高等数学竞赛简明教程

主编　陈桂东　余品能

南京大学出版社

高等数学竞赛简明教程

主　编　陈桂东　余品能
编　委　毛　磊　汪泽焱　余品能
　　　　陈桂东　崔周进　滕兴虎

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学竞赛简明教程 / 陈桂东，余品能主编. —
南京：南京大学出版社，2019.3
ISBN 978-7-305-21656-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… ②余… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 026831 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 高等数学竞赛简明教程
主　　编 陈桂东　余品能
责任编辑 陈亚明　王南雁　　编辑热线 025-83592401

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 常州市武进第三印刷有限公司
开　　本 787×1092　1/16　印张 20.75　字数 505 千
版　　次 2019 年 3 月第 1 版　2019 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-21656-5
定　　价 69.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025)83594756

前 言

全国大学生数学竞赛是一项面向本科生的全国性高水平学科竞赛，自2009年起已连续举办九届，年参赛人数超过10万人，现已成为全国影响最大、参加人数最多的学科竞赛之一. 它极大增强了大学生学习数学的兴趣，为优秀学子的脱颖而出提供了广阔的舞台，也有效促进了大学数学课程的改革和建设.

本书是针对非数学专业的全国大学生数学竞赛编写的，旨在帮助学生融会贯通高等数学理论，熟练掌握各种解题技巧. 全书共分为十章，并附有5份模拟试题及近三届全国大学生数学竞赛真题. 书中所选例题既有精心选编的国内外试题，也有来自作者长期教学实践的积累. 作为本书的特色之一，我们对涉及的题解方法进行了总结整理，使之系统化、实用化，从而易于读者快捷高效地掌握. 本书可供准备数学竞赛的老师和学生作为应试教程，也可作为各类高校的大学生，尤其是成绩优秀的学生学习高等数学的参考书.

近年来，我校十分重视大学生数学竞赛活动的开展，在全国大学生数学竞赛中取得了五届六个总决赛一等奖的优异成绩，形成了一支经验丰富的竞赛指导团队. 本书既是我们多年来竞赛辅导经验的总结，也是我们教学改革成果的体现. 在本书的写作过程中得到了姚泽清教授以及数学教研室各位老师的鼓励和帮助，陆军工程大学基础部出版基金提供了资助，在此向他们一并致以深切的谢意.

限于作者水平，加之时间仓促，错讹之处敬请读者和同仁不吝赐教，以利本书今后的修正和完善.

编著者

二〇一八年六月

目　录

第 1 章　函数与极限

§1.1　方法与技巧概述

函数与极限是高等数学之基础，尤其是函数导数、定积分、重积分、级数敛散性等重要概念都是直接建立在极限理论上的.本章概念众多，仅函数极限定义就有二十四种之别，故深刻理解、领会极限概念的内涵显得极为重要，唯有如此，才能真正地做到融会贯通，举一反三.

核心考点

(1) 数列及函数极限的计算及证明.

(2) 无穷小量及其比较.

(3) 极限式中参数的确定.

(4) 函数间断点及其分类.

(5) 极限与变限定积分、中值定理、无穷级数、曲线性态相结合的综合题.

核心技巧

(1) 极限存在两准则：单调有界性准则，夹逼准则.

(2) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\text{ 或 }\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

(3) 洛必达(L'Hospital)法则.

(4) 等价无穷小替换.常用的等价无穷小替换有：当 $x\to 0$ 时，

$$\sin x\sim x$$
$$\tan x\sim x$$
$$\arcsin x\sim x$$
$$\arctan x\sim x$$
$$\ln(1+x)\sim x$$
$$\mathrm{e}^{x}-1\sim x$$
$$a^{x}-1\sim x\ln a$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x,\alpha\in\mathbf{R}$$

$$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$$

$$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$$

$$x-\arctan x\sim\frac{1}{3}x^3.$$

复杂问题中经常使用到后四个等价无穷小替换.

(5) 泰勒(Taylor)公式.

(6) 定积分定义.

§1.2 典型题型分析

1.2.1 数列极限

例 1.1 已知在 $x=0$ 有界的连续函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f(x)+\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2,$$

试求 $f(x)$ 之表达式.

