

基于FPGA的 数字图像信号处理 研究与设计

杨军 王璞 张坤 张玉明 著



科学出版社

基于FPGA的数字图像信号处理研究与设计

杨 军 王 璞 张 坤 张 玉 明 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书根据当前国内外采用 FPGA 开发实现 FFT 处理器的现状,以及当前 FFT 处理器的应用需求,以实用为基本原则,立足于工程实践,详细讲解设计技术细节和实际应用开发方法与思路,总结作者实践项目的开发经验和技巧。本书从 FFT 算法的基本原理到 FFT 核心的 FPGA 实现,从单核 FFT 的设计到多核 FFT 的实现,从简单一维 FFT 过渡到复杂二维 FFT,从单纯 FFT 处理器的实现到 FFT 应用实例开发等方面入手进行了详细深入的讲解。全书以循序渐进的方式带领读者深入学习和研究,帮助读者快速掌握并提高使用 FPGA 技术实现 FFT 算法的能力。

本书总结了作者多年科研与工程项目的经验,将理论与实际应用紧密结合,可供从事 FPGA 设计与开发的科研人员参考,也适合高等院校计算机科学与技术、电子工程、通信工程等相关专业的研究生使用。

图书在版编目(CIP)数据

基于 FPGA 的数字图像信号处理研究与设计 / 杨军等著. — 北京: 科学出版社, 2018.11

ISBN 978-7-03-058515-8

I. ①基… II. ①杨… III. ①可编程序逻辑阵列-应用-数字信号处理 IV. ①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 185393 号

责任编辑: 于海云 王楠楠 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京建宏印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 11 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2018 年 11 月第一次印刷 印张: 21

字数: 500 000

定价: 138.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

在数字信号处理中，FFT 算法有着举足轻重的地位，许多算法，如相关、滤波、谱估计、卷积等都可以用 FFT 算法来实现。同时 FFT 算法在雷达、观测、跟踪、高速图像处理、保密无线通信、数字通信、生物工程、图像处理等领域中得到广泛的应用。FPGA 融合了 DSP 和 ASIC 的优点，并具有可配置性强、速度快、密度高、功耗低的特点，其资源丰富，易于实现流水和并行结构。使用 FPGA 实现 FFT 算法，可以提高处理速度，并且具有灵活性高、开发费用低、开发周期短、升级简单、易编程等特点。用 FPGA 实现的 FFT 处理器将在数字信号处理领域得到广泛的应用。

作者根据当前国内外采用 FPGA 开发实现 FFT 处理器的现状，以及当前 FFT 处理器的应用需求，以实用为基本原则，立足于工程实践，详细讲解设计技术细节和实际应用开发方法与思路，总结作者实践项目的开发经验、技巧及开发过程中遇到的问题。从 FFT 算法的基本原理到 FFT 核心的 FPGA 实现，从单核 FFT 设计到多核 FFT 的实现，从简单一维 FFT 过渡到复杂二维 FFT，从单纯 FFT 处理器的实现到 FFT 应用实例开发的讲解，全书以循序渐进的方式带领读者深入学习和研究，帮助读者快速掌握并提高使用 FPGA 技术实现 FFT 算法的能力。

系统设计的基本软件工具包括以下内容。

Quartus II: 用于完成硬件描述语言代码的编写、综合、硬件优化、适配、编程下载以及硬件系统调试等。

SOPC Builder: Altera Nios II 嵌入式处理器开发软件包，用于实现 Nios II 系统的配置、生成。

ModelSim: 用于对 SOPC 生成的 Nios II 系统的 HDL 描述进行系统功能仿真。

MATLAB: 用于对处理结果进行仿真，以及与 DSP Builder 进行联合在 Simulink 下面开发所需要的模型文件，并将其转换为 VHDL 硬件描述语言。

Nios II IDE: 用于进行软件开发、调试以及向目标开发板进行 Flash 下载。

全书共 9 章。基础知识部分包括前两章，第 1 章详细介绍 FFT 算法原理，第 2 章分别对项目开发所需的各个工具软件进行简单的介绍，以帮助读者快速熟悉开发环境。实战应用部分为第 3~9 章：第 3~6 章从 FPGA 实现单核 FFT 处理器的三种方法开始，过渡到双核 FFT 处理器的 FPGA 实现，接着详细介绍二维 FFT 处理器的 SOPC 设计与实现，然后引用一个二维 FFT 在图像处理领域的应用实例——基于 FPGA 的盲图像复原，帮助读者快速入门与提高 FFT 算法的 FPGA 实现，同时提高读者嵌入式系统开发的能力；第 7~8 章主要介绍数字图像处理的两个工程实例，Sobel 边缘检测和多级 CIC 滤波器的 FPGA 实现，使读者进一步体会 FPGA 的实际项目开发流程；第 9 章以一个基于 Nios II 的 AES 加/解密系统的设计结束全书。实例讲解过程中详细介绍 FPGA 项目开发的技术和技巧，深入地讲解开发方案与设计思路，并对设计过程中的重点和难点进行详细讲解和注释，实例具有代

