加减法互为逆运算、乘除法互为逆运算的关系来解的。”但普及义务教育以前的初中课本《代数》第一册中只写了“有理数减法是有关有理数加法的逆运算,有理数除法是有关有理数乘法的逆运算”。

究竟什么叫做逆运算?为什么减法是加法的逆运算,除法是乘法逆运算?课本为什么不写“加法是减法的逆运算”、“乘法是除法的逆运算”?

为了回答这些问题,必须弄清数的“运算”和“逆运算”的数学定义。

数的运算,通常总是在给定的数集上定义的。

定义 I 设 A 是一个给定的数集,而 $*$ 是一个给定的法则,如果根据法则 $*$,对于从集 A 中按顺序取出来的任何两个数 a 与 b ,都能得到集 A 中的一个数 c ,即有 $a * b = c$,那么法则 $*$ 就叫做集 A 的一种运算。

显然,按照数的“运算”的定义,普通的加法“+”和减法“-”,都是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一种运算;普通的乘法“ $\times$ ”和除法“ $\div$ ”,都是非零有理数集 $\mathbb{Q}'$ (即由一切不为零的有理数所组成的集合)的一种运算。

那么,什么叫做逆运算呢?

定义II 设 $*$ 是数集 A 的一种运算,如果对于从集 A 中按顺序取出来的任何两个数 a 与 c ,在集 A 中总存在这样一个数 x ,它能同时满足

$$x * a = c \quad (1)$$

$$\text{和 } a * x = c \quad (2)$$

并且,这个数 x 可以根据集 A 的另一种运算 $\odot$ 由 c 与 a 得到,即有

$$c \odot a = x \quad (3)$$

那么,运算 $\odot$ 就叫做运算 $*$ 的逆运算。

特别的,如果由(3)可以得到满足(1)的数 x ,那么运算 $\odot$ 就叫做运算 $*$ 的右逆运算;如果由(3)可以得到满足(2)的数 x ,那么运算 $\odot$ 就叫做运算 $*$ 的左逆运算。

现在我们来分析有理数的四则运算之间的关系。

如前所述,加法“+”是有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一种运算。对于从集 $\mathbb{Q}$ 中按顺序取出来的任何两个数 a 与 c ,在集 $\mathbb{Q}$ 中显然存在这样一个数 x ,它能同时满足

$$x + a = c \text{ 和 } a + x = c$$

并且,这个数 x 可以根据集 $\mathbb{Q}$ 的另一种运算——减法“-”由 c 与 a 得到,即有

$$c - a = x$$

因此,根据上述“逆运算”的定义,减法“-”是加法“+”的逆运算。

但是,不能说“加法是减法的逆运算”,这是因为,对于从集 $\mathbb{Q}$ 中按顺序取出来的任何两个数 a 与 c ,在集 $\mathbb{Q}$ 中一般不存在这样一个数 x ,它能同时满足

$$x - a = c \quad (1')$$

$$\text{和 } a - x = c \quad (2')$$

例如,不存在这样的有理数 x ,它能同时满足

$$x - 1 = 3 \text{ 和 } 1 - x = 3.$$

因此,根据上述“逆运算”的定义,减法“-”没有逆运算,当然就不能说“加法是减法的逆运算”了。

不过,在集 $\mathbb{Q}$ 中只满足(1')的数 x 是存在的,并且这个数 x 可以根据加法“+”由 c 与 a 得到,即有 $c + a = x$,因此我们可以说“加法是减法的右逆运算”。在集 $\mathbb{Q}$ 中,只满足(2')的数 x 也是存在的,但这个数 x 不能根据加法“+”由 c

与 a 得到, 即 $c+a \neq x$, 因此我们不能说“加法是减法的左逆运算”。

再看乘法“ $\times$ ”, 它是非零有理数集 $\mathbb{Q}'$ 的一种运算。对于从集 $\mathbb{Q}'$ 中按顺序取出来的任何两个数 a 与 c , 在集 $\mathbb{Q}'$ 中显然存在这样一个数 x , 它能同时满足

$$x \times a = c \text{ 和 } a \times x = c$$

并且, 这个数 x 可以根据集 $\mathbb{Q}'$ 的另一种运算——除法“ $\div$ ”由 c 与 a 得到, 即有

$$c \div a = x$$

因此, 根据上述“逆运算”的定义, 除法“ $\div$ ”是乘法“ $\times$ ”的逆运算。

但是同样的, 不能说“乘法是除法的逆运算”。这是因为: 对于从集 $\mathbb{Q}'$ 中按顺序取出来的任何两个数 a 与 c , 在集 $\mathbb{Q}'$ 中一般不存在这样一个数 x , 它能同时满足

$$x \div a = c \tag{1''}$$

$$\text{和 } a \div x = c \tag{2''}$$

例如, 不存在这样的有理数 x , 它能同时满足

$$x \div 2 = 3 \text{ 和 } 2 \div x = 3$$

因此, 根据上述“逆运算”的定义, 除法“ $\div$ ”没有逆运算, 当然就不能说“乘法是除法的逆运算”了。

不过, 在集 $\mathbb{Q}'$ 中, 只满足(1'')的数 x 是存在的, 并且这个数 x 可以根据乘法“ $\times$ ”由 c 与 a 得到, 即有 $c \times a = x$, 因此我们可以说“乘法是除法的右逆运算”。在集 $\mathbb{Q}'$ 中, 只满足(2'')的数 x 也是存在的, 但这个数 x 不能根据乘法“ $\times$ ”由 c 与 a 得到, 即 $c \times a \neq x$, 因此我们不能说“乘法是除法的左逆运算”。

由以上分析可知, 九年制义务教育教材《代数·第一册》(上)和《初中代数疑难解析》关于数的逆运算的表述是不恰当的, 对此教师必须有判别力。

问题3 为什么要把“0”作为自然数?

