美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库系列丛书(第二辑)

112个组合问题：

来自AwesomeMath夏季课程

112 Combinatorial Problems：From the AwesomeMath Summer Program

[美] 弗拉德·马泰(Vlad Matei)
[美] 伊丽莎白·瑞兰德(Elizabeth Reiland) 著
余应龙 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

美国著名奥数教练蒂图·安德 … 辑)

112个组合问题：
来自AwesomeMath夏季课程

112 Combinatorial Problems：From the AwesomeMath Summer Program

[美] 弗拉德·马泰(Vlad Matei)
[美] 伊丽莎白·瑞兰德(Elizabeth Reiland) 著
余应龙 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2017－025 号

内 容 简 介

本书介绍了组合数学中一些中等水平内容的入门方法，还介绍了一些解决计数问题的特色工具以及证明技巧. 为了帮助读者解决计数问题，每一章都包括几道各种难度的例题，并附有解答. 在基本篇章之后还收录了一些入门题和提高题供学生自行处理.

本书可供初高中及参加数学竞赛的学生参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

112 个组合问题：来自 AwesomeMath 夏季课程/(美)弗拉德·马泰(Vlad Matei)，(美)伊丽莎白·瑞兰德(Elizabeth Reiland)著；余应龙译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.5

书名原文：112 Combinatorial Problems：From the AwesomeMath Summer Program

ISBN 978－7－5603－8082－7

Ⅰ.①1… Ⅱ.①弗…②伊…③余… Ⅲ.①代数方程－研究
Ⅳ.①O151.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 058060 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 陈雅君
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 13 字数 292 千字
版　　次 2019 年 5 月第 1 版 2019 年 5 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978－7－5603－8082－7
定　　价 58.00 元

美国著名奥数教练蒂图·安德雷斯库

序　言

组合数学是一个迷人的数学分支，它涉及计算各种对象和集合的个数. 尽管组合数学在高中数学教材中所占的比例不大，但计数问题经常出现在初高中的数学竞赛中，然而这并不是因为学习组合数学要以达到较高的数学水平为前提，其实对于许多计数问题，任何具有牢固的算术背景和一些基本代数知识的人都是可以接受的.

本书给学生提供一个机会，使学生去探索组合数学中的一些中等水平内容的入门途径. 本书包括一些解决计数问题的具有特色的工具以及证明技巧，更重要的是，能让学生建立起一个深厚的基础. 值得注意的是，本书的某些章节比另外一些章节更具有挑战性. 实际上，可以认为，关于不变量多于一种途径的计数，以及母函数等章节所包含的内容是相当艰深的，如果读者没能立即掌握这些概念，也不应沮丧. 虽然对于计数问题，实际上每个人都是可以接受的，但这并不意味着可以对其不屑一顾. 解决计数问题的一个最诡谲的方面是确定应该用什么工具和技巧. 为了帮助读者习惯于处理这些微妙之处，每一节都包括几道各种难度的例题，并附有解答，且指出在实际中如何应用各种不同的技巧.

在这些基本篇章之后，我们还收录了一些入门题和提高题供学生自行处理. 这些问题都是经过精心挑选的，其目的是使读者在各章中出现的解题技巧的基础上对这些问题做进一步研究. 本书的后面部分涵盖了这些问题的详细解答，学生可以用来检验自己所做的努力.

本书中出现的一些问题来源于世界各国数学竞赛题. 在此我们要对为这些竞赛做出贡献，并向我们提供如此丰富内容的诸位作者表示衷心感谢. 我们也要感谢 Titu Andreescu博士给我们机会，并鼓励我们写这本书，还要感谢 Richard Stong，Branislav Kisacanin，Walter Stromquist 三位博士，感谢他们尽力而认真的反馈，帮助我们把本书做到精益求精.

愿大家共享这些问题！

Elizabeth "Lizard" Reiland

Vlad Matei

目　录

第1章　计数的基本知识

在没有进入计数领域之前，我们首先回顾一下集合论的一些定义和记号. 因为这些定义和记号对我们学习组合数学十分重要，也是出现在所有数学文献中的通用术语，所以应该学习和熟记.

定义1　集合是由不同元素组成的总体，其各元素的排列顺序并不重要. 我们可以用列举的方法指定一个集合，例如$\{1,2,4,8,16\}$或$\{3,5,7,\cdots,19\}$. 注意，我们的定义表明，例如$\{1,2,4\}$，$\{2,4,1\}$指的都是同一个集合.

