随机种群模型的动力学

韩七星/著

科学出版社

本书获长春师范大学学术著作出版基金资助

随机种群模型的动力学

韩七星　著

科学出版社

内 容 简 介

本书介绍随机种群模型的建模及一些研究方法，利用 Lyapunov 分析的方法、Has'minskii 的平稳分布理论及周期性理论，研究了几类随机种群模型的动力学性质，以及上述模型正解的存在唯一性、正周期解存在性、平稳分布存在性及在平衡点附近的渐近行为，并对所得到的结果进行数值模拟.

本书可供数学专业高年级本科生、生物数学及随机微分方程方向的研究生，以及从事相关科学研究工作的人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

随机种群模型的动力学/韩七星著. —北京：科学出版社，2019.6

ISBN 978-7-03-060134-6

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①种群-生物模型-动力学-研究 Ⅳ. ①Q141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 284841 号

责任编辑：李 欣／责任校对：邹慧卿
责任印制：吴兆东／封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2019 年 6 月第一次印刷 印张：7 1/2
字数：150 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

种群生态学是生态学的一个分支, 主要研究种群结构与动力学性质, 例如, 种群的生存和灭绝等. 以数学模型为工具研究生态系统, 可以使得人们对物种变化规律有着更加全面的认识. 由于其广泛的应用性, 确定性种群模型的研究成为学者们感兴趣的热点问题之一, 并且涌现出了很多重要的结果. 然而, 在实际的生态系统中, 各种随机干扰无处不在, 对种群产生一定的影响. 用随机微分方程来研究种群模型能更好、更实际地描述种群发展的规律, 从而更有利于揭示生态社会中各个种群的数量变化, 为开发和保护生态资源提供理论依据.

本书的目的是介绍随机种群模型的建模及一些研究方法. 本书利用 Lyapunov 分析的方法、Has′minskii 的平稳分布理论及周期性理论, 研究了几类随机种群模型的动力学性质, 研究上述模型正解的存在唯一性、正周期解存在性、平稳分布存在性及在平衡点附近的渐近行为, 并对所得到的结果进行数值模拟. 全书共 5 章. 第 1 章绪论, 介绍随机种群模型的研究背景及一些预备知识; 第 2 章是关于随机多种群互惠型生态系统的研究. 利用 Has′minskii 等的平稳分布理论, 研究了系统平稳分布的存在性. 对于具有周期系数的系统, 利用 M-矩阵理论及 Has′minskii 的周期性理论, 讨论系统在分布意义下正周期解的存在性. 如果噪声强度较小, 随机系统与相应的确定性系统有类似的性质. 第 3 章是关于两类捕食–食饵模型的研究, 研究了随机修正的 Leslie-Gower 及 Holling Ⅱ型、Holling-Tanner 及 Beddington-DeAngelis(B-D) 型捕食–食饵模型, 讨论模型正解的全局存在唯一性, 并证明系统存在平稳分布且具有遍历性. 对于周期系数的模型, 得到了正周期解存在的充分条件. 与之前文献中平稳分布的结果相比, 该章中平稳分布存在的条件不依赖于相应确定系统的平衡点, 且条件非常简洁, 极大地改进了之前文献中平稳分布的条件. 第 4 章是关于具有流行病的随机竞争种群系统研究. 第 5 章利用随机微分方程、统计学方法、数值模拟相结合的方法, 讨论了随机食物有限种群模型正解的全局存在性、全局吸引性, 并在此基础上研究了参数估计的相合性及渐近分布问题.

本书可供数学专业高年级本科生、生物数学及随机微分方程方向的研究生, 以及从事相关科学研究工作的人员参考. 希望通过对本书的阅读, 可以使有兴趣的读者了解随机种群模型的研究方法及科学前沿.

由于作者水平有限, 书中可能会有一些不当之处, 恳请读者批评指正.