解析 由题设递推关系式知

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=x^2-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)\right]\\&=x^2-\frac{x^2}{2^3}+\frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right)=x^2-\frac{x^2}{2^3}+\frac{1}{2^2}\left[\left(\frac{x}{2^2}\right)^2-\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2^3}\right)\right]\\&=x^2-\frac{x^2}{2^3}+\frac{x^2}{2^6}-\frac{1}{2^3}f\left(\frac{x}{2^3}\right)=\cdots\cdots\\&=x^2\left[1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{3(n-1)}}\right]+(-1)^n\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right),\end{aligned}$$

两边取极限,即令 $n\to\infty$,并注意到 $f(x)$ 是在 $x=0$ 有界的连续函数得

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2\left[1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{3n}}+\cdots\right]+\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)\\&=\frac{1}{1+\frac{1}{2^3}}x^2+0=\frac{8}{9}x^2.\end{aligned}$$

例 1.2 试求使 $n<6(1-1.001^{-1\,000})<n+1$ 成立的正整数 n 之值.

解析 注意到数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增且趋于 e，故 $2\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$，取 $n=1\,000$ 得

$$2<\left(1+\frac{1}{1\,000}\right)^{1\,000}<e,$$

即

$$2<(1+0.001)^{1\,000}<e<3,$$

$$\frac{1}{3}<(1+0.001)^{-1\,000}<\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2}<1-1.001^{-1\,000}<\frac{2}{3},$$

$$3<6(1-1.001^{-1\,000})<4,$$

所以 $n=3$.

例 1.3 试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$.

解析 $k^3+6k^2+11k+5=(k+3)(k+2)(k+1)-1$，故

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+3)!}\right]\\&=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+3)!},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}=\frac{5}{3}.$$

例 1.4 设数列 $\{x_n\}$ 由下式给出

$$x_0=7,x_1=3,$$

$$3x_n=2x_{n-1}+x_{n-2},n=2,3,\cdots$$

试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解析 $3x_n=2x_{n-1}+x_{n-2}$，即 $x_n=\frac{2}{3}x_{n-1}+\frac{1}{3}x_{n-2}$，故有

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}&=-\frac{1}{3}(x_{n-1}-x_{n-2})=\left(-\frac{1}{3}\right)^2(x_{n-2}-x_{n-3})=\cdots\\&=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(x_1-x_0)=-4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},\end{aligned}$$

从而

$$
\begin{aligned}
x_n &= (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0) + x_0 \\
&= -4\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right) + 1\right] + 7 \\
&= -4 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 + \frac{1}{3}} + 7 = 3\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right] + 7,
\end{aligned}
$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 4 = 4.$

例 1.5 试确定正数 a,b,c 满足何条件时,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n$ 存在.

解析 $\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n = \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}+b-c}{c}\right)^n$,

若 $b-c=-1$, 则

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}-1}{c}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{\sqrt[n]{a}-1}{c}\right)} \\
&= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{\sqrt[n]{a}-1}{c}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{\frac{1}{n}\ln a}{c}} = e^{\frac{\ln a}{c}} = a^{\frac{1}{c}}.
\end{aligned}
$$

若 $b-c>-1$, 记 $b-c+1=\alpha>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ 知, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $\sqrt[n]{a}>1-\frac{\alpha}{2}$, 从而

$$
\sqrt[n]{a}+b-c>1-\frac{\alpha}{2}+b-c=\frac{\alpha}{2}>0,
$$

$$
\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n = \left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+b-c}{c}\right)^n > \left(1+\frac{\alpha}{2c}\right)^n,
$$

故此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n$ 不存在.

若 $b-c<-1$, 记 $c-b-1=\alpha>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ 知, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $\sqrt[n]{a}<1+\frac{\alpha}{2}$, 从而

$$
\sqrt[n]{a}+b-c<1+\frac{\alpha}{2}+b-c=-\frac{\alpha}{2}<0,
$$

$$
\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n = \left(1+\frac{\sqrt[n]{a}+b-c}{c}\right)^n < \left(1-\frac{\alpha}{2c}\right)^n,
$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{2c}\right)^n=0$, 由数列极限之夹逼准则知,此时 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n=0$.

综上,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+b}{c}\right)^n$ 存在的充分必要条件是 $b-c\leqslant -1$.