数“0”目前已经明确地作为一个自然数。为什么? 有很多的解释, 大部分的解释是把这看作一个“规定”, 就是说可以把“0, 1, 2, ..., n, ...”作为自然数, 也可以把“1, 2, ..., n, ...”作为自然数。显然, 这样的“解释”对数学教师来说是不够的, 在这儿谈谈我们的理解, 供同学们参考。

首先, 应该从自然数的功能说起, 自然数是人类最早用来描述周围世界“数量关系”的概念, 几乎从一开始就具有三个基本功能: 一是帮助人类刻画某一类“东西”的多少, 用现代的数学语言来说就是描述一个有限集合的基数(性质)。二是刻画一类“事物”的顺序, “第一”, “第二”, “……”, 用现代的数学语言来说, 就是描述一个有限集合中元素的“顺序”性质。这就是说, 自然数既具有用来描述

集合(有限)元素多少的基数性质,又具有描述集合元素顺序的序数性质。或者可以进一步说,自然数既是基数,又是序数。三是“运算功能”。自然数可以做加法运算和乘法运算。在此基础上,随着对运算的深入研究使得我们一步一步地建立起了有理数、实数和它们的运算。

我们知道“空集”是集合中一种最主要、最基本的集合,也是我们在描述周围现象中经常用到的集合,在数学研究中更是如此。例如,所有不能表示为两个素数之和的偶数集合是空集吗?这就是著名的哥德巴赫猜想。一般地说,集合常常被分为有限集合和无限集合两类。有限集合是含有有限元素的集合,像学校中人的集合、学校中男生的集合、学校中女生的集合、学校中老师的集合和学生的集合、某个一元二次方程解的集合等都是有限集合;无限集合是含有的元素不是有限的集合,像自然数集合、有理数集合、实数集合、复数集合等都是无限集合。把“空集”作为一个有限集是很自然的,并且我们很容易理解应该用“0”来描述“空集”中含有元素的多少。

有了前面这些说明,我们就容易理解这样一个事实:如果把“0”作为一个自然数,那么“所有自然数”就可以完整地刻画“有限集合元素多少”的“任务”了,而没有“0”的“所有自然数”总是有“缺陷”的,因为没有自然数可以表示“空集”所含元素的多少。这样,我们从“自然数的一种基本功能”方面说明了把“0”作为自然数的好处。

我们还必须说明另一个问题:把“0”作为自然数,是否会影响自然数的“序数功能”和“运算功能”?回答是否定的。不仅不会,而且还会使“自然数”的这两个功能更加“完整”。先看原来没有“0”的自然数,我们都知道不同自然数有大小之分,8大于5,1 000大于999,按这样的大小,所有自然数构成了一个“有顺序”的集合。即若自然数 $n_1 > n_2$, $n_2 > n_3$,则自然数 $n_1 > n_3$,我们称之为“传递性”。另外,对于任何两个自然数 n_1 和 n_2 ,或者 $n_1 > n_2$,或者 $n_2 > n_1$,或者 $n_1 = n_2$,即“三歧性”,一般地说,我们把具有传递性和三歧性的集合称之为线性序集。在这里我们不想用非常规范的集合论语言叙述这些性质,这样会增加阅读上的困难,希望对这部分内容有进一步了解的读者可以选读任何一本关于“集合论”的著作,我们很容易理解有理数集、实数集都是线性序集(按照通常的顺序),即若有理数(实数) r_1 大于有理数(实数) r_2 ,而 r_2 大于有理数(实数) r_3 ,则 r_1 大于 r_3 (传递性);另外,对任意两个有理数(实数) r_1 和 r_2 ,则或 $r_1 > r_2$,或 $r_2 > r_1$,或 $r_1 = r_2$ (三歧性)。自然数在“顺序”方面的性质,除了上述性质之外,还有一种它所具有的特殊性质。在陈述这一基本性质之前,有必要说明一点,如前面所述,“自然数”具有三种基本功能,或说

三种基本性质,我们在有些时候要说明这些性质之间的联系,但有时候常常单独地讨论一种“功能”的性质,在这种情况下,要学会“排除”其他“功能”的干扰,这样才能较好地理解“一种功能”的“本质”,“自然数反映性质的性质”中最基本的性质是“自然数集合的任何一个非空的子集中,一定有最小的数”。在不包含0的自然数集合中。例如,“所有偶数的集合”中2是最小的;在“既可被5整除又可被7整除的自然数集合”中,35是最小的,并不是所有有“顺序”性质的集合都具有这种“特殊的性质”,例如:无论是有理数,还是实数,都具有“传递性”和“三歧性”,但是它们同样不具有自然数所拥有的那种特殊的性质。例如区间 $(0,1)$ 是有理数集合或实数集合中的非空子集,然而 $(0,1)$ 中没有最小的数存在。