韩七星

2018 年 11 月 2 日

目　　录

前言
第 1 章　绪论 …… 1
1.1　研究背景 …… 1
1.2　预备知识 …… 3
第 2 章　随机多种群互惠型生态系统 …… 10
2.1　随机非自治的多种群互惠型生态系统 …… 11
2.1.1　系统 (2.3) 全局正解的存在唯一性 …… 11
2.1.2　系统 (2.3) 正周期解的存在性 …… 14
2.1.3　系统 (2.3) 的灭绝性 …… 18
2.1.4　系统 (2.3) 周期解的全局吸引性 …… 19
2.1.5　数值模拟 …… 25
2.2　随机常系数多种群互惠型生态系统 …… 26
2.2.1　系统 (2.4) 全局正解的存在唯一性 …… 26
2.2.2　系统 (2.4) 解的渐近性质 …… 27
2.2.3　系统 (2.4) 平稳分布的存在性 …… 29
2.2.4　一维情况举例 …… 31
2.2.5　数值模拟 …… 33
第 3 章　随机捕食–食饵种群系统 …… 35
3.1　随机修正的 Leslie-Gower 及 Holling Ⅱ 型捕食–食饵模型 …… 38
3.1.1　系统 (3.6) 正解的存在唯一性 …… 38
3.1.2　系统 (3.6) 平稳分布的存在性 …… 40
3.1.3　系统 (3.6) 的非持久性 …… 46
3.1.4　系统 (3.6) 的数值模拟 …… 49
3.1.5　系统 (3.7) 正周期解的存在性 …… 51
3.1.6　系统 (3.7) 的数值模拟 …… 58
3.2　随机修正的 Holling-Tanner 及 B-D 型捕食–食饵模型 …… 59
3.2.1　系统 (3.8) 平稳分布的存在性 …… 59
3.2.2　系统 (3.8) 的非持久性 …… 63
3.2.3　数值模拟 …… 66

第 4 章　具有流行病的随机竞争种群系统 ······ 69
4.1　疾病转移率扰动的具有流行病的随机竞争种群系统 ······ 70
4.1.1　系统 (4.3) 全局正解的存在唯一性 ······ 71
4.1.2　系统 (4.3) 在平衡点 $E_0=(0,0,0)$ 处的稳定性 ······ 73
4.1.3　系统 (4.3) 在平衡点 $E_1=\left(\frac{a}{b},0,0\right)$ 处的稳定性 ······ 74
4.1.4　系统 (4.3) 在平衡点 $E_2=\left(0,\frac{d}{f},0\right)$ 处的稳定性 ······ 76
4.1.5　系统 (4.3) 在平衡点 $E_3=\left(\frac{af-cd}{bf-ce},\frac{bd-ae}{bf-ce},0\right)$ 处的稳定性 ······ 78
4.1.6　系统 (4.3) 在 $E^*=(\hat{P},\hat{Q},\hat{V})$ 附近的动力学行为 ······ 80
4.2　线性扰动的具有流行病的随机竞争种群系统 ······ 83
4.2.1　系统 (4.4) 全局正解的存在唯一性 ······ 83
4.2.2　系统 (4.4) 的遍历性 ······ 85
第 5 章　随机食物有限种群系统 ······ 91
5.1　系统 (5.3) 正解的全局吸引性 ······ 92
5.2　系统 (5.3) 参数的极大似然估计 ······ 96
5.3　系统 (5.3) 参数估计的相合性及渐近分布 ······ 98
参考文献 ······ 104

第 1 章　绪　　论

1.1　研究背景

日本学者伊藤清 (K.Itŏ)[1] 于 20 世纪 50 年代建立了随机微分方程理论, 此后, 经过多位数学家的开创性工作, 使得随机微分方程理论得到了迅速的发展 [2–6]. 总的来说, 随机微分方程研究当系统受到不确定因素干扰时的性态. 在其发展过程中, 充分吸收了数学、统计等领域的精华, 同时又将微分方程、动力系统及随机分析等学科有机结合起来, 在金融系统、统计物理、工程结构分析、数量经济、控制系统、生物学等领域中有着非常重要的应用.

种群生态学研究种群的时间动态和调节机理, 即研究某一生物群体或某些生物群体的个体数量或密度的变化规律. 种群生态学有悠久的研究历史, 许多学者做出了卓越的贡献. 例如, 马尔萨斯 (1798 年) 提出的人口模型, 可以描述人口的增长情况; 而后经过改进得到了 Logistic 模型, 可以反映环境对人口增长的限制作用; Lotka[7](1925 年) 与 Volterra[8](1926 年) 又分别提出了描述两种群相互作用的 Lotka-Volterra 模型; 随后, Celton(1927 年) 提出了食物链、数字金字塔、生态位等重要概念; Lindema(1942 年) 提出生态系统物质生产率渐减法则等. 特别地, 从微分方程的角度, Hastings[9] 与 Brauer 等 [10] 建立了常微分方程的种群生态模型; Gopalsamy[11], Kuang[12], 陈兰荪 [13] 及唐三一、肖燕妮 [14] 等分别研究了确定性种群模型的动力学行为.