例 1.6 试证

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=A$;

(2) 设 $\{a_n\}$ 为一正数列,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$.

解析 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 知,对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1>0$, 当 $n>N_1$ 时,有 $|a_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-A=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}(a_k-A)+\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}(a_k-A),$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-A\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|a_k-A|+\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}|a_k-A|\\ &<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|a_k-A|+\frac{1}{n}(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

对于固定的 N_1, $\exists N_2>0$, 当 $n>N_2$ 时,有 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N_1}|a_k-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 令 $N=\max(N_1,N_2)$, 则当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{n}(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

故由数列极限定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=A$.

(2) 令 $a_0=1$, 则

$$a_n=\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}},$$

$$\ln a_n=\ln\frac{a_1}{a_0}+\ln\frac{a_2}{a_1}+\cdots+\ln\frac{a_n}{a_{n-1}},$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=A>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\ln A$, 由上述(1)知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{a_k}{a_{k-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln a_n=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{a_n}=\ln A,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$.

注: (2)说明在正项级数审敛法中,柯西(Cauchy)判别法要比达朗贝尔(d'Alembert)判别法更强些.

例 1.7 设数列 $\{x_n\}$ 由下式给出

$$x_1=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$x_n=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_{n-1}},\qquad n=2,3,\cdots$$

试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}x_k$.

解析

$$x_1=\sqrt{\frac{1}{2}}=\cos\frac{\pi}{4},$$

$$x_2=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{8}}=\cos\frac{\pi}{8},$$

$$x_3=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{16}}=\cos\frac{\pi}{16},$$

设 $x_k=\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$，则

$$x_{k+1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_k}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}=\sqrt{\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}}=\cos\frac{\pi}{2^{k+2}},$$

故有 $x_n=\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}x_k=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{2}{\pi}.$$

例 1.8 求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}$，其中 $0<a<b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})$;

(3) 设 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^t\sin\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)\sin\dfrac{1}{n}$.

解析 (1) 开出主项. $0<a<b,a^n<b^n,a^{-n}>b^{-n}$，从而

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[a^{-n}\left(1+\frac{b^{-n}}{a^{-n}}\right)\right]^{\frac{1}{n}}\\&=a^{-1}\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{n}}=a^{-1}.\end{aligned}$$

(2) 注意到 $t\to0$ 时，$a^t-1\sim t\ln a$，故

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})\\&=\lim_{n\to\infty}n^2\sqrt[n+1]{a}(a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)=\lim_{n\to\infty}n^2\sqrt[n+1]{a}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln a\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}\sqrt[n+1]{a}\ln a=\ln a.\end{aligned}$$

(3) 应用积分中值定理，$\exists\xi\in[\sqrt{n},n]$，使

$$\begin{aligned}f(n)&=\int_n^{n^2}\left(1+\frac{1}{2t}\right)^t\sin\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\xlongequal{t=u^2}\int_{\sqrt{n}}^{n}\left(1+\frac{1}{2u^2}\right)^{u^2}2u\sin\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\\&=2\xi\sin\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right)^{\xi^2}(n-\sqrt{n}),\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}f(n)\sin\frac{1}{n}&=\lim_{n\to\infty}2\xi\sin\frac{1}{\xi}\left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right)^{\xi^2}(n-\sqrt{n})\sin\frac{1}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}2\frac{\sin\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\xi}}\left[\left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right)^{2\xi^2}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\frac{n-\sqrt{n}}{n}=2\sqrt{e}.\end{aligned}$$

例 1.9 求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\sqrt{n^2+n\pi})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$.

解析 (1) 因 $\sin(\alpha-n\pi)=-\sin(n\pi-\alpha)=(-1)^n\sin\alpha$，令 $\alpha=\sqrt{n^2+n\pi}$，得

$$\sin(\sqrt{n^2+n\pi}-n\pi)=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+n\pi}),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\sqrt{n^2+n\pi})=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$

(2) 应用定积分定义知,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}}=e^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=e^{-1}.$$

(3) 属不定式,用归并原则处理.考察函数极限

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^x,$$

或

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(1-x\ln\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(1+x\ln x)^{\frac{1}{x}}.$$

令 $y=\frac{1}{x}(1+x\ln x)^{\frac{1}{x}}$,则

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln(1+x\ln x)-\ln x=\frac{\ln(1+x\ln x)-x\ln x}{x},$$

