高等数学学习指导

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

主　编　卢惟康　刘康波　刘　逸
副主编　贺楚雄　张新萍　袁文胜　徐志尧
管永娟　叶　娇　彭丽娇

苏州大学出版社
Soochow University Press

高等数学学习指导

主　审　胡铁城　贺楚雄
主　编　卢惟康　刘康波　刘　逸
副主编　贺楚雄　张新萍　袁文胜　徐志尧
　　　　管永娟　叶　娇　彭丽娇

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/卢惟康,刘康波,刘逸主编.
—苏州:苏州大学出版社,2018.8
ISBN 978-7-5672-2583-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①卢…②刘…③刘… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第185258号

高等数学学习指导

卢惟康　刘康波　刘　逸　主编

责任编辑　李　娟

苏州大学出版社出版发行

(地址:苏州市十梓街1号　邮编:215006)

苏州工业园区美柯乐制版印务有限责任公司

(地址:苏州工业园区东兴路7—1号　邮编:215021)

开本787×1092　1/16　印张9.75　字数232千

2018年8月第1版　2018年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5672-2583-1　定价:28.00元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换

苏州大学出版社营销部　电话:0512—67481020

苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

编　委　会

主　审　胡铁城　贺楚雄

主　编　卢惟康　刘康波　刘　逸

副主编　贺楚雄　张新萍　袁文胜　徐志尧　管永娟　叶　娇　彭丽娇

编　委　王卫群　王超杰　单武将　易　强　张爱春

前言

Preface

本书为与《高等数学》(苏州大学出版社出版)教材配套的学习指导教程.编写的主要目的包括:一、为使用上述教材的学生提供学习指导及课后练习;二、为学习能力强,学有余力的同学提供拓展内容,使他们有更大的提升空间.

为方便同学学习,本书从以下四个部分对教材的学习进行指导.

第一部分:学习要求.

对学习内容提出了具体的目标,对学生的理论基础和实践能力提出三个层次的要求:最高层次是理解和熟练掌握,中间层次是了解和掌握,最低层次是知道和会.

第二部分:学习拓展.

这部分加强了学生对教材中的基础知识的掌握,并补充了教材中未介绍的知识.该部分主要针对学有余力的学生,也可作为教材的补充内容.

第三部分:学习指导.

该部分对教材中涉及基础知识的题目进行了解题指导,给出了一些基本的解题方法,同时也进行了适当拓展.

第四部分:学习测试.

该部分主要是针对教材中每一节内容的测试题.本书每一章的最后还配有综合测试题.综合测试题是对该章基础知识的测试,学生在学习完每一章后,可选择综合测试题进行自测,以检验自己的学习效果,并找出自己的问题所在.

本书由胡铁城、贺楚雄主审,卢惟康、刘康波、刘逸任主编,贺楚雄、张新萍、袁文胜、徐志尧、管永娟、叶娇、彭丽娇任副主编,参编人员还有胡铁城、王卫群、王超杰、单武将、易强、张爱春,书稿最后由卢惟康负责统稿.

本书的编写和出版得到了苏州大学出版社的大力支持,在此臻以最诚挚的谢意!

由于编者水平有限,加上时间也比较仓促,书中不妥之处在所难免,敬请广大师生和读者批评指正,以便我们改正和完善.我们的电子邮箱是 jgshuxue@126.com.

目 录

Contents

第一章　函数与极限

一、学习要求

（1）理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数的概念，了解分段函数的概念.

（2）了解反函数，以及函数的单调性、奇偶性、有界性、周期性的概念.

（3）熟练掌握复合函数的合成与分解过程.

（4）理解函数极限（包括数列极限）的概念，掌握极限的四则运算法则；理解无穷小和无穷大的概念，了解无穷小的性质，知道无穷小和无穷大之间的关系，知道无穷小的比较意义；掌握两个重要极限.

（5）理解函数连续性的概念，掌握初等函数的极限求法；了解闭区间上连续函数的性质.

二、学习拓展

1. 连续的等价定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 间断点的分类

第一类间断点

（1）跳跃间断点：若 $f(x)$ 在点 x_0 处左、右极限都存在，但 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

（2）可去间断点：若 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$，或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

注意　对于可去间断点，只要改变或者补充间断点处函数的定义，则可使其变为连续点.

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

第一类间断点的特点：函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在.

第二类间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

例 1 判断函数 $y=f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 1, \\ \frac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$ 的间断点 $x=1$ 的类别.

解 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$，而 $f(1)=\frac{1}{2}$.

函数在 $x=1$ 处间断，改变函数的定义，令 $f(1)=1$，则该函数在点 $x=1$ 处连续.