另一方面, 种群生态系统中经常会受到疾病的影响, 很多学者对流行病进行过建模研究并得到一些好的结果 [15–18]. 用数学模型能够很好地描述带有疾病的种群生态系统, 通过对模型的分析, 及时发现或预测疾病发生的生态动因, 预测生物种群的发展动态, 并为采取的决策提供理论依据. Anderson[19] 等研究了两种群的竞争系统, 其中一个种群感染疾病, 并且假设受感染的个体不具有生殖能力. Dobson[20] 及 Hochberg 等 [21] 研究了两种病菌竞争同一寄主问题. Venturino [22] 等研究了两种群竞争模型, 其中一个种群带病菌, 且假设流行病不能逾越种群的界限, 对模型中平衡点的稳定性进行了细致的研究. Xiao 及 Chen 也对有疾病传播的种群系统进行过细致的研究 [23–25].

然而, 在实际的生态系统中, 各种随机干扰 (白噪声) 无处不在, 对种群产生一定的影响. 因此, 研究种群生态系统在白噪声的影响下相对于确定性系统会产生怎样的变化就显得尤为重要. 一些学者在这方面进行了深入的研究 [26–29]. Has′minskii

等 [5, 31] 给出了随机微分方程存在平稳分布及周期解的充分条件; Gard [28, 29] 将随机微分方程理论应用于种群模型, 得到了非常经典的理论; Mao 等 [32, 33] 研究了一类特殊的 L-V 系统, 并揭示了环境白噪声会抑制解的爆破这一现象; Mao [40] 和 Bahar[41] 将此结果推广到随机时滞 L-V 系统, 并表明若白噪声大于零, 则解是随机最终有界的, 环境白噪声的存在使种群生态系统的动力学行为发生了变化; Liu 和 Wang[42−44] 等对随机种群模型等进行了研究, 得到了系统有界性、持久性、灭绝性等充分条件; Jiang [38, 45, 46] 等研究了随机捕食–食饵系统及 L-V 互惠系统, 得到了系统具有平稳分布, 且具有遍历性的特征. 遍历性是 Markov 过程在时间和空间上的统一性, 表现为时间均值等于空间均值. 本书利用 Has′minskii 的平稳分布理论研究几类随机生态系统平稳分布的存在性及是否具有遍历性, 其中部分结果极大地改进了 Jiang [38] 和 Mandal 等 [47] 的结果.

在生态系统中, 周期现象也是普遍存在的, 如白昼黑夜的变化、四季的更替、食物的供应等. 因此, 研究周期因素影响下生态系统的动力学行为是非常有意义的, 是对种群模型进行分析时非常重要的一部分. 对于确定性系统, 周期解的结果已经非常丰富 [48−51], 而随机生态模型的周期解问题, 结果并不多. Jiang [52] 等研究了周期 Logistic 系统, 得到了均值意义下倒数形式的周期解, 并证明了周期解的全局吸引性; Zhao [53] 等给出了随机周期解的定义, 并证明了一些环面上的闭链的随机周期解的存在性; Li[54] 等利用周期 Markov 过程的性质, 研究了随机时滞微分方程周期解的存在性, 并将结果应用于 Logistic 系统. 本书的一部分工作是利用 Has′minskii 给出的周期解的理论及 Lyapunov 分析的方法来研究两类随机生物模型周期解的存在性.

种群和流行病结合的系统也不可避免地会受到随机因素的影响. Liu 和 Shi[55] 等研究了一类具有 Holling II 函数反应项随机捕食–食饵模型, 其中食饵有病, 给出了系统灭绝及平稳分布存在的充分条件. Jiang[56] 等研究了一类 SIS 与具有 Holling II 函数反应项捕食–食饵模型相结合的系统. 本书将研究具有流行病的随机 L-V 竞争种群系统在参数扰动及系统扰动 [57, 58] 下围绕相应的确定性系统的平衡点的随机稳定性及系统平稳分布的存在性、持久性等, 这里系统扰动指的是白噪声强度正比于系统变量.