我们也可以使用构造法(也称描述法)的记号指定一个集合，在构造法集合中提出一个条件用来确定哪些元素属于这个集合，例如$\{x \mid 1<x<17, x\text{是整数}\}$. “|”可以读作“满足”，所以这个集合是：$x$是满足$1<x<17$的整数的所有值. 因此这个集合可简化为$\{2,3,\cdots,16\}$. 集合$\{(x,y) \mid x,y\text{是实数}, y=3x+4\}$是构造法集合记号的另一个例子. 注意这个集合包含无穷多个有序实数对(x,y).

空集是没有任何元素的集合. 用记号$\{\ \}$或$\varnothing$表示.

记号$x \in A$(读作x属于A，或x是A的元素)表示元素x包含于集合A内. 常用$y \notin A$(读作y不属于A，或y不是A的元素)表示元素y不包含于集合A内.

如果集合A的每一个元素都是集合B的元素(即由$x \in A$可推得$x \in B$)，那么称集合A是集合B的子集(记作$A \subseteq B$).

如果集合A和集合B恰好包含同样的一些元素，那么称集合A和集合B相等(记作$A=B$). (证明$A=B$的常用方法是证明$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，切记！)

两个集合A和B的并是由一切属于集合A或集合B的元素组成的集合(记作$A \cup B$)：$\{x \mid x \in A\text{或}x \in B\}$. 两个集合$A$和$B$的交是由一切既属于$A$又属于$B$的元素组成的集合(记作$A \cap B$)：$\{x \mid x \in A\text{且}x \in B\}$. 这些定义可以以直觉的方式推广到超过两个集合

$$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k = \{x \mid x \in S_i, \text{对某些} i, 1 \leqslant i \leqslant k\}$$

$$S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k = \{x \mid x \in S_i, \text{对一切} i, 1 \leqslant i \leqslant k\}$$

如果集合A和集合B没有共同的元素，那么称集合A和集合B不交(即$A \cap B=\varnothing$).

集合A和集合B的差集(记作$A\backslash B$)是由属于A但不属于B的元素组成的集合. 这一记号甚至可用于集合B不是集合A的子集的情况，例如$\{1,2,3\}\backslash\{3,4\}$是$\{1,2\}$.

如果有一个全集U，它包含我们考虑的一切对象，那么就可以把不属于A的元素的全体对象定义为集合A的补集(记作A^C)(即$A^C=U\backslash A$). 例如，当我们把整数集视为全集

时,奇数集就是偶数集的补集.(注意:为了使补集的概念有意义,必须有一个全集.)

集合 A 的基或大小(记作 $|A|$)是这个集合的元素的个数.

虽然这些定义也许看起来有些简单,但在集合论中的确有些奇妙的问题.比如说,我们可以取集合$\{1,2,3\}$的所有子集组成一个集合 A(或称为幂集 A).我们有

$$A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

集合 A 的元素是集合.我们可以不断地使用这个想法去构造这样的集合,它的元素是集合的集合等.另一个有趣的例子是集合 $B=\{\varnothing\}$,注意集合 B 不是空集,而是包含空集的集合.空集的大小是 0,但是我们有 $|B|=1$.

可能会有人担心,集合 A 是否能将本身作为一个元素而包含在内,即 $A\in A$.为了避免出现这种情况,我们可以对所有集合的集合加以限制,即不能包含本身,$B=\{A\mid A\notin A\}$.考虑到集合是否包含本身将会导出一个著名的罗素(Russell)悖论.这些问题都很有趣,但是与本书关系不大,因为我们关于集合的定义是十分明确的,而且通常指的是有限集.

正当我们开始进入计数这一领域时,遇到的几乎每一个问题都会出现两个十分本质的法则.一旦进行了一些计数,你将会发现自己还没有意识到就已经在使用这两个法则了.我们马上就要正式叙述这些原理,不过首先要举一个简单的例子.

例 1 假定我们在服装店里,这个服装店有 16 种不同的衬衫,9 种不同的裤子和 3 种不同的鞋.要买一件东西有多少种不同的买法?