注意到 $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=0$,及等价无穷小替换:$t\to0$ 时,$t-\ln(1+t)\sim\frac{1}{2}t^2$,可得

$$\ln(1+x\ln x)-x\ln x\sim-\frac{1}{2}(x\ln x)^2,$$

从而

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(x\ln x)^2}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{(\ln x)^2}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=}\lim_{x\to0^+}x\ln x=0,$$

所以

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(1+x\ln x)^{\frac{1}{x}}=e^0=1,$$

由归并原则知

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n=1.$$

例 1.10 已知曲线 $y=f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 上的动点 $(x,f_n(x))$ 处的法线和 x 轴交点的横坐标为

$$x-\frac{n^2x(nx^2-1)}{(nx^2+1)^3},$$

且 x 与 $f_n(x)$ 同号，$f_n(0)=0$，

(1) 试求 $f_n(x)$；

(2) 对 $\forall a\in\mathbf{R}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(a)$.

解析 (1) 曲线 $y=f_n(x)$ 在点 $(x,f_n(x))$ 处的法线

$$Y-f_n(x)=-\frac{1}{f_n'(x)}(X-x)$$

与 x 轴的交点为 $(x+f_n'(x)f_n(x),0)$，由题设知

$$x+f_n'(x)f_n(x)=x-\frac{n^2x(nx^2-1)}{(nx^2+1)^3},$$

即

$$\frac{1}{2}[f_n^2(x)]'=f_n'(x)f_n(x)=-\frac{n^2x(nx^2-1)}{(nx^2+1)^3},$$

两边积分得

$$\begin{aligned}f_n^2(x)&=-2n^2\int\frac{x(nx^2-1)}{(nx^2+1)^3}\mathrm{d}x\xlongequal{nx^2+1=t}-2n^2\int\frac{t-2}{t^3}\cdot\frac{1}{2n}\mathrm{d}t\\&=n\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}\right)+C=\frac{n^2x^2}{(nx^2+1)^2}+C,\end{aligned}$$

由 $f_n(0)=0$ 得 $C=0$，所以 $f_n^2(x)=\dfrac{n^2x^2}{(nx^2+1)^2}$；由题设 x 与 $f_n(x)$ 同号知 $f_n(x)=\dfrac{nx}{nx^2+1}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(a)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na}{na^2+1}=\begin{cases}0, & a=0\\ \dfrac{1}{a}, & a\neq 0\end{cases}$.

1.2.2 不定式之定值法

不定式之定值法的一般处理原则：

$\dfrac{0}{0}$ 型、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型：等价无穷小替换与洛必达法则相结合使用.

$0\cdot\infty$ 型：简单元素下放设置分母，转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型.

$\infty-\infty$ 型：有分母通分，没有分母应设置分母再通分；在设置分母中常用两个技巧，一是根式有理化，二是倒代换.

0^0、∞^0、1^∞ 型：借助 $a^b=\mathrm{e}^{b\ln a}$ 转化为 $0\cdot\infty$ 型，再进一步转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型，其中 1^∞ 型优先考虑应用第二个重要极限.

例 1.11 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}(e^{x^2}+4\sin 505x)^{\frac{1}{x}}$.

解析 (1) 直接使用洛必达法则,问题变得更为复杂化,原因是分子幂次上是负的,故考虑颠倒分子分母地位再作合适的倒代换

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{x\to0}\frac{x^{-100}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\xlongequal{t=\frac{1}{x^2}}\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}0.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+b}(x+b)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+b}(x+a+b)^{x+a}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{b}{x+a}\right)^{x+b}\left(1+\dfrac{a}{x+b}\right)^{x+a}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left[\left(1+\dfrac{b}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b}}\right]^{\frac{b(x+b)}{x+a}}\left[\left(1+\dfrac{a}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a}}\right]^{\frac{a(x+a)}{x+b}}}$$
$$=\frac{1}{e^b e^a}=e^{-(a+b)}.$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1+x\sin x-\cos x}$$
$$=2\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x^2}}$$
$$=2\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{4}{3}.$$

(4) 直接使用洛必达法则问题变得更为复杂化,故作恒等变形处理.

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}$$