全书共 5 章, 主要研究几类随机生物模型在参数扰动或系统扰动下模型的渐近行为, 其中第 2 章 ~ 第 4 章是核心部分. 具体研究内容如下:

第 2 章是关于随机多种群互惠型生态系统的研究. 考虑系统具有周期参数, 利用 M 矩阵理论及 Has′minskii 建立的周期性理论, 得到了系统在分布意义下正周期解的存在性, 并研究了正周期解的全局吸引性. 如果噪声强度较小, 随机系统与相应的确定性系统有类似的性质, 如周期解的存在性、正周期解的全局吸引性等 [59]. 同时, 对系统的灭绝性也进行了研究. 除此之外, 引入 Mao 等 [60] 对参数的扰动方

式, 即考虑白噪声的强度依赖于人口密度, 对随机常系数多种群互惠模型进行了研究, 得到了该模型解的渐近性质, 并利用 Has′minskii 等的平稳分布理论, 研究了系统平稳分布的存在性.

第 3 章是关于两类捕食–食饵模型的研究. 本章的研究内容分为两部分. 首先我们研究了随机修正的 Leslie-Gower 及 Holling II 型捕食–食饵模型. 对于常系数的模型, 利用 Lyapunov 分析的方法, 研究了模型正解的全局存在唯一性, 通过扩散阵理论及 Has′minskii 关于随机微分方程平稳分布存在性理论, 证明了系统存在平稳分布且具有遍历性. 同时, 对系统的非持久性也进行了研究. 对于周期系数的模型, 得到了正周期解存在的充分条件. 另一类模型是随机修正的 Holling-Tanner 及 B-D 型捕食–食饵模型, 利用 Has′minskii 等的平稳分布理论, 得到了该模型存在平稳分布, 且具有遍历性. 与文献 [38, 47] 中平稳分布的结果相比, 本章中平稳分布存在的条件不依赖于相应确定系统的平衡点, 且条件非常简洁, 极大地改进了上述文献中平稳分布的条件.

第 4 章是关于具有流行病的随机竞争种群模型的研究. 本章内容分为两部分. 一部分研究了参数扰动下, 随机竞争生态流行病模型正解的存在唯一性及系统在对应确定性模型平衡点附近的渐近行为, 证明了系统在平衡点是随机渐近稳定的, 由于该模型确定性系统的内部平衡点已不再是随机系统的平衡点, 因此, 不能按照之前的方法研究其随机渐近稳定性. 利用 Lyapunov 分析的方法, 研究了系统的持久性. 另一部分研究了线性扰动的随机竞争生态流行病模型, 证明了模型正解的存在唯一性, 并利用 Has′minskii 的平稳分布理论证明了系统存在平稳分布, 且具有遍历性.

第 5 章是关于随机食物有限模型的研究. 本章共三个部分, 5.1 节研究了系统 (5.3) 正解的全局吸引性, 并用 MATLAB 软件对其具体模型作了数值模拟, 模拟结果与理论分析相当吻合. 5.2 节研究了参数估计的相合性及渐近分布问题, 利用统计学方法研究了有限的离散观测数据, 对模型中的参数 α^2, r 进行了估计, 模拟结果表明了极大似然方法很合适. 5.3 节研究了参数估计的强相合性, 并运用鞅大数定律与中心极限定理得到了参数估计的极限分布.

1.2 预备知识

本节中, 给出了本书用到的记号、定义、定理及随机微分方程的一些基本知识.

记 $R^n_+ = \{x \in R^n : x_i > 0$ 对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n\}$, $\bar{R}^n_+ = \{x \in R^n : x_i \geqslant 0$ 对任意的 $1 \leqslant i \leqslant n\}$.

定义 1.1 [61] 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一个完备的概率空间. 考虑由 $\mathscr{F}$ 的部分 σ-代数构成的类 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, 若如下条件成立:

(1) 当 $s \leqslant t$ 时, $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$;

(2) 对所有的 $t \geqslant 0, \mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s$.

则称这个类是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个流, 并称概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 为带流概率空间. 若流 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足右连续单调递增, 且 $\mathscr{F}_0$ 包含所有的零测集, 则称流满足通常条件.

本书中, 假设 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 表示带有流 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 且满足通常条件的概率空间.