在我们讨论这一问题的解答之前,注意例 1 描述了一个关于组合数学的一个重要事实.更有趣的是,用简单的汉语编制组合数学的问题,并且你将经常见到这种方法.但是汉语并不像数学那样是精确的语言,我们通常并不想进行一长串的否定和解释把问题弄得很精准,因为这将会使简单地使用汉语这个关键点变得糟糕.

当你正要着手处理组合数学问题时,首先要采取的步骤之一是要决定如何解释这段汉语.例如,在解例 1 时,我们将隐含地假定类别只是提及的这 3 种东西(衬衫、裤子和鞋),而且鞋是成双出售的.至于如何解释问题,数学家一般是持同意观点的,而且这就是你在审视例题中会挑出来的东西之一.如果你不明确如何解释问题的语句,也不能去问别人弄清楚,尽力求得一个合理的解释,那么你肯定会注意到你在解题中所做出的假设.

在做了这些注释以后,让我们来解例 1 吧!

解 因为一件东西或者是衬衫,或者是裤子,或者是鞋,我们只要把各种东西的种数相加,就得到 $16+9+3=28$ 种可能的方法.

例 1 中的计数问题是相当简单的,它体现出应用加法原理的一个实例,加法原理是一个能够解决许多更为复杂的问题的普遍原理.加法原理的叙述如下:

定理 1(加法原理) 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两不交的集合(即两两没有共同的元素),那么

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

这看上去就像一长串“花哨”的符号，实际上正是这一法则告诉我们，如果要计数从一组不同的且没有重叠的集合中挑出一个元素的可能的方法种数时，只需要将各个集合的大小相加. 如果集合有重叠，那么必须要小心一点. 在这一章中将对容斥原理进行讨论. 现在给出使用这一原理的一个简单的例子.

例 2　设 $X=\{1,2,\cdots,200\}$. 定义

$$S=\{(a,b,c) \mid a,b,c \in X, a<b, a<c\}$$

则 S 有多少个元素？

解　注意，我们可将 S 分割成不交的集合 A_k，这里 k 是 a 的值，$1 \leqslant k \leqslant 199$. 因为 $b>k, c>k$，所以 b 有 $200-k$ 种选择，c 也有 $200-k$ 种选择. 于是 $|A_k|=(200-k)^2$. 利用加法原理，得到 $|S|$.

例 3　如果一个服装店可以提供 16 种不同的衬衫和 9 种不同的裤子，那么买一套由一件衬衫和一条裤子组成的服装有多少种购买方法？

解　为了有助于简化计数，我们构造一张表. 表中的每一行表示衬衫，每一列表示裤子. 表中的每一格都表示由所在行中的衬衫和所在列中的裤子组成的一套服装. 因为每一格表示不同的一套服装，每一套服装都恰好出现在一个格子里，所以服装的套数就等于表中的格子数. 因为有 16 种衬衫和 9 种裤子，所以表中有 $16 \cdot 9=144$ 个格子，于是可能买的服装套数是 144.

注意，如果我们要一套由一件衬衫、一条裤子和一双鞋组成的服装，那么就要把这种想法扩展到一张三维表中. 第一个坐标表示衬衫，第二个坐标表示裤子，最后一个坐标表示鞋. 类似地，如果要做 n 种选择，那么可以想象在一个 n 维表中的计数格子. 这就给我们带来了另一个基本法则.

定理 2(乘法原理)　如果我们有 n 种要选择的情况，其中第一种选择有 X_1 种可能，第二种选择有 X_2 种可能，一直到第 n 种选择有 X_n 种可能，那么要选择的方法总数为 $X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n$.

对于大部分问题，我们既采用加法原理，也采用乘法原理得到最后的结果. 利用加法原理，我们可以把问题分解为若干种情况，其中每一种情况的计数相对比较简单(一般采用乘法原理)，请看下面的例子.

例 4　恰有一个数字是偶数的三位数有多少个？

解　这里要分三种情况：首位数字是偶数，另两位数字是奇数；中间一位数字是偶数，另两位数字是奇数；末位数字是偶数，另两位数字是奇数. 因为这三种情况不重叠，所以可以对各种情况进行计数，然后利用加法原理得到最后的结果.