所以 $x=1$ 称为该函数的可去间断点.

例 2 指出下列函数的间断点，并说明其类型：

(1) $f(x)=\frac{\sin x}{|x|}$； (2) $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

解 (1) 由于函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，故 $x=0$ 为函数的间断点. 又

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-x}=-1,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，且为跳跃间断点.

(2) 由于函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 处无定义，故 $x=1$ 和 $x=2$ 都是函数的间断点. 又

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}=-2,\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\infty,$$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，且为可去间断点，$x=2$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，且为无穷间断点.

3. 利用等价无穷小求极限

定义 设 α,β 是同一个自变量变化过程中的两个无穷小，且 $\alpha\neq 0$，$\lim\frac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限.

(1) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$，就说 β 与 α 是同阶无穷小.

特别地，当 $c=1$ 时，记作 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，称 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

等价无穷小的替换定理 设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$ 且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

此定理表明，在求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可用等价无穷小代替.

下面是 $x\to 0$ 时常用的几个等价无穷小：

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$e^x-1\sim x,\arctan x\sim x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\ln(1+x\sin x)}$.

分析　当 $x\to 0$ 时，分子、分母都为无穷小量，分子含有根式，可以首先分子有理化，又分母 $\ln(1+x\sin x)\sim x\sin x(x\to 0)$，故可结合等价无穷小替换来求极限.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos^2 x}{\ln(1+x\sin x)(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x+\sin^2 x}{x\sin x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\cos x}=1.$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{(\arctan x)^3}$.

错解　因为 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x$，所以

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

正确的解法如下：

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

注　利用等价无穷小替换求极限，一般只适应于函数中的乘积因子，如果函数中出现加减项时，要想办法将其转化为乘除形式，再用等价无穷小替换.

4. 极限存在准则

准则 1　如果数列 x_n,y_n 及 z_n 满足下列条件：

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

那么数列 x_n 的极限存在，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

准则 1′　如果当 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>M;\delta,M>0$)时，有：

(1) $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(或x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(或x\to\infty)}}h(x)=a$，

那么函数 $f(x)$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=a$.

准则 2 单调有界数列必有极限.

本结论包含两个方面：

(1) 单调增加有上界数列必有极限；

(2) 单调减少有下界数列必有极限.

例 5 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

分析 这是一个用数列的夹逼定理求极限的例子，将已知数列放大、缩小后，若放大、缩小后的数列的极限都存在且等于 a，则所求数列的极限存在且等于 a.

解 设 $x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$. 因为

$$3=(3^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant x_n\leqslant(3^n+3^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot 3^{\frac{1}{n}}\text{，且}\lim_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3,$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3.$$

三、学习指导

例 6 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求：$f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(x+1)$，$f(x^2)$.

解 $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$，$f(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$，

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1},\ f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{2+x},\ f(x^2)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

例 7 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{3}{5x^2+2x}$； (2) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$； (3) $f(x)=\lg(4x-3)$.

解 (1) 在分式 $\dfrac{3}{5x^2+2x}$ 中，分母不能为零，所以 $5x^2+2x\neq 0$，解得 $x\neq-\dfrac{2}{5}$ 且 $x\neq 0$，即定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{2}{5},0\right)\cup(0,+\infty)$.

(2) 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 $9-x^2\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，即定义域为 $[-3,3]$.

(3) 在对数式中，真数必须大于零，所以有 $4x-3>0$，解得 $x>\dfrac{3}{4}$，即定义域为 $\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$.

例 8　设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x<3,\\ 5x-1, & x\geqslant 3.\end{cases}$ 求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$及函数 $f(x)$的定义域.

解　因为$-\pi\in[-4,1)$，所以 $f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；

因为 $1\in[1,3)$，所以 $f(1)=1$；

因为 $3.5\in[3,+\infty)$，所以 $f(3.5)=5\times3.5-1=16.5$.

由已知得函数 $f(x)$的定义域为$[-4,+\infty)$.

例 9　设有函数 $f(x)=x-1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，问它们是否为同一个函数？

解　当 $x\neq-1$ 时，函数值 $f(x)=g(x)$，但是 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$在点 $x=-1$ 处无定义，其定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$. 由于 $f(x)$与 $g(x)$的定义域不同，所以它们不是同一个函数.

例 10　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=3x^4-5x^2+7$；　　(2) $f(x)=2x^2+\sin x$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)(a>0,a\neq1)$.

解　(1) 因为函数的定义域关于原点对称，且

$$f(-x)=3(-x)^4-5(-x)^2+7=3x^4-5x^2+7=f(x),$$

所以 $f(x)=3x^4-5x^2+7$ 是偶函数.