定义 1.2 [61]　称定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机过程 $X = \{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 为 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 适应的, 如果对每个 $t \geqslant 0$, X_t 是 $\mathscr{F}_t$-可测的, 即对任意的 $x \in R$,

$$\{X_t \leqslant x\} \in \mathscr{F}_t.$$

定义 1.3 [61, 62]　随机过程 $X = \{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 称为关于 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的鞅, 如果 $X = \{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 是关于 $\mathscr{F}_t$ 适应的, $E(|X_t|) < \infty$, 并且对任何的 $0 \leqslant s \leqslant t$, 有

$$E(X_t|\mathscr{F}_s) = X_s.$$

若上述等号分别换成 $\leqslant$ 或 $\geqslant$, 则分别称其为上鞅或下鞅.

定义 1.4 [63]　(1) 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是随机变量序列, 若存在随机变量 X 使得

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\} = 1,$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 几乎必然收敛 (或以概率 1 收敛) 于 X, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$, a.s.

(2) 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是随机变量序列, 若存在随机变量 X, 使得任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\} = 0,$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 依概率收敛于 X.

(3) 设随机变量序列 $\{X_n\} \subset L^p(p \geqslant 1)$, 如果存在随机变量 $X \in L^p$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0,$$

则称随机变量序列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ p 次平均收敛于 X, 或称为 p 阶矩收敛.

定理 1.1 (强大数定律)[61]　设 $M = \{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是实值连续局部鞅, 且 $M(0) = 0$. 则

$$\lim_{t\to\infty} \langle M,\ M\rangle_t = \infty \ \text{ a.s.} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{\langle M,\ M\rangle_t} = 0 \ \text{ a.s.}$$

且有

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\langle M,\ M\rangle_t}{t} < \infty \ \text{ a.s.} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \frac{M_t}{t} = 0 \ \text{ a.s.}$$

引理 1.1 (Borel-Cantelli 引理)[61] 如果 $\{U_k\} \subset \mathscr{F}$, 并且 $\sum_{k=1}^{\infty} P(U_k) < \infty$, 则

$$P\left(\limsup_{k\to\infty} U_k\right) = 0.$$

考虑如下的 d 维随机微分方程:

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.1}$$

其中 $f: R^d \times [t_0, T] \to R^d$, $g: R^d \times [t_0, T] \to R^{d\times m}$ 为 Borel 可测函数, $B(t) = (B_1(t), \cdots, B_m(t))^{\mathrm{T}}$ $(t \geqslant 0)$ 是定义在所给概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 m 维标准布朗运动.

定理 1.2 (解存在唯一性定理)[29, 61, 64] 假设函数 $f: R^d \times [t_0, T] \to R^d$ 和 $g: R^d \times [t_0, T] \to R^{d\times m}$ 关于 $(x, t) \in R^d \times [t_0, T]$ 可测, 且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件, 即存在 $c_k > 0(k = 1, 2, \cdots)$, 使得当 $\forall x, y \in R^d$ 且 $|x| \vee |y| \leqslant k$ 时, 满足不等式

$$|f(x,t) - f(y,t)| \vee |g(x,t) - g(y,t)| \leqslant c_k|x - y|,$$

且存在 $c > 0$, 满足

$$|f(x,t)| \vee |g(x,t)| \leqslant c(1 + |x|).$$

则随机微分方程 (1.1) 存在唯一连续的全局解 $x(t)(t \in [t_0, T])$, 且对每个 $p > 0$, 有

$$E\left[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant T} |x(s; x_0)|^p\right] < \infty.$$

定理 1.3 (伊藤公式)[29, 61, 64] 设 $x(t)$ $(t \geqslant t_0 = 0)$ 是方程 (1.1) 的解, $V \in C^{2,1}(R^n \times R_+; R)$. 则 $V(x(t), t)$ 仍是具有如下随机微分的伊藤过程:

$$\begin{aligned} dV(x(t), t) = &\left[V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(t) + \frac{1}{2}\mathrm{trace}(g^{\mathrm{T}}(t)V_{xx}(x(t), t)g(t))\right] dt \\ &+ V_x(x(t), t)g(t)dB(t) \quad \text{a.s.}, \end{aligned}$$

其中

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad V_x = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_d}\right), \quad V_{xx} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_j}\right)_{d\times d}.$$

称上述公式为伊藤公式.