我们可以设想分三个步骤构造一个三位数：选首位数字，选第二位数字，选末位数字. 在首位数字是偶数，另两位数字是奇数的情况下，首位数有 4 种选择(2,4,6,8)，因为

首位必须是偶数,而且非零(否则将不是三位数).因为第二位和第三位都是奇数,所以都有5种可能(1,3,5,7,9).于是乘法原理告诉我们,有 $4\cdot5\cdot5$ 个三位数符合这种情况.在中间一位数字是偶数,另两位数字是奇数的情况下,对于每一个数字都有5种可能:奇数数字是1,3,5,7,9,偶数数字是0,2,4,6,8.于是总的来说,这种情况共有 $5\cdot5\cdot5$ 个三位数.类似地,在末位数字是偶数,另两位数字是奇数的情况下也有 $5\cdot5\cdot5$ 个三位数.将这三种情况合在一起,利用加法原理,共有 $4\cdot5\cdot5+5\cdot5\cdot5+5\cdot5\cdot5=350$ 个恰有一个数字是偶数的三位数.

还有一个基本的且常用的技巧是补计数.假定我们关注的是确定集合 A 的大小,如果有一个有限的全集 U,根据加法原理,有 $|A|+|A^C|=|U|$,移项后得到 $|A|=|U|-|A^C|$.我们可以利用这一公式确定集合 A 的大小.特别是能够确定全集的大小与 A 的补集的大小,然后做减法.在某些情况下可以比直接计算 A 的大小容易得多.如果在问题中看到"至少"这类词的时候,补计数是经常考虑的好办法.

例5 有多少个四位数至少有一个数字是2或3?

解 首先,计算四位正整数的总数.首位数必须是1至9,所以有9种选择.其余三位数字是0至9中的一个数字,于是每一位都有10种选择.于是总数是 $9\cdot10\cdot10\cdot10=9\,000$ 个四位正整数.

下面我们计算有多少个不包含2或3的四位正整数.首位有7种选择(1,4,5,6,7,8或9),其余三位都有8种选择.这样就给出总共有 $7\cdot8^3$ 个不包含2或3的四位数.从总数中减去它,就得到 $9\,000-7\cdot8^3=5\,416$ 个至少有一个数字是2或3的四位数.

下面来看一些到目前为止已学到的技巧在解决问题时的应用.

例6 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 有多少个子集?(这个数据在以后的问题中会经常用到,所以这是一个有用的事实,要记住.)

解 考虑元素 $i(1\leqslant i\leqslant n)$.构造一个子集 S,对于 i 有两种选择:i 属于 S,或 i 不属于 S.因为这 n 个元素中的每一个都有这样的选择,所以,根据乘法原理,集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 有 2^n 个子集.

例7 集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 有多少个子集 S,使 $|S|$ 是奇数?

解 对于每一个元素 $i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 都有两种选择:属于 S 或者不属于 S.这时候,考虑 $|S|$.如果 $|S|$ 是奇数,那么 S 中不包含 n;如果 $|S|$ 是偶数(到目前为止),那么 S 必须包含 n 以满足 $|S|$ 是奇数这一条件.在这两种情况下,对于 n 都只有一种选择.根据乘法原理,这表示有 $2^{n-1}\cdot1=2^{n-1}$ 个使 $|S|$ 是奇数的子集 S.

例8 甜点师在星期日开始的一个星期中的每一天都准备了甜点.每天的甜点是蛋糕、馅饼、冰淇淋和布丁中的一种.同样的甜点在连续两天中不能出现在同一个菜单上.因为星期五有人过生日,所以必须有蛋糕.问这个星期中可能有多少种不同的菜单?

解 先从星期五开始,因为这一天必须有蛋糕,这表示星期六不能有蛋糕,所以星期

六的甜点有 3 种选择. 类似地，从星期五往前到星期四，星期四的甜点有 3 种选择(蛋糕除外). 于是星期三可以在星期四不供应的三种甜点中做任意选择，一直回到星期日都是这样. 每一天都有 3 种选择(星期五除外). 根据乘法原理，共有 $3^6=729$ 种可能的菜单.

在例 7 中利用乘法原理有点细微的区别. 乘法原理只要求在我们拥有的选择链中的每一步上与我们所决定的选择链中的那处有同样多个可能选择. 至于那些特殊的选项是什么则无关紧要. 在例 8 中虽然所允许的甜点的集合可以根据我们所做的实际选项而改变，但每一天(星期五除外) 可能的甜点数恰好总是 3.