表性，帮助读者巩固知识点，掌握 FPGA 开发实现 FFT 技术，迅速提升读者的设计能力。

本书语言简洁，结构清晰，内容系统全面，基础知识和实际工程结合，紧紧围绕实用原则，总结作者实践项目的开发经验、技巧及开发过程中遇到的问题。在实例的讲解上，本书既介绍设计原理、结构框图、基本步骤和流程，提供开发方案和设计思路，也穿插一些经验技巧和注意事项，在潜移默化中提高读者的理论知识和实践能力；同时重视开发方案与设计技巧的讲解，注重读者动手能力的培养。

本书由杨军、王璞、张坤、张玉明、田野等共同编写，由杨军进行统稿。另外为本书的顺利完成做出贡献的人员还有许欢庆、吴梦娇、黄兴涛、毕方鸿等，他们在资料的收集、整理，源代码的设计、分析、仿真，硬件平台的验证，书稿的录入、排版、绘图等方面做了大量的工作，在此一并向他们表示衷心的感谢！

本书涉及的知识范围广，书中硬件设计和软件设计中分别采用了硬件描述语言和 C 语言，读者需要具有一定的硬件语言编程基础 (Verilog HDL 或 VHDL)、C 语言编程能力和 FPGA 开发基础。

本书总结了作者多年科研与工程项目的经验，将理论与实际应用紧密结合，可供从事 FPGA 设计与开发的科研人员参考，也适合高等院校计算机科学与技术、电子工程、通信工程等相关专业的研究生使用。

由于作者水平有限，加之编写时间仓促，书中难免有不足之处，诚望读者批评指正。

作者

2018 年 6 月

目 录

第 1 章	FFT 算法原理	1
1.1	引言	1
1.2	FFT 算法原理	2
1.2.1	DFT 算法简介	2
1.2.2	离散傅里叶变换的性质	5
1.2.3	频率域抽样理论	8
1.2.4	DFT 的应用举例	10
1.2.5	FFT/IFFT 算法原理	17
1.2.6	进一步减少运算量的措施	28
1.2.7	二维 FFT/IFFT 算法原理	30
1.2.8	一些二维傅里叶变换的性质	30
1.3	FFT 硬件实现现状	32
第 2 章	项目开发环境介绍	34
2.1	软件平台	34
2.1.1	硬件开发工具 Quartus II 8.0	34
2.1.2	ModelSim 仿真工具	38
2.1.3	Nios II IDE 8.0 集成开发环境	41
2.1.4	数值计算与仿真测试工具 MATLAB	46
2.2	硬件平台	53
2.2.1	DE2 平台简介	53
2.2.2	DE2 板上资源及硬件布局	55
2.2.3	DE2 原理	57
2.2.4	DE2 平台的开发环境	60
2.2.5	DE2 开发板测试说明	60
第 3 章	基于 FPGA 的一维单核 FFT 处理器设计与实现	63
3.1	基于 CORDIC 算法实现的 FFT 处理器	63
3.1.1	CORDIC 算法原理	63
3.1.2	FFT 处理器的设计与实现	64
3.1.3	系统综合与仿真测试	71
3.2	使用 DSP Builder 设计 FFT	75
3.2.1	DSP Builder 简介	75
3.2.2	FFT 模型的建立	78