如果把“0”加入传统的自然数集合,新的自然数集合 $\{0,1,2,\dots,n,\dots\}$ 依然会保持原自然数集合 $\{1,2,\dots,n,\dots\}$ 拥有的所有的“顺序”性质。当然也包括那种特殊的性质。

自然数的运算功能:对加法和乘法来说,把“0”加入传统的自然数集合,不仅所有的“运算法则”依旧保持,如对加法和乘法运算都是封闭的,即新自然数集合 $\{0,1,2,\dots,n,\dots\}$ 中的任何两个自然数都可以进行加法和乘法运算,而运算结果仍然是自然数,同时保持加法、乘法运算的结合性和交换性,以及乘法对加法的分配性。即 $n_1(n_2+n_3)=n_1n_2+n_1n_3$,不仅如此,特别对加法运算来说,有了“0”这个特殊的数,加法运算才变得更完整,用一句群论的语言来说,新的自然数在加法运算下,成了有零元的加法交换半群了。

既然“0”加盟到自然数集合中,只有好处没有坏处,我们为什么不欢迎“0”作为自然数集合的一个成员呢?

最后,我们再补充一点“集合论”方面的常识。我们都知道:无法给集合下一个确切的数学定义。在20世纪初,一大批著名的数学家从不同的角度来弥补“无法给集合下一定严格定义”的缺陷,他们建立了“公理集合论”,并由此得到一系列影响现代数学发展的重要结果。在这里我们不可能介绍“公理集合论”的内容,但是我们可以告诉同学们,其基本的思想就是避免“悖论”。在“公理集合论”中,“空集”是第一个被给出的“具体集合”,并由“空集”出发再结合其他的一些公理构造出了所有的集合,包括自然数集合、有理数集合、实数集合、复数集合等。而在构造出的自然数集合中,“空集”就相当于“零”。

除了前面介绍的自然数三种基本功能之外,所有自然数的集合是中小學生见到的一个最重要的无限集合,没有零的自然数集合与包括零的自然数集合可以在下面的对应规则下看作是“完全一样”的: $n \rightarrow (n+1)$,在这个意义下它们是

“同构”的。

希望同学们更好地理解“0 是一个自然数”，这样做是“理所当然”的，而不仅仅是人为的“规定”，这件事可以帮助我们更好地理解自然数和它的功能。也希望同学们养成一个习惯，不仅知道和记住数学的“定义”和“规定”，还应该思考它们“后面”的数学含义。这正是我们的教学基本功。

问题 4 讨论几个教学设计问题。

课题 1 多边形外角和定理

师：请同学们仔细观察下列三幅图：

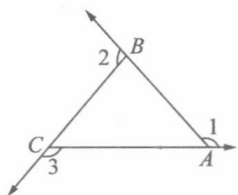


图 0-1

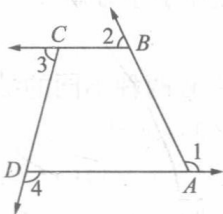


图 0-2

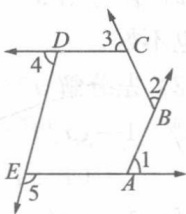


图 0-3

设三角形的外角和为 S_3 ，四边形的外角和为 S_4 ，五边形的外角和为 S_5 ，问 S_3 、 S_4 、 S_5 这三个量中哪一个量最大？

生 1： S_5 最大，角的个数多。

生 2： S_3 最大，角的个数虽少，但每个角角度比较大。

师：究竟谁最大呢？

众生：无法确定。

师：请同学们跟老师做一个实验，就图 0-1 而言，设想我们每个人面前都是一个较大的三角形，都站在 A 点，你的视线方向与 AP（图 0-4）方向一致，现在大家一起转动身体，使你的视线方向与 AB 方向一致（注意旋转了多少度），再进行第二次转动，使你的视线方向与 BC 方向一致（注意旋转了多少度），再进行第三次旋转，你的视线方向与 AP 方向一致，即回到初始状态（注意旋转了多少度）。同学们能猜出 S_3 是多少度？

众生： S_3 等于一圈， 360°

生 3：第一次转的角度就是 $\angle 1$ ，第二次转的角度就是 $\angle 4 = \angle 2$ ，第三次转的角度是 $\angle 5 = \angle 3$ ，三次加起来刚好是一圈，即

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$$

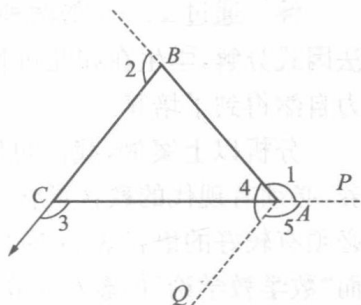


图 0-4