解决本题还有另一种方法. 例如，可以从星期一开始往前算. 虽然可以这样做，但是要难得多(如果你不信，可以尝试一下). 经常有多种正确的计数方法解决计数问题，在考虑不同的处理方法时，总有好的想法出现.

例 9　将一个大立方体涂成绿色，然后切成 64 块同样大小的小立方体，有多少个小立方体至少有一个面涂成绿色?

解　我们采用补计数法. 先确定有多少块小立方体没有绿色的面. 为了不涂到绿色，小立方体必须在大立方体的内部. 对于小立方体($2\cdot2\cdot2$) 而言，大立方体($4\cdot4\cdot4$) 中有 $4\cdot2=8$ 个小立方体没有绿色的面，所以有 $64-8=56$ 个小立方体至少有一个面涂成绿色.

例 10　设 $n(n\geqslant2)$ 是正整数，n 的质因数分解式是 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是不同的质数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是正整数，问 n 有多少个正约数?

解　回忆一下，当且仅当 n 能被 x 整除时，x 是 n 的约数. 因此有这样的情况：x 的质因数分解式是 $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$，其中对每一个 i，有 $0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i$. 这就是说，$\beta_1$ 的值有 α_1+1 种选择，β_2 的值有 α_2+1 种选择，等等. 应用乘法原理，n 的正约数的总数是 $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$.

例如，考虑 $20=2^2\cdot5^1$. 根据我们的逻辑，20 应该有 $(2+1)(1+1)=6$ 个正约数，它们是 1,2,4,5,10,20.

例 11　设 n 和 k 是正整数. $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集 S_i 组成 k 元组 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$，S_i 分别满足以下条件：

(a) 所有 S_i 两两不交;

(b) $S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_k=\varnothing$;

(c) $S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k=\{1,2,\cdots,n\}$.

计算 k 元组 $(S_1,S_2,\cdots,S_k)$ 的个数.

解　(a) 考虑特定的元素 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$. 要使所有的 S_i 两两不交，j 只能属于 $S_1,S_2,\cdots,S_k$ 中的至多一个. 对于 n 个元素中的每一个 j 来说，总共有 $k+1$ 种可能(可能属于这 k 个子集中的一个，也可能不属于任何一个子集). 根据乘法原理，两两不交的 S_i 共有 $(k+1)^n$ 个 k 元组.

(b) 再考虑特定的元素 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$. 对于每一个 S_i 有两种选择:或者 j 属于 S_i,或者 j 不属于 S_i. 于是总共有 2^k 种出现 j 的子集 S_i 的可能组合. 但是只有1这种情况不符合我们的条件,因为此时 j 包含于每个子集 S_i 之中. 于是对于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 n 个元素中的每一个都有 2^k-1 个位置. 根据乘法原理,有 $(2^k-1)^n$ 个 k 元组满足 $S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_k = \varnothing$.

(c) 实际上,这与上面这部分的情况类似. 只有1这种情况不符合我们的条件,因为此时 j 不包含于任何一个子集 S_i 中. 于是对于 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 n 个元素中的每一个都有 2^k-1 个位置. 根据乘法原理,有 $(2^k-1)^n$ 个 k 元组满足 $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k = \{1,2,\cdots,n\}$.

第 2 章　排列与组合

许多计数问题涉及将一些东西安放在某个位置上. 虽然总体思想比较简单，但是这些问题因根据允许安排的类型所确定的规则而千变万化. 在本章和下一章中，我们将深入研究这些问题中的某些广泛的不太典型的类型. 我们将看到各种各样的情况，在这些情况中，主要的角色是“对象”和“位置”. 在所进行的讨论中，保持不变的唯一法则是我们的“位置”是有区别的.

虽然我们的位置是有区别的，但我们的对象却可以是有区别的或者是无区别的. 例如，假定我们有两个球和两个罐子，有多少种方法把球放入罐子里去?

这个问题依赖于球是否有区别. 如果球是同样的(无区别的)，那么有三种方法把球放入我们看来是不同的罐子里:两个球都放入左边的罐子里，或者两个球都放入右边的罐子里，或者每个罐子各放一个球. 但是如果一个球是蓝色的，另一个球是红色的，那么我们能看到球的分布有四种可能性:两个球都放在左边的罐子里，或者两个球都放在右边的罐子里，这两种情况现在还是有的，但是现在还有红色球放在左边的罐子里，蓝色球放在右边的罐子里，以及蓝色球放在左边的罐子里，红色球放在右边的罐子里这两种情况.