(2) 虽然函数的定义域关于原点对称，但是

$$f(-x)=2(-x)^2+\sin(-x)=2x^2-\sin x\neq f(x),$$

且同样可以得到 $f(-x)\neq-f(x)$，所以 $f(x)=2x^2+\sin x$ 既非奇函数，也非偶函数.

(3) 因为函数的定义域关于原点对称，且

$$f(-x)=\frac{1}{2}[a^{-(-x)}-a^{-x}]=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})=-\frac{1}{2}(a^{-x}-a^x)=-f(x),$$

所以$f(x)=\dfrac{1}{2}(a^{-x}-a^x)$是奇函数.

例 11　验证函数 $y=3x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

证　在区间$(-\infty,+\infty)$内任取两点 $x_1<x_2$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=(3x_1-2)-(3x_2-2)=3(x_1-x_2)<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=3x-2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.

例 12　求 $y=4x-1$ 的反函数.

解　由 $y=4x-1$ 得到 $x=\dfrac{y+1}{4}$，然后交换 x 和 y，得 $y=\dfrac{x+1}{4}$，即 $y=\dfrac{x+1}{4}$是 $y=4x-1$ 的反函数.

例 13　已知 $y=\sqrt{u}$，$u=2x^3+5$，将 y 表示成 x 的函数.

解 将 $u=2x^3+5$ 代入 $y=\sqrt{u}$,可得 $y=\sqrt{2x^3+5}$.

例 14 指出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的:

(1) $y=\sin(x^3+4)$;　　(2) $y=5^{\cot\frac{1}{x}}$.

解 (1) 设 $u=x^3+4$,则 $y=\sin(x^3+4)$是由 $y=\sin u$,$u=x^3+4$ 复合而成的.

(2) 设 $u=\cot\dfrac{1}{x}$,则 $y=5^u$;设 $v=\dfrac{1}{x}$,则 $u=\cot v$. 所以,$y=5^{\cot\frac{1}{x}}$ 可以看成是 $y=5^u$,$u=\cot v$,$v=\dfrac{1}{x}$三个函数复合而成的.

例 15 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+6)$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-4}{x^4+x^2+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+5}{x-5}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(3x^2-2x+6)&=\lim_{x\to 2}3x^2-\lim_{x\to 2}2x+\lim_{x\to 2}6\\&=3(\lim_{x\to 2}x)^2-2\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}6\\&=3\cdot 2^2-2\cdot 2+6\\&=14.\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-4}{x^4+x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^4+x^2+1)}=-\dfrac{2}{7}$.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to 5}(x-5)=0$,$\lim\limits_{x\to 5}(x+5)=10$,所以$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 5}(x-5)}{\lim\limits_{x\to 5}(x+5)}=\dfrac{0}{10}=0$,即$\dfrac{x-5}{x+5}$是$x\to 5$ 时的无穷小量,由无穷小量与无穷大量的倒数关系,可得$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+5}{x-5}=\infty$.

(4) 所给函数的分子、分母的极限均为 0,但它们都有趋向于 0 的公因子$(x-1)$,可约去这个不为零的公因子,再利用商的极限运算法则,便可求出所给极限,故
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

例 16 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$($\infty-\infty$型).

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-1.\end{aligned}$$

寻找致零因式常用的方法有:

(1) 若是有理分式的极限,则需把分子、分母分别分解因式;

(2) 若是无理分式的极限,则需要把分子、分母有理化.

例 17　求极限$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=2\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

例 18　求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

解　$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{100}{\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}+1}=-50.$

例 19　求极限$\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解　因为$|\sin n!|\leqslant 1$,所以$\sin n!$是有界函数.

又
$$\lim_{n\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}=\lim_{n\to-\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n+1}=\lim_{n\to-\infty}\frac{n^{-\frac{1}{3}}}{1+\dfrac{1}{n}}=0,$$

利用有界变量与无穷小的乘积是无穷小,知

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}=0.$$

例 20　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x^2}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解　(1) 因为$\left|\cos\dfrac{1}{x^2}\right|\leqslant 1$,所以$\cos\dfrac{1}{x^2}$是有界函数.又因为当$x\to 0$时,$x$是无穷小量,故由无穷小量的性质,可得$\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x^2}=0$.

(2) 变换一下形式,与上题同理,可得$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=2$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\xlongequal{令\ x=\sin t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\sin t}=1$.