定义 (1.1) 的微分算子 L 为

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{d} f_k(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d} [g^{\mathrm{T}}(x,t)g(x,t)]_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}.$$

若 L 作用在函数 $V \in C^{2,1}(S_h \times \overline{R}_+; \overline{R}_+)$ 上, 则有

$$LV(x(t),t) = V_t(x(t),t) + V_x(x(t),t)f(x,t) + \frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^{\mathrm{T}}(x,t)V_{xx}g(x,t)],$$

其中 $C^{2,1}(S_h \times \overline{R}_+; \overline{R}_+)$ 表示所有定义在 $S_h \times \overline{R}_+$ 上的非负函数的集合, 且此类函数满足关于 x 二次可微, 关于 t 一次可微. 则伊藤公式可表示为

$$dV(x(t),t) = LV(x,t) + V_x(x(t),t)g(t)dB(t).$$

设 $S_h = \{x \in R^d : |x| < h\}$, 则有如下引理.

引理 1.2 [61] 若存在正定函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(S_h \times [t_0,\infty); R_+)$ 使得对所有的 $(x,t) \in S_h \times [t_0,\infty)$ 有

$$LV(x,t) \leqslant 0,$$

则方程 (1.1) 的平凡解是随机稳定的.

引理 1.3 [61] 若存在正定、递减函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(S_h \times [t_0,\infty); R_+)$ 使得 $LV(x,t)$ 是负定的, 则方程 (1.1) 的平凡解是随机渐近稳定的.

定义 1.5 [31, 65] 一个 n 维的 $\mathscr{F}_t$ 适应过程 $X = \{X_t\}_{t \geqslant 0}$ 称为 Markov 过程, 如果下面的 Markov 性满足: 对所有的 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $A \in \mathfrak{B}(R^n)$,

$$P(X(t) \in A | \mathscr{F}_s) = P(X(t) \in A | X(s)).$$

引理 1.4 [31, 65] Markov 过程的转移概率函数 $P(s,x;t,A)$ 具有下列性质:

(1) 对任意的 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $A \in \mathfrak{B}(R^n)$,

$$P(s,X(s);t,A) = P(X(t) \in A | X(s)).$$

(2) 对任意的 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $x \in R^n$, $P(s,x;t,\cdot)$ 是 $\mathfrak{B}(R^n)$ 中的概率测度.

(3) 对任意的 $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, $A \in \mathfrak{B}(R^n)$,$P(s,\cdot;t,A)$ 是 Borel 可测的.

(4) 对任意的 $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant t < \infty$, $x \in R^n, A \in \mathfrak{B}(R^n)$, Kolmogorov-Chapman 方程

$$P(s,x;t,A) = \int_{R^n} P(u,y;t,A)P(s,x;u,dy)$$

成立.

定义 1.6 [31] 随机过程 $\xi(t)=\xi(t,\omega)(-\infty<t<\infty)$ 称为是周期 θ 的, 如果对任意有限的数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$, $\xi(t_1+h),\cdots,\xi(t_n+h)$ 的联合分布与 h 是独立的, 其中 $h=k\theta(k=\pm1,\pm2,\cdots)$.

注 1.1 Has′minskii[31] 指出, 一个 Markov 过程 $x(t)$ 是 θ-周期的当且仅当其转移概率函数是 θ 周期的, 且函数 $P_0(t,A)=P\{X(t)\in A\}$ 满足下面方程:

$$P_0(s,A)=\int_{R^l}P_0(s,dx)P(s,x;s+\theta,A)\equiv P_0(s+\theta,A),\quad \forall A\in\mathfrak{B}(R^n).$$

考虑如下方程

$$X(t)=X(t_0)+\int_{t_0}^{t}b(s,X(s))ds+\sum_{r=1}^{k}\int_{t_0}^{t}\sigma_r(s,X(s))dB_r(s),\tag{1.2}$$

假设系数 $b(s,x),\sigma_1(s,x),\sigma_2(s,x),\cdots,\sigma_r(s,x)$ 满足下列条件:

$$|b(s,x)-b(s,y)|+\sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(s,x)-\sigma_r(s,y)|\leqslant B|x-y|,$$

$$|b(s,x)|+\sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(s,x)|\leqslant B(1+|x|),\tag{1.3}$$

其中 B 是一个常数.