是否允许重复? 我们必须考虑的另一种可能性是能否规定几样东西放入同一个位置. 在上面，我们假定每个罐子都足够大，能容纳许多球. 如果加以限制，每个罐子必须是空的或者恰能放一个球，在这种情况下，只有一种方法把两个无区别的球放入罐子里(每罐一球);如果规定两球有区别，那么就有两种放法(红球放入左罐，蓝球放入右罐以及相反).

我们能否说出如何应用于哪一种情况呢? 这就是计数问题需要技巧之处. 通过各章中的例题和亲自实践，你将学会识别问题所提供的暗示，逐渐地轻松分辨出对象和位置(球和罐子). 如果你还不能判断出要用什么情况，那么你所能做的一切就是明确地陈述你的假定，然后尽力去解决问题.

我们来看四种基本类型的问题，本章中有三种，下一章中有一种. 各种情况我们总结了四种重要的将一再出现的形式. 利用乘法原理，并仔细考虑确定不做过量的计算，是能够找到这些形式的. 应该经常使用这些公式，以至于很有希望最终熟记这些公式. 但是，知道如何推导将有助于你更好地记住这些公式，使你更有效地确定哪一个公式适用于哪种特定的情况，让你学会使用这种能解决更为复杂的计数问题的思想方法.

为了有助于说明问题中的形式，假定小镇上新开张了一家冰淇淋商店，该店提供n种

不同口味的冰淇淋.为了吸引顾客,他们决定进行一系列的促销活动.

开张日:各勺冰淇淋的顺序有区别,口味允许重复

开张日商店决定提供能装 k 勺冰淇淋的蛋筒打折出售.因为 k 勺冰淇淋在一个蛋筒上,所以这 k 勺冰淇淋是有顺序的,因此说明是有区别的.

一勺香草冰淇淋在一勺巧克力冰淇淋的上面区别于一勺巧克力冰淇淋在一勺香草冰淇淋的上面.但是你要什么口味并不受限制,你可以选取 k 种不同的口味,或者 k 种同样的口味,或者选取任意多少种口味.根据这样的标准,可能有多少种不同的蛋筒?

先从一个蛋筒开始,加上冰淇淋.第一勺冰淇淋的口味有多少种不同的选择呢?因为有 n 种口味,所以有 n 种选择.那么第二勺呢?因为选择口味没有限制,所以仍然有 n 种选择.事实上,我们所加的每一勺,无论加的是什么口味,都恰有 n 种可能.这就是说,根据乘法原理,我们总共可以做出

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}_{k\text{个因数}} = n^k$$

种可能的蛋筒.

同样的方法可应用于我们以前推导过的经典的"球和罐子"问题:

例 12 把 k 个有区别的球放到 n 个有区别的罐子里有多少种不同的放法(这里有区别的意思是可将球从 1 到 k 编号,将罐子从 1 到 n 编号)?

解 对于第一个球,把这个球分配到哪一个罐子里有 n 种选择.同样第二个球也有 n 种选择,等等.这 k 个球都有 n 种选择.根据乘法原理,把这些球放到罐子里总共有 n^k 种放法.

我们可以设想把一个球当作一勺冰淇淋,各个罐子表示不同的口味,于是这个问题就变为对冰淇淋计数了.当然我们的对象是有区别的,并且超过一个对象可以出现在一个指定的位置上时,答案总是 n^k.

第二天:各勺冰淇淋的顺序有区别,口味不允许重复

我们回到冰淇淋商店,假定老板意识到开张那天太早就吃完了特色口味的冰淇淋,所以营业结束得太早.为了避免这种问题再次发生,第二天商店改变了促销条件.当顾客们还是想得到有 k 勺冰淇淋的蛋筒时,那么任意一种指定口味的冰淇淋只能有一勺.

先考虑特殊情况,假定我们想要得到一个有 n 勺冰淇淋的蛋筒(口味也是 n 种).因为口味不能重复,也就是说,每一种口味恰好用一次,所以我们必须做的事情就是将口味排序.那么有多少种方法进行排序呢?

下面的定义将帮助我们着手解决这一问题.