3.2.3	FFT 模型的实现	83
3.2.4	系统综合与仿真测试	85
3.3	基于 Altera FFT 兆核函数的设计与实现	85
3.3.1	FFT 兆核函数简介	85
3.3.2	FFT 兆核函数的设计与应用	88
3.3.3	FFT 兆核函数规范	97
3.4	小结	100
第 4 章	基于 FPGA 的一维多核 FFT 处理器的设计与实现	101
4.1	设计思路与原理	101
4.1.1	设计背景	101
4.1.2	实现途径	102
4.1.3	总体结构设计	103
4.2	详细设计	105
4.2.1	系统工作流程	105
4.2.2	系统时钟分析	115
4.2.3	地址发生器	118
4.2.4	地址流水线	120
4.2.5	辐角发生器	121
4.2.6	RAM 存储器	124
4.2.7	数据转换	128
4.2.8	其他	133
4.3	系统综合与仿真测试	134
4.4	实例总结	136
第 5 章	基于 SOPC 的二维 FFT 处理器的设计与实现	137
5.1	设计思路与原理	137
5.1.1	原理分析	137
5.1.2	SOPC 简介	138
5.1.3	Avalon 总线 ST 模式介绍	141
5.2	硬件设计	147
5.2.1	总体结构设计	147
5.2.2	硬件系统的 SOPC 设计	148
5.3	软件设计及综合测试	156
5.3.1	系统软件设计	156
5.3.2	系统综合与仿真测试	161
5.4	实例总结	162
第 6 章	二维 FFT 应用实例——基于 FPGA 的盲图像复原	163
6.1	图像复原数学模型	164

6.1.1	图像退化	164
6.1.2	点扩展函数	165
6.1.3	噪声模型	166
6.1.4	图像的主要组成部分	167
6.1.5	图像复原处理算法要解决的主要问题	168
6.2	图像复原简介	168
6.2.1	几种常见图像复原方法	168
6.2.2	算法简介	172
6.2.3	图像复原算法电路实现技术现状	173
6.3	盲图像复原系统整体设计	177
6.3.1	3×3 方形窗结构	177
6.3.2	中值滤波器模块	178
6.3.3	幂运算模块	179
6.3.4	二维 FFT 模块	181
6.4	盲图像复原系统的 FPGA 实现	184
6.4.1	信号输入输出系统	184
6.4.2	3×3 方形窗模板的实现与仿真	187
6.4.3	中值滤波的实现	188
6.4.4	FPGA 例化双端口 RAM	190
6.5	仿真与验证	192
6.5.1	中值滤波分析	193
6.5.2	盲图像复原处理	194
6.6	实例总结	194
第 7 章	数字图像处理之 Sobel 边缘检测的 FPGA 实现	195
7.1	Sobel 算子原理	197
7.2	Sobel 算法的改进	199
7.2.1	第一种改进方法	199
7.2.2	第二种改进方法	201
7.3	Sobel 边缘检测的 FPGA 实现	201
7.3.1	硬件平台介绍	202
7.3.2	摄像头模块	209
7.3.3	图像采集模块	217
7.3.4	SDRAM 控制模块	221
7.3.5	Sobel 模块	227
7.3.6	VGA 模块	238
7.4	仿真测试	243
7.5	实例总结	244

第 8 章	数字信号处理之 CIC 滤波器的 FPGA 实现	245
8.1	CIC 滤波器原理	245
8.1.1	单级 CIC 滤波器	245
8.1.2	多级 CIC 滤波器	247
8.1.3	Hogenauer “剪除”理论	247
8.2	设计思路	248
8.2.1	设计背景	248
8.2.2	实现途径	249
8.2.3	结构设计与优化	250
8.3	详细设计	253
8.3.1	顶层设计	253
8.3.2	积分器	259
8.3.3	梳状器	269
8.3.4	插值和抽取器	280
8.4	系统综合与仿真测试	284
8.5	实例总结	286
第 9 章	基于 Nois II 的 AES 加/解密系统	288
9.1	实例系统介绍	288
9.2	设计思路与原理	289
9.2.1	AES 算法简介	289
9.2.2	AES 加/解密流程	289
9.2.3	系统整体结构	294
9.3	硬件设计	295
9.3.1	AES IP 核设计	295
9.3.2	SOPC 系统的创建	300
9.4	软件设计及综合测试	312
9.4.1	软件设计	312
9.4.2	系统综合与仿真测试	320
9.5	本章总结	323
参考文献		324
附录	DE2 平台上 EP2C35F672 的引脚分配表	325

第 1 章 FFT 算法原理

1.1 引言

随着计算机技术的快速发展,数字信号处理已深入各个学科领域。在数字信号处理中,许多算法,如相关、滤波、谱估计、卷积等都可转化为离散傅里叶变换(DFT)来实现,从而为离散信号分析在理论上提供了变换工具,但 DFT 计算量大,实现困难,难以应用于实际。