引理 1.5 [31] 设方程 (1.2) 的系数关于 t 是 θ 周期的, 且在每个柱形 $I\times U$ 中条件 (1.3) 成立, 并且假设存在一个 C^2- 函数 $V(t,x)$ 关于 t 是 θ 周期的, 且下列条件在某个紧集外成立:

$$\inf_{|x|>R}V(t,x)\to\infty,\quad R\to\infty,\tag{1.4}$$

$$LV(t,x)\leqslant-1.\tag{1.5}$$

则方程 (1.2) 存在一个 θ 周期的解.

注 1.2 根据引理 1.5 的证明可知: 条件 (1.3) 是用来保证方程 (1.2) 解的存在唯一性. 因此, 当条件 (1.3) 被其他保证解的存在唯一性条件代替时, 引理 1.5 仍是成立的.

假设 $X(t)$ 是 E_l (l 维欧几里得空间) 中的一个自治 Markov 过程, 可表示为如下随机微分方程

$$dX(t)=b(X)dt+\sum_{r=1}^{k}g_r(X)dB_r(t).\tag{1.6}$$

其扩散阵为

$$\Lambda(x)=(\lambda_{ij}(x)),\quad \lambda_{ij}(x)=\sum_{r=1}^{k}g_r^i(x)g_r^j(x).$$

作如下假设:

(A) 存在具有正则边界 Γ 的有界区域 $U \subset E_l$, 具有如下性质:

(A1) 在 U 和它的一些邻域, 扩散阵 $A(x)$ 的最小特征值是非零的.

(A2) 当 $x \in E_l \setminus U$ 时, 从 x 出发的轨道到达集合 U 的平均时间 τ 是有限的, 且对每个紧子集 $K \subset E_l$ 有 $\sup\limits_{x \in K} E_x\tau < \infty$.

引理 1.6 [5] 若假设 (A) 成立, 则 Markov 过程 $X(t)$ 存在不变分布 $\mu(\cdot)$. 令 $f(\cdot)$ 是关于测度 μ 可积的函数. 则对所有的 $x \in E_l$ 有如下公式成立:

$$P_x\left\{\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \int_{E_l} f(x)\mu(dx)\right\} = 1.$$

注 1.3 为验证 (A1) 成立, 只需证明 F 在 U 中是一致椭圆的 [29, 66], 其中 $Fu = b(x)\cdot u_x + \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(A(x)u_{xx})$, 即证存在正数 M 满足

$$\sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant M|\xi|^2, \quad x \in U, \quad \xi \in R^l.$$

为验证 (A2) 成立, 只要证明存在非负的 C^2 函数及邻域 U, 使得对任意的 $E_l \setminus U$, LV 是负的 [67].

设 G 为一个向量或矩阵, $G \geqslant 0$ 表示 G 的每一个元素都是非负的. $G > 0$ 表示 $G \geqslant 0$, 且至少一个元素是正的. $G \gg 0$ 表示 G 的所有元素都是正的. 令

$$Z^{n\times n} = \{A = (a_{ij})_{n\times n} : a_{ij} \leqslant 0, i \neq j\}.$$

定义 1.7 [31] 方阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 称为非奇异 M-矩阵, 若 A 可以表示成下面形式:

$$A = sI - G,$$

其中 $G \geqslant 0$, $s > \rho(G)$, I 为单位阵, $\rho(G)$ 为 G 的谱半径.

引理 1.7 [65] 若 $A \in Z^{n\times n}$, 其中 $Z^{n\times n} = \{A = (a_{ij})_{n\times n} : a_{ij} \leqslant 0, i \neq j\}$, 则下列表述都是等价的:

(1) A 是非奇异的 M-矩阵;

(2) A 的所有顺序主子式都是正的;

(3) 对 R^n 中任意的 $y \gg 0$, 线性方程 $Ax = y$ 存在唯一的解 $x \gg 0$.

引理 1.8 [68] 若 A 是非奇异 M-矩阵, 则存在正的对角矩阵 D, 使得矩阵 $B = \dfrac{1}{2}(DA + A^{\mathrm{T}}D)$ 为正定的, 其中

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}, \quad d_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

定理 1.4 (常用的不等式)[61] (1) Young 不等式.

$$|a|^{\beta}|b|^{(1-\beta)} \leqslant \beta|a| + (1-\beta)|b|,$$

其中 $a, b \in R, \beta \in [0,1]$.