定义 2 不同对象的有序组的排列是对同样这些对象以可能的不同顺序进行的排列.

例如,下面各种情况都是对有序三数组(1,2,3)的一种排列

$$(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)$$

像前面一样,我们从最下面开始,用一勺一勺冰淇淋构成蛋筒,有多少种口味选择最

下面的一勺冰淇淋呢？我们可以在 n 种可选的口味中任选一种，所以有 n 种可能. 下一勺呢？既然已经有了最下面的一勺冰淇淋，那我们知道不能选取那种口味的冰淇淋了，只有余下的 $n-1$ 种冰淇淋可供选择. 同样第三勺只有 $n-2$ 种选择，这是因为有两种口味已经用过了. 这种方式一直用到最上面的一勺冰淇淋. 除了最后一种口味外都用过了，所以可供选择的口味只有一种了. 利用乘法原理，可以做出

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

种可能的蛋筒.

由于上述乘法在组合数学中经常出现，所以我们给它取一个名称并给出记号. 我们把 1 到 n 的整数的乘积叫作 n 的阶乘，记作 $n!$. 我们认为 $n!$ 是对 n 个不同的对象进行排序的总数. 我们说 $0!=1$ 是因为对 0 个对象排列只有一种排法，即不排(你也可以认为是"没有"乘积，于是等于 1；还可以认为：由 $(n-1)!=\frac{n!}{n}$，得到 $0!=\frac{1!}{1}=1$).

现在我们关注 $k \leqslant n$ 的一般情况. 也就是说，在总共有 n 种口味的冰淇淋中取出 k 勺冰淇淋能做成多少种冰淇淋蛋筒(每一种口味至多只能用一次)？

就像我们恰好有 n 勺冰淇淋的情况，最下面一勺冰淇淋的口味有 n 种选择，第二勺冰淇淋有 $n-1$ 种选择，因为不允许使用与最下面一勺同样口味的冰淇淋. 继续使用这种方法. 这些数的乘积中最小的数是什么呢？因为第一个数是 n，第二个数是 $n-1$，第三个数是 $n-2$，……，第 k 个数是 $n-(k-1)=n-k+1$. 一般情况下，我们有

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+2) \cdot (n-k+1)}_{k\text{个因数}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

种符合要求的蛋筒.

有人把这种结构称作"降幂"或"降因子"，并给出一个记号，如 $n^{\underline{k}}$ 或 $(n)_k$. 在本书中我们不采用这种记号，不过，它有助于我们记住表达式 $\frac{n!}{(n-k)!}$ 并不是过分复杂的事情，它只是 k 个因子的乘积，与普通的幂并无太大的区别.

排列也有一个类似于球和罐子的问题. 我们也能看出 $\frac{n!}{(n-k)!}$ 表示把 k 个有区别的球放入 n 个有区别的罐子中，每个罐子至多放一个球的放法的总数.

第三天：各勺冰淇淋的顺序无区别，口味不允许重复

经过两天把冰淇淋堆积到一个蛋筒上后，商店的工作人员需要休息一下. 第三天，他们决定对口味加以限制(每一种口味最多只能用一次)，用大碗代替蛋筒. 这些碗足够大，把冰淇淋按照顺序放也没问题，这样顾客可以在任何时候用勺子吃他(她)想要吃的那种冰淇淋(不像蛋筒那样只能从上到下吃冰淇淋，否则就要坍塌). 一勺巧克力冰淇淋在一勺香草冰淇淋下面的蛋筒与一勺香草冰淇淋在一勺巧克力冰淇淋下面的蛋筒被认为是不同的蛋筒，但是放有一勺巧克力冰淇淋和一勺香草冰淇淋的碗只算一种. 根据新的规

定,有多少种不同的 k 勺冰淇淋的碗[1]?

这个问题的答案记作 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$(读作"$n$ 选 k"). 也就是说,$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 是从 n 种口味的冰淇淋中选出 k 勺冰淇淋的不同的碗的个数,但这 n 种口味中的每一种最多只能用一次. 我们的目标是寻求 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 的公式.

回想一下第二天. 我们还是有任何口味的冰淇淋至多用一次的规定,但当时我们考虑是有顺序的,结果共有 $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ 种不同的蛋筒.