快速傅里叶变换(FFT)是 1965 年由库利和图基提出的,其思想是利用系数的对称性和周期性,将大点数的 DFT 分解成若干个小点数的 DFT。采用这种算法能使计算机计算离散傅里叶变换所需要的乘法次数大为减少,特别是被变换的抽样点数 N 越多,FFT 算法计算量的节省就越显著,可以使 DFT 的运算时间缩短几个数量级。快速傅里叶变换已成为一门重要的学科,广泛地应用在数字信号处理(DSP)和科学计算领域。特别是二维快速傅里叶变换(2D-FFT)在成像技术的光谱和频域分析中有广泛的应用,如图像数字水印、指纹识别、合成孔径雷达(SAR)的成像处理以及医学成像等。随着图像尺寸的增加,能处理大容量数据的 2D-FFT 的作用也越来越突出。在合成孔径雷达的成像处理、数字全息成像以及医学成像等方面,所需处理的数据量已达到 2048×2048 甚至更高。因此,需要采用新的技术和硬件体系结构来实现 FFT,使其满足大数据量、高精度以及实时性的要求。

目前 FFT 算法主要有软件、硬件两种实现方法。软件实现作为一种数学函数方便调用,不具备高速性、实时性的特征。硬件实现的主要方案有:通用数字信号处理器、专用芯片(ASIC)、现场可编程门阵列(FPGA)。DSP 具有纯软件实现的灵活性,适用于流程复杂的算法,如通信系统中信道的编译码、QAM 映射等算法。但 DSP 速度较慢、接口不灵活,而且没有 FFT 运算所需的巨量存储器,需外置特定的接口、控制芯片和 RAM,限制了运算速度。DSP 完成 FFT 运算需占用大量 DSP 的运算时间,使整个系统的数据吞吐率降低,同时无法发挥 DSP 软件实现的灵活性。采用 FFT 专用器件,速度虽能够达到要求,但其外围电路复杂,可扩展性差,成本昂贵。

近几年,随着现场可编程门阵列 FPGA 技术和计算机并行技术的迅速发展,采用速度更快、灵活性更高的 FPGA 来实现具有并行特征的 FFT 算法,已成为国内外研究的热点。FPGA 融合了 DSP 和 ASIC 的优点,并具有可配置性强、速度快、密度高、功耗低的特点,其资源丰富,易于实现流水和并行结构。使用 FPGA 实现 FFT 算法,可以提高处理速度,并且具有灵活性高,开发费用低、开发周期短、升级简单、易编程等特点。

2010 年 10 月在杭州召开的 2010 CCF 中国计算机大会上,北京理工大学专用处理器研究所所长刘大可教授针对“面向 2015 年的并行多核嵌入式计算平台”这一课题进行了演讲,重点讲解了多核并行专用处理器(主要是并行数字信号处理器)的发展现状和相关技术,并强调该技术“是一个很有前途的分支”。

多核处理器从通用性角度分为通用多核处理器和专用多核处理器两类。全球 90% 的多核处理器的设计面向专用多核处理器，专用多核处理器未来占全部多核市场的 50%。而本书所涉及的多核 FFT 处理器属于多核并行专用处理器中的并行数字信号处理器(多核流处理器)。

从近年的人才需求市场来看，FPGA 电子工程师的需求也是一路走高，尤其是 SOPC 嵌入式方面的开发人才甚至出现了供不应求的状况：一方面是由于工程技术的电子化、集成化和系统化促进了电子工程技术的发展，也促进了 FPGA 技术在社会各行各业中的广泛应用，人才需求不断增加；另一方面则是因为 FPGA 电子工程师的门槛相对较高，这个高门槛是需要工程师拥有大量的实践经验。

1.2 FFT 算法原理

1.2.1 DFT 算法简介

有限长序列在数字信号处理中是很重要的一种序列，当然可以用 Z 变换和傅里叶变换来研究它，但是，可以导出反映它的有限长特点的一种有用工具是离散傅里叶变换(DFT)。离散傅里叶变换除了作为有限长序列的一种傅里叶表示法在理论上相当重要，而且由于存在着计算离散傅里叶变换的有效快速算法，其在各种数字信号处理的算法中起着核心的作用。

有限长序列的离散傅里叶变换(DFT)和周期序列的离散傅里叶级数(DFS)本质上是一样的。为了更好地理解 DFT，需要先讨论周期序列的离散傅里叶级数。而为了讨论离散傅里叶级数及离散傅里叶变换，本书首先来回顾并讨论傅里叶变换的几种可能形式。

1. 连续时间、连续频率——连续傅里叶变换

设 $x(t)$ 为连续时间非周期信号，傅里叶变换关系如图 1.1 所示：

$$\begin{aligned}
 x(t) &\leftrightarrow X(j\Omega) \\
 X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \\
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega \\
 &\left(\text{条件: } \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \right)
 \end{aligned}$$