Young 不等式的变形:

$$|a|^p|b|^q \leqslant \varepsilon|a|^{p+q} + \frac{q}{p+q}\left[\frac{p}{\varepsilon(p+q)}\right]^{\frac{p}{q}}|b|^{p+q},$$

其中 $a, b \in R, p, q, \varepsilon > 0$.

(2) Hölder 不等式.

$$|E(X^{\mathrm{T}}Y)| \leqslant (E|X|^p)^{1/p}(E|Y|^q)^{1/q},$$

若 $p > 1, 1/p + 1/q = 1, X \in L^p, Y \in L^q$.

(3) 矩不等式.

令 $p \geqslant 2$. 设 $g \in \mathcal{M}^2\{[0,T]; R^{n\times m}\}$ 使得

$$E\int_0^T |g(s)^p|ds < \infty,$$

则有

$$E\left|\int_0^T g(s)dB(s)\right|^p \leqslant \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}} T^{\frac{p-2}{2}} E\int_0^T |g(s)^p|ds,$$

其中 $\mathcal{M}^2\{[0,T]; R^{n\times m}\}$ 表示 $n\times m$ 矩阵值可测的 $\{\mathscr{F}_t\}$ 适应过程 $f = \{f_{ij}(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 的集合, 且 $f = \{f_{ij}(t)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 满足 $E\displaystyle\int_0^T |f(s)^2|ds < \infty$. 特别地, 若 $p = 2$, 则上式等号成立.

(4) 指数鞅不等式.

令 $g = (g_1, g_2, \cdots, g_m) \in \mathcal{L}^2(R_+; R^{1\times m})$, T, α, β 为任意的正数. 则

$$P\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\int_0^t g(s)dB(s) - \frac{\alpha}{2}\int_0^t |g(s)|^2 ds\right] > \beta\right\} \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha\beta}.$$

(5) Minkowski 不等式.

如果 $p > 1, X, Y \in L^p$, 则

$$(E|X+Y|^p)^{1/p} \leqslant (E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p}.$$

第 2 章　随机多种群互惠型生态系统

互惠系统在种群动力学理论中占有非常重要的地位, 很多学者都对互惠系统进行过细致的研究. 经典的非自治的 n 种群互惠系统用方程可表示为

$$dx_i(t) = x_i(t)\left(r_i(t) - a_{ii}(t)x_i(t) + \sum_{j\neq i} a_{ij}(t)x_j(t)\right)dt, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.1}$$

其中 $x_i(t)$ 为第 i 个种群在 t 时刻的密度, $r_i(t)$ 为第 i 个种群 x_i 在 t 时刻的内禀增长率, a_{ii} 表示 t 时刻第 i 个种群内部竞争造成的衰减率, a_{ij} 代表 t 时刻第 i 个种群受第 j 个种群 $x_j(i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j)$ 的作用而产生的增长率. 很多学者对模型 (2.1) 的全局吸引性、持久性、非持久性等 [69−72] 进行了研究.

现实世界中, 环境经常会受到一些因素的影响而发生变化, 例如, 季节的变换、食物的供应、天气的变化等. 因此假设系统 (2.1) 的参数是周期的也是合理的. 关于连续和离散的周期互惠系统的周期解及概周期解有很多好的结果 [50, 51, 59, 71, 73].

另一方面, 如果模型 (2.1) 中的参数都为常数, 则有如下常系数的互惠系统:

$$dx_i(t) = x_i(t)\left(r_i - a_{ii}x_i(t) + \sum_{j\neq i} a_{ij}x_j(t)\right)dt, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.2}$$

特别地, 陈兰荪等 [13] 研究了系统 (2.2) 正平衡点的全局稳定性, 并给出如下的充分条件:

(i) 存在一个矩阵 $G = (G_{ij})_{n\times n}$, 使得对所有的 $i, j = 1, 2, \cdots, n$, 有

$$-a_{ii} \leqslant G_{ii}, \quad a_{ij} \leqslant G_{ij}, \quad i \neq j.$$

(ii) $-G$ 的所有顺序主子式都是正的. 定义矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

若矩阵 A 为非奇异的 M-矩阵 (M-矩阵的定义及性质见文献 [13, 65]), 选择 $-G = A$, 则条件 (i) 和 (ii) 都满足. 换句话说, 如果矩阵 A 是一个非奇异的 M-矩阵, 则系统