假定当时我们盛放 k 勺冰淇淋的是碗,并且每一勺冰淇淋的口味都不同,有多少种方法把这些勺冰淇淋放入一个蛋筒呢? 这就是 k 勺冰淇淋的一个排列. 我们从上面的特殊情况知,排列 k 种不同的对象有 $k!$ 种方法. 我们可以看出,从每种口味至多用一次的 n 种口味的冰淇淋中取出由 k 勺冰淇淋组成的蛋筒的总数恰恰是从 n 种口味的冰淇淋中选取 k 种口味的冰淇淋,然后对这 k 种口味的冰淇淋在蛋筒上以某种顺序排列的总数. 于是根据乘法原理,得

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

由此得

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

这就是 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 的公式. $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 也称为二项式系数(后面我们将会看到为什么叫这个名称).

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 这个值是把 k 个有区别的球放入 n 个有区别的罐子里放法的总数,其中每个罐子的容量是至多一个球(再想想,每个罐子对应于一种特定口味的冰淇淋,每一个球表示一勺冰淇淋). $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 的另一种常用的应用如下:

例 13 证明:$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的含有 k 个元素的子集的个数.

证明 假定 n 种口味的冰淇淋中的每一种都用一个数表示,那么一杯有 k 勺没有重复口味的冰淇淋恰好对应 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个有 k 个元素的子集.

看看你是否能够用一个直接的理由去检验这是否正确. 你的理由将十分类似于冰淇

---

[1] 口味仍有 n 种. —— 译者注

淋的例子.

一般地,我们称 $\binom{n}{k}$ 为组合数.

定义 3　组合是一组不同对象的一个子集(与顺序无关,{1,2,4} 与{4,2,1} 是同一个组合).

注意,我们已经建立了排列和组合的公式,现在举例说明:

例 14　n 个人坐在一张圆桌旁可能有多少种坐法? 如果在两种排列中每个人的左边相同,右边也相同,那么认为这两种排列是同一种排列.

解　如果两种排列成旋转对称,那么就是同一种排列,所以可以把一个人作为参照点,从那个位置开始进行排列. 首先选择坐在参照人右边的人,因为这个位置不能是原参照人,所以这个位置有 $n-1$ 种选择. 然后选择一个坐在那人右边的人,因为有两个人已经就座,所以有 $n-2$ 种选择. 用这样的方法继续围桌就座,就得到 $(n-1)\cdot(n-2)\cdot n\cdot\cdots\cdot 1$,所以有 $(n-1)!$ 种坐法.

注意,一旦有了参照人,任何坐法都对应 $n-1$ 个人的唯一的排列. 我们早就可以直接看出答案是 $(n-1)!$. 第三种方法是考虑这 n 种排列是旋转对称的. 于是在这 n 个人的每 n 种排列中只算一种,于是得到 $\frac{n!}{n}=(n-1)!$.

现在我们来定义格子路径的记号. 实践证明"东北格子路径"在组合数学中是经常使用的.

定义 4　假定我们站在坐标平面的原点((0,0) 处). 在平面内以水平方向或竖直方向的单位长度作为步子进行移动. 例如,第一步在(1,0),(0,1),(−1,0),或(0,−1) 处结束. 一系列这样的步子就称为格子路径. 如果我们把四种可能的方向局限于只能向右("东")或向上("北")的步子,那么就有"东北格子路径"这一名称.

现在我们从这些路径的基本计数开始.

例 15　设 a,b 是正整数,从 (0,0) 到 (a,b) 有多少种"东北格子路径"?

解　为了到达 (a,b) 处,必须向右走 a 步,向上走 b 步(共走 $a+b$ 步). 我们可以将此看作从集合 $\{1,\cdots,a+b\}$ 中选出 a 个数,对于每一个选出的 i,第 i 步是向右的. 一旦我们确定了哪几步是向右的,那么其余的步子都必定向上. 我们知道从一个大小为 $a+b$ 的集合中取出一个大小为 a 的子集的总数是 $\binom{a+b}{a}$,这就给出了从 (0,0) 到 (a,b) 的东北格子路径数.

例 15 的解题过程描述了计数问题中的一个重要技巧,这种技巧也能正式地用于前面的一些例子中. 我们已说明了将此用于每一个从 (0,0) 到 (a,b) 的东北格子路径,并将此与集合 $\{1,\cdots,a+b\}$ 的一个有 a 个元素的子集相联系. 反之,每一个这样的子集来自于格