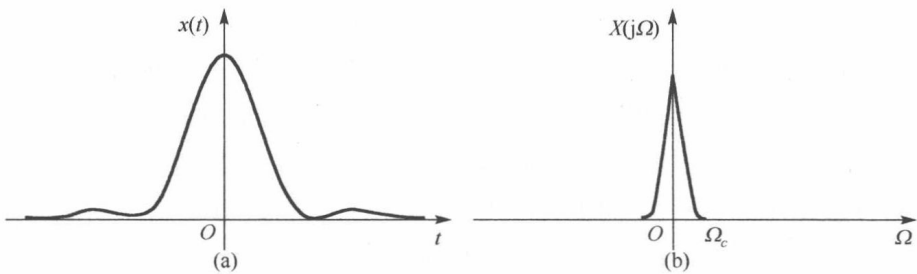


图 1.1 连续傅里叶变换示意图

从图 1.1 中可以看出时域连续函数造成频域是非周期的谱，而时域的非周期造成频域是连续的谱。

2. 连续时间，离散频率——傅里叶级数

设 $f(t)$ 代表一个周期为 T_1 的周期性连续时间函数， $f(t)$ 可展成傅里叶级数，其傅里叶级数的系数为 F_n ， $f(t)$ 和 F_n 组成变换对，表示为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1}$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt$$

从图 1.2 中可以看出时域连续函数造成频域是非周期的谱，而时域的周期造成频域是离散的谱。

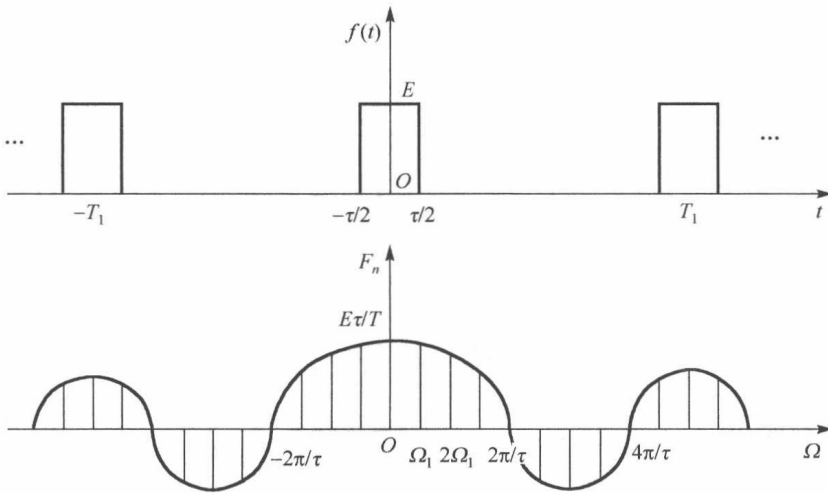


图 1.2 傅里叶级数示意图

3. 离散时间，连续频率——序列的傅里叶变换

正变换：

$$\text{DTFT}[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

逆变换：

$$\text{DTFT}^{-1}[X(e^{j\omega})] = x(n) = 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) \text{ 级数收敛条件为 } \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty。$$

从图 1.3 中可以看出时域离散函数造成频域是周期的谱，而时域的非周期造成频域是连续的谱。

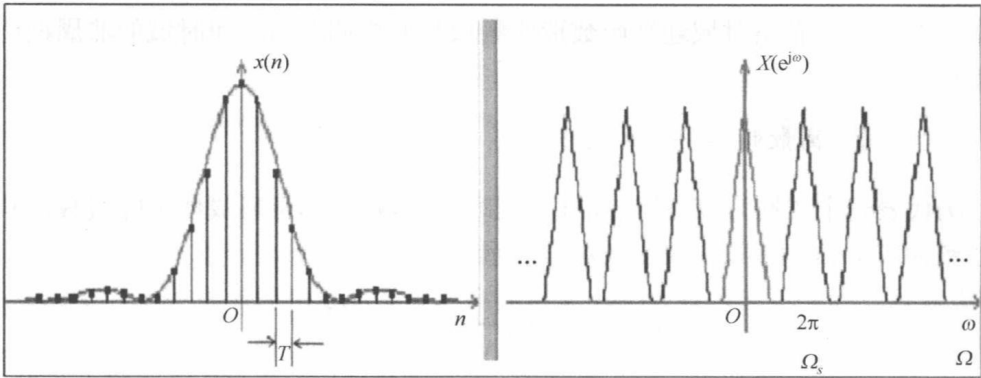


图 1.3 傅里叶级数示意图

4. 离散时间，离散频率——离散傅里叶变换

前面讨论的三种傅里叶变换对，都不适合在计算机上运算，因为至少在一个域(时域或频域)中，函数是连续的。数字计算角度感兴趣的是时域及频域都是离散的情况，这就是这里要谈到的离散傅里叶变换。