例 21　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+c}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot ab}\cdot\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{c}\right]=e^{ab}\cdot 1^{c}=e^{ab}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{2x+1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{2x+1}{-2}}\right)^{-\left(\frac{2x+1}{-2}\right)+\frac{5}{2}}$

$$\xlongequal{\text{令 } u=\frac{2x+1}{-2}}\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-u+\frac{5}{2}}=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-u}\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$=e^{-1}\cdot 1=e^{-1}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x}\cdot(-6)}=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x}}\}^{-6}=e^{-6}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1-2x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\ln e^{-2}=-2$.

例 22 利用等价无穷小的替换求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{\sin 3x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{\sin 5x}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}$.

解 (1) 因为 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 因为 $x\to 0$ 时，$\sin 3x\sim 3x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

(3) 因为 $x\to 0$ 时，$\arctan 2x\sim 2x$，$\sin 5x\sim 5x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan 2x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{5x}=\dfrac{2}{5}$.

(4) 因为 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$.

例 23 设 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时是否有极限，在点 $x=0$ 处是否连续.

解 $f(x)$ 是分段函数，由于 $f(0)=0$，考察函数在点 $x=0$ 处的左、右极限：

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2,\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2\right)=2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2\neq f(0)=0$，故函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

例 24 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \ln(b+x^2), & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________，

$b=$________.

分析 求解此类问题的基本思想是，根据分段函数在其分段点处的性质来确定所含常数的值.若已知函数在某点连续，则根据函数在该点连续的充要条件求解.

解 因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}=\dfrac{a}{2}\left(1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\right)$,

$$f(0+0)=\lim_{x\to0^+}\ln(b+x^2)=\ln b,$$

所以函数 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

故$\dfrac{a}{2}=1=\ln b$，得 $a=2,b=\mathrm{e}$.

注 求分段函数在分段点的极限可利用左、右极限讨论.

例 25 证明：方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一个根.

分析 要证方程在某个区间内有根，一般可用零点定理.

证 令 $f(x)=x^3-4x^2+1$，则 $f(x)$在$[0,1]$上连续.

又 $f(0)=1>0,f(1)=-2<0$，由零点定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0.$$

所以方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间$(0,1)$内至少有一个根 ξ.

四、学习测试

1.1 函 数

一、选择题

1. 在下列几对函数中，$f(x)$与 $g(x)$相同的是 ( )

(A) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ (B) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$

(C) $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$ (D) $f(x)=1$ 与 $g(x)=\dfrac{x}{x}$

2. 函数 $y=x+\tan x$ 是 ( )

(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 非奇非偶函数 (D) 有界函数

3. 函数 $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$是定义域内的 ( )

(A) 周期函数 (B) 单调函数 (C) 有界函数 (D) 无界函数

4. 函数 $y=|\sin x|$的周期是 ( )

(A) $\dfrac{\pi}{2}$ (B) π (C) 2π (D) 4π

5. 下列函数是基本初等函数的为 ( )

(A) $f(x)=x+1$ (B) $y=\sin\sqrt{x}$

(C) $f(x)=x^{\sqrt{2}}$　　(D) $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$

6. 下列函数不是初等函数的是 (　　)

(A) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$　　(B) $y=\begin{cases}1+x, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0\end{cases}$

(C) $y=\sqrt{-2-\cos x}$　　(D) $y=\left[\dfrac{\sin(e^x-1)}{\lg(1+x^2)}\right]^{\frac{1}{2}}$

7. 下列函数不是复合函数的是 (　　)

(A) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$　　(B) $y=e^{1+x^2}$　　(C) $y=\ln\sqrt{1-x}$　　(D) $y=\sin(2x+1)$

8. 函数 $y=3^{\sin 2x}$是由下列哪些初等函数复合而成的 (　　)

(A) $y=3^u, u=\sin v, v=2x$　　(B) $y=3, y=\sin 2x$

(C) $y=3^{\sin u}, u=2x$　　(D) $y=3, y=\sin 2x, y=2$

二、填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x>1,\\ x, & x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $f[f(2)]=$____________.

2. 函数 $y=\sqrt{4-x}+\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 的定义域是____________.

3. 函数 $y=\sqrt{x^3+3}$的值域是____________.

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$, $g(x)=x-1$,则它们在区间__________上是相同的函数.

5. 函数 $y=-x^2+1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调________,在区间 $[0,+\infty)$ 上单调________.

6. 函数 $y=\tan(3x^2+2)$是由函数____________和____________复合而成的.

7. 由函数 $y=e^u, u=\sin v, v=3+x$ 复合成的函数是____________.

三、计算题

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{5x+8}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$;

(3) $y=\cos\sqrt{x}$;　　(4) $y=\ln(2+x)$.