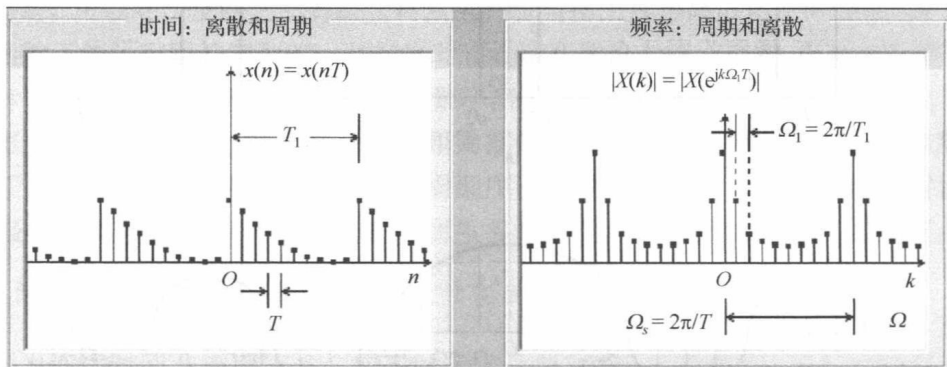


图 1.4 时域及频域都是离散变换示意图

在图 1.4 中时域抽样间隔为 T ，频域周期 $\Omega_s = 2\pi/T$ ，时域周期 T_1 ，频域抽样间隔 $\Omega_1 = 2\pi/T_1$ ，从图中可以看出时域离散函数造成频域是周期的谱，而时域的周期造成频域是离散的谱。

下面详细地对周期序列的离散傅里叶变换(DFT)进行讨论。

周期序列实际上只有有限个序列值才有意义，因此它的离散傅里叶级数表示式也适用于有限长序列，这就可以得到有限长序列的傅里叶变换(DFT)。

设 $x(n)$ 是一个长度为 M 的有限长序列。

正变换：

$$X(k) = \text{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

逆变换：

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

式中, $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$, N 称为 DFT 区间长度, $N \geq M$ 。

例 1.1 $x(n) = R_4(n)$, 求 $x(n)$ 的 8 点和 16 点 DFT。

解 (1) DFT 区间 $N=8$, 则

$$X(k) = \sum_{n=0}^7 x(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{8}kn} = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{8}k4}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{8}k}} = \frac{1 - e^{-jk\pi}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{4}k}} = e^{-j\frac{3\pi}{8}k} \frac{\sin \frac{\pi}{2}k}{\sin \frac{\pi}{8}k}, \quad k=0, 1, \dots, 7。$$

(2) DFT 区间 $N=16$, 则

$$X(k) = \sum_{n=0}^{15} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{16}kn} = \sum_{n=0}^3 e^{-j\frac{2\pi}{16}kn} = e^{-j\frac{3\pi}{16}k} \frac{\sin \frac{\pi}{4}k}{\sin \frac{\pi}{16}k}, \quad k=0, 1, \dots, 15。$$

1.2.2 离散傅里叶变换的性质

1. 线性

设 $x_1(n)$ 、 $x_2(n)$ 是两个有限长序列, 长度分别为 N_1 、 N_2 , 且 $y(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$, a 、 b 为常数。其中 $N = \max(N_1, N_2)$; $x_1(n)$ 为有限长序列, 长度为 N ; $x_2(n)$ 为有限长序列, 长度为 N ; $y(n)$ 为有限长序列, 长度为 N 。

$x_1(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$X_1(k) = \text{DFT}[x_1(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$x_2(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$X_2(k) = \text{DFT}[x_2(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n)W_N^{nk}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$y(n)$ 的 N 点 DFT 为

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} y(n)W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} [ax_1(n) + bx_2(n)]W_N^{nk} = aX_1(k) + bX_2(k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

2. 循环移位定理

1) 序列的循环移位

设 $x(n)$ 为有限长序列, 长度为 N , 则 $x(n)$ 的循环移位定义为

$$y(n) = x[(n+m)]_N R_N(n)$$

上式表明先将 $x(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓得到序列 $\bar{x}(n) = x((n))_N$, 再将 $\bar{x}(n)$ 左移得到 $\bar{x}(n+m)$, 最后取 $\bar{x}(n+m)$ 主值区间 ($n=0, \dots, N-1$) 上的序列值, 则得到有限长序列 $x(n)$ 的循环移位序列 $y(n)$ 。过程如图 1.5 所示。

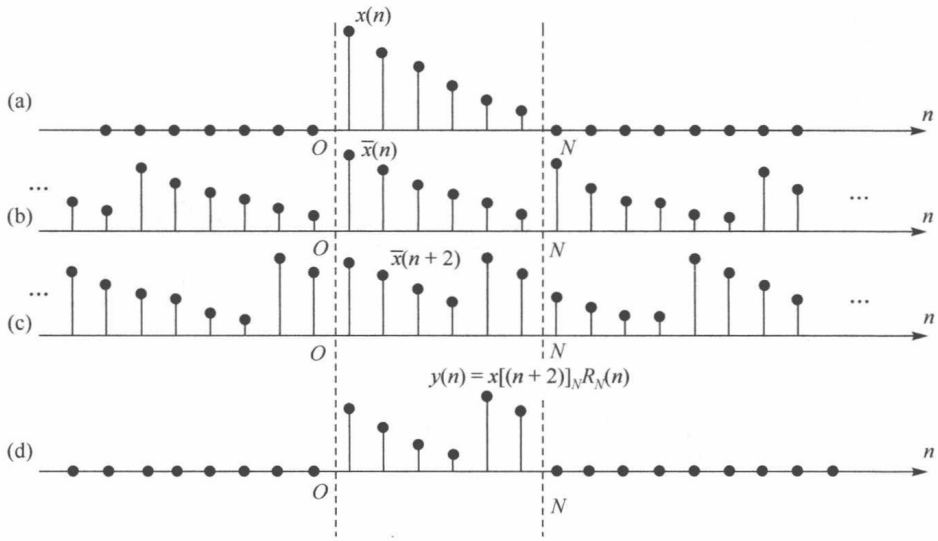


图 1.5 循环移位过程示意图 ($N=6$)

2) 时域循环移位定理

设 $x(n)$ 为有限长序列, 长度为 N , $y(n)$ 为 $x(n)$ 的循环移位序列, 即 $y(n) = x((n+m))_N R_N(n)$, 则

$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \text{DFT}[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-km} X(k)$$

式中, $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $0 \leq k \leq N-1$ 。

证明
$$Y(k) = \text{DFT}[y(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N R_N(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x((n+m))_N W_N^{kn}$$

令 $n+m = n'$, 则有

$$Y(k) = \sum_{n=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{k(n-m)} = W_N^{-km} \sum_{n=m}^{N-1+m} x((n'))_N W_N^{kn'}$$

由于上式中求和项以 N 为周期, 所以对其在任一周期上的求和结果相同。将上式的求和区间改在主值区间, 则得

$$Y(k) = W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x((n'))_N W_N^{kn'} = W_N^{-km} \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') W_N^{kn'} = W_N^{-km} X(k), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

3) 频域循环移位定理

如果 $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, $0 \leq k \leq N-1$, $Y(k) = X((k+l))_N R_N(k)$, 则 $y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = W_N^{nl} x(n)$ 。

证明
$$y(n) = \text{IDFT}[Y(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X((k+l))_N R_N(k) W_N^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{K=0}^{N-1} X((k+l))_N W_N^{-kn}$$

令 $k+l = k'$, 则有

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k'=l}^{N-1+l} X((k'))_N W_N^{-(k'-l)n} = W_N^{nl} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=l}^{N-1+l} X((k'))_N W_N^{-k'n} \right) = W_N^{nl} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X((k'))_N W_N^{-kn} \right) \\ &= W_N^{nl} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k') W_N^{-k'n} \right) = W_N^{nl} x(n) \end{aligned}$$

3. 循环卷积定理

有限长序列 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$, 长度分别为 N_1 和 N_2 , $N=\max(N_1, N_2)$ 。 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 N 点 DFT 分别为 $X_1(k)=\text{DFT}[x_1(n)]$, $X_2(k)=\text{DFT}[x_2(n)]$, 如果 $X(k)=X_1(k)X_2(k)$, 则

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

循环卷积过程中, 要求对循环反转、循环移位, 特别是两个长度位 N 的序列的循环卷积长度仍为 N , 显然与一般的线性卷积不同, 所以称为循环卷积。记为

$$x(n) = x_1(n) \otimes x_2(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

4. 复共轭序列的 DFT

设 $x^*(n)$ 是 $x(n)$ 的复共轭序列, 长度为 N , 已知 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$, 则 $\text{DFT}[x^*(n)]=X^*(N-k)$, $0 \leq k \leq N-1$, 且 $X(N)=X(0)$ 。

证明

$$\begin{aligned} \text{DFT}[x^*(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)W_N^{nk} R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{-nk} \right]^* R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(N-k)n} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k), \quad 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

已知 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$, 则 $\text{DFT}[x^*(N-n)]=X^*(k)$ 。

证明 因为 $X(k)=\text{DFT}[x(n)]$, 即

$$x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x(N-n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-(N-n)k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{nk}$$

$$x^*(N-n) = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{nk} \right]^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k)W_N^{-nk} = \text{IDFT}[X^*(k)]$$

即

$$\text{DFT}[x^*(N-n)]=X^*(k)$$

5. DFT 的共轭对称性

1) 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

用 $x_{\text{ep}}(n)$ 和 $x_{\text{op}}(n)$ 分别表示有限长共轭对称序列和共轭反对称序列。二者的定义如下:

$$x_{\text{ep}}(n) = x_{\text{ep}}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$x_{\text{op}}(n) = -x_{\text{op}}^*(N-n), \quad 0 \leq n \leq N-1$$

当 N 为偶数时, 将上式的 n 换成 $N/2-n$, 得到 $x_{\text{ep}}\left(\frac{N}{2}-n\right)=x_{\text{ep}}^*\left(\frac{N}{2}+n\right)$, $0 \leq n \leq N/2-1$ 。

当 N 为奇数时, 将上式的 n 换成 $(N-1)/2-n$, 得到 $x_{\text{ep}}\left(\frac{N-1}{2}-n\right)=x_{\text{ep}}^*\left(\frac{N+1}{2}+n\right)$, $0 \leq n \leq (N-1)/2-1$ 。

任意有限长序列 $x(n)$ 可表示成共轭对称分量和共轭反对称分量之和 $x(n)=x_{\text{ep}}(n)+x_{\text{op}}(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ 。将 $x(n)=x_{\text{ep}}(n)+x_{\text{op}}(n)$ 中的 n 换成 $N-n$, 并取复共轭, 得

$$\begin{aligned} x^*(N-n) &= x_{\text{ep}}^*(N-n) + x_{\text{op}}^*(N-n) \\ &= x_{\text{ep}}(n) - x_{\text{op}}(n) \end{aligned}$$

所以

$$x_{\text{ep}}(n) = 1/2(x(n) + x^*(N-n))$$

$$x_{\text{op}}(n) = 1/2(x(n) - x^*(N-n))$$

2) DFT 的共轭对称性

(1) 将有限长序列 $x(n)$ 分成实部与虚部, 即 $x(n)=x_r(n)+jx_i(n)$, 则 $X(k)=X_{\text{ep}}(k)+jX_{\text{op}}(k)$ 。

证明

$$x_r(n) = 1/2(x(n) + x^*(n))$$

$$\text{DFT}[x_r(n)] = 1/2(X(k) + X^*(N-k)) = X_{\text{ep}}(k)$$

$$jx_i(n) = 1/2(x(n) - x^*(n))$$

$$\text{DFT}[jx_i(n)] = 1/2(X(k) - X^*(N-k)) = X_{\text{op}}(k)$$

(2) 将有限长序列 $x(n)$ 分成共轭对称部分和共轭反对称部分, 即 $x(n)=x_{\text{ep}}(n)+x_{\text{op}}(n)$, $0 \leq n \leq N-1$, 则 $X(k)=X_R(k)+jX_I(k)$ 。

证明

$$x_{\text{ep}}(n) = 1/2(x(n) + x^*(N-n))$$

$$\text{DFT}[x_{\text{ep}}(n)] = 1/2(X(k) + X^*(k)) = X_R(k)$$

$$x_{\text{op}}(n) = 1/2(x(n) - x^*(N-n))$$

$$\text{DFT}[x_{\text{op}}(n)] = 1/2(X(k) - X^*(k)) = jX_I(k)$$

1.2.3 频率域抽样理论

由时域采样定理可知, 在一定条件下, 可以由时域采样信号恢复原来的连续信号。那么能不能也由频域采样信号恢复频域连续信号? 频域采样理论是什么?

已知序列 $x(n)$ 及序列 $x(n)$ 的长度 M 。 $x(n)$ 的 Z 变换为: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ 。因为 $X(z)$

收敛域包含单位圆, 所以其序列傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 存在。

对 $X(e^{j\omega})$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上进行 N 点等间隔采样 (对 $X(z)$ 在单位圆上进行 N 点等间隔采样), 得到 $X(k)$ 或 $\bar{X}(z)$: