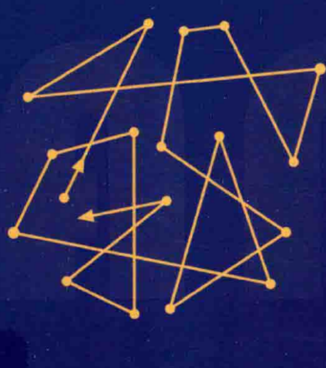
金融新视野

BROWNIAN MOTION

基于分数布朗运动的金融衍生品定价

黄文礼　著



厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

金融新视野

BROWNIAN MOTION

基于分数布朗运动的金融衍生品定价

黄文礼　著

厦门大学出版社 国家一级出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS 全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

基于分数布朗运动的金融衍生品定价/黄文礼著. —厦门:厦门大学出版社,2019.1
(金融新视野)
ISBN 978-7-5615-7086-9

Ⅰ.①基…　Ⅱ.①黄…　Ⅲ.①金融衍生产品—定价—研究
Ⅳ.①F830.95

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 203755 号

出 版 人 郑文礼
责任编辑 吴兴友
封面设计 李嘉彬
技术编辑 朱 楷

出版发行 厦门大学出版社
社　　址 厦门市软件园二期望海路 39 号
邮政编码 361008
总 编 办 0592-2182177　0592-2181406(传真)
营销中心 0592-2184458　0592-2181365
网　　址 http://www.xmupress.com
邮　　箱 xmup@xmupress.com
印　　刷 厦门集大印刷厂

开本 889 mm×1 194 mm　1/32
印张 5.25
插页 2
字数 140 千字
版次 2019 年 1 月第 1 版
印次 2019 年 1 月第 1 次印刷
定价 28.00 元

厦门大学出版社
微信二维码

厦门大学出版社
微博二维码

黄文礼，博士，现任职于浙江财经大学中国金融研究院，并担任校级创新团队首席专家。重点研究领域：公司金融、资产定价、金融风险管理以及金融科技等。曾出版译著和专著多部，如《资产证券化与投资市场——来自中美市场一线的探索》《新版小微金融手册》《中国上市公司竞争力排名蓝皮书》；并在国内外学术杂志，如《系统工程理论与实践》、*North American Journal of Economics and Finance*、*International Review of Economics and Finance* 等发表论文 40 余篇，相关研究被券商研究部门转载或引用。

他的学术兼职：浙江大学互联网金融研究院研究员，华中科技大学中国金融研究中心兼职研究员，*Economic Modelling* 特刊 Chief Guested Editor，《金融科学》编委。

金融学的核心是金融资产定价，而对金融衍生品进行合理的定价是研究的主要内容。传统的B-S期权定价公式假设标的资产满足几何布朗运动，与之不同的是本书假定标的资产服从分数几何布朗运动。本书从三个方面讨论了Ito型分数金融市场下的期权定价问题，分别是非完备市场中的期权定价问题、随机利率下的期权定价问题、跳—扩散模型下的期权定价问题，推导出了期权定价的一系列结论，并且将讨论的结果应用于两个结构性金融产品当中，还考虑了结构化模型下的信用风险建模。

本书出版受到浙江省自然科学基金（LY19G010005）的资助

摘　要

经典金融学的核心是金融资产定价，而对金融衍生品进行合理的定价是研究的主要内容，也是金融数学领域最基本和最重要的研究领域之一。作为期权定价里程碑的 Black-Scholes-Merton 公式自 1976 年问世以来就得到了广泛的认可，Black 和 Merton 也因为这个奠基性的工作于 1997 年获得了诺贝尔经济学奖。但是这个公式赖以成立的一个重要假设是标的资产服从几何布朗运动，然而大量的实证研究发现，标的资产在绝大多数情况下并不符合几何布朗运动的特性，而与分数几何布朗运动的特性相符合。为此很多学者提出用分数布朗运动来代替布朗运动。本书从三个方面讨论了 Ito 型分数金融市场下的期权定价问题。

第一个方面是非完备市场中的期权定价问题。我们以带比例交易成本的期权定价问题为例，应用分数布朗运动随机积分理论和偏微分方程方法推导出了分数布朗运动驱动下带交易成本的欧式期权定价问题，得到了欧式期权价格的显式解。并证明了欧式期权看涨—看跌的平价公式，得到了与标准布朗运动条件下类似

的一系列公式。作为本部分的结束,我们还考虑了带比例交易成本的永久美式看跌期权的定价问题,给出了它的显式定价公式,讨论了 Hurst 指数对期权价格的影响。

第二个方面是随机利率下的期权定价问题。我们以利率服从分数 Vasicek 随机利率模型为例,讨论了期权定价问题。在假定标的资产价格和利率的运动过程服从几何分数布朗运动的条件下,利用风险对冲技术,分数布朗运动随机分析理论与偏微分方程方法,得到了分数 Vasicek 随机利率下欧式期权所满足的定价方程,获得了标的资产波动率是时间函数的情形下欧式看涨和看跌期权的一般定价公式以及它们的平价公式。

第三个方面是跳—扩散模型下的期权定价问题。在这个问题中,我们利用复合泊松过程来刻画标的资产的随机跳跃,并且假设扩散过程是一个分数布朗运动。我们运用测度变换技巧和拟鞅定价方法,得到了欧式看涨期权定价的显式公式。

最后,我们将以上讨论得到的结果应用到实际的金融市场中,书中对两个结构性金融产品做了有关条款设计和定价机制方面的讨论。我们还考虑了结构化模型下的信用风险建模。

关键词:分数布朗运动;交易成本;分数随机利率模型;分数跳—扩散模型;保本基金;可转换债券;信用风险建模。

Abstract

Financial asset pricing is the core issue of classical finance. The pricing theory of financial derivatives is the main content of financial asset pricing, also it is one of the most fundamental and substantial areas in mathematical finance. Option pricing theory has a long and illustrious history, but it also underwent a revolutionary change in 1973. The break-through in option valuation theory started with the publication of two seminal papers by Black & Scholes and Merton.

The Black-Scholes model has become the most popular method for option pricing and its generalized version has provided mathematically beautiful and powerful results on option pricing. Nevertheless, classical mathematical models of financial assets are far from perfect. One apparent problem exist in the Black-Scholes formulation, namely financial processes are not Markovian in distribution. In fact, behavioral finance as well as empirical studies show that there exists long-range dependence in stock returns and they verified that long-range dependence is one of the genuine features of financial markets. Behavioral finance also suggests the return distributions of stocks are leptokurtic and have longer and fatter tails than normal distribution and there exists long-range dependence in stock returns. These fea-

tures have some difference with the standard Brownian motion, while in accordance with the fractional Brownian motion. The fractional Black-Scholes model is a generalization of the Black-Scholes model, which is based on replacing the standard Brownian motion by a fractional Brownian motion in the Black-Scholes model.

This book is devoted to the financial derivatives pricing problem in a fractional Ito type financial market, where we want to establish the mathematical model for the financial market in fractional Brownian motion setting, by assuming the underlying asset price obeying the stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion. Three topics are studied in this book.

The first topic is the option pricing problem in incomplete market. We focused on option pricing with proportional transaction costs. The problem is completely solved using the fractional Brownian motion theory and PDE approach. We obtain the general pricing formula for the European option with transaction costs. Meanwhile, we get the explicit expression for the European option price with transaction costs and the call-put parity. The perpetual American put option pricing problem is also considered.

The second topic is the option pricing problem when the risk-free interest rate is stochastic. In this part, we take fractional Vasicek Model as an example of stochastic interest rate. We establish the mathematical model for the financial market in fractional Brownian motion setting. Using

the risk hedge technique, fractional stochastic analysis and PDE method, we obtain the general pricing formula for the European option with stochastic interest rate. At the same time, we get the explicit expression for the European option price with stochastic interest rate and the call-put parity. As we will show, the results in this part extend as well as improve previously known results.

The third topic is the option pricing problem when underlying asset returns discontinuous. In this problem, we use compound Poisson process to characterize the jump, and we assume the underlying asset is driven by a mixture of both continue and jump processes, where we characterize the continue by a fractional Brownian motion. We call the process as the fractional jump-diffusion model. Using measure transformation technology and quasi-martingale approach, we derive the option pricing formula under fractional jump-diffusion model.

Finally, we apply these results to the actual financial markets, including segregated funds pricing problem, convertible bonds pricing problem and credit risk modeling problem.

Keywords: Fractional Brownian Motion; Transaction Costs; Fractional Stochastic Interest Rate Model; Fractional Jump-diffusion Model; Segregated Funds; Convertible Bonds; Credit Risk Modeling.

目录

1 引言

> 自从以1952年的Markowitz证券组合选择理论和1973年的Black-Scholes期权定价理论为标志的两次“华尔街革命”以来，经典金融学的宏伟大厦就拔地而起。而这座大厦的基石则是数学。
>
> ——史树中[134]

1900年，法国数学博士巴舍利耶(L. Bachelier)在他的题为《投机理论》[10](Theory of Speculation)博士论文中，第一次将数学期望的概念应用于市场中证券类金融资产的定价问题，其核心思想是“证券当前的价值等于其不确定的未来价值的数学期望”。而当巴舍利耶将数学期望的概念应用于多期或者连续时间的金融资产定价问题时，很自然地就引出了对于经典金融学极为重要的一些数学概念如随机游走(random walk)、布朗运动(Brownian motion)和鞅(martingale)等。该文中对股票价格的演化路径所做的“算术布朗运动”假设，为以数学方法研究股票价格行为奠定了基础，从而正式拉开了数学在金融学中广泛应用的帷幕。虽然现代金融实证分析的结果表明，股票价格本身并不遵循“算术布朗运动”(实际上，如果股票价格遵循“算术布朗运动”，意味着股票价格有可能取到负值，这和现代公司理论中的股东只承

担有限责任相违背)，而是股票本身的收益率的变化体现出“算术布朗运动”的特性，然而这丝毫不影响巴舍利耶作为现代金融学先驱的地位。可惜的是，巴舍利耶的工作在其生前始终没有得到其他学者的认可和重视，如同他的人生一样，他的这一成果在暗淡中沉寂了半个世纪。直到 1954 年，该论文才被芝加哥大学统计学教授萨维奇(L. J. Savage)[131]无意中发现，并对萨缪尔森(P. A. Samuelson)后来研究股票价格行为以及之后的期权定价所用的概率论、Ito 定理和随机微分方程等都有重大影响。

1952 年，马柯维茨(H. Markowitz)在《金融学杂志》上发表了他的博士论文《资产组合选择》[108]为资本市场研究和投资行为分析提供了一个理论基础，他用资产价值的波动率来刻画风险，并第一次明确地用数学工具证明了如何选取金融资产组合，使得当它的“预期收益与风险”有一种最优的权衡，即：这些组合在风险一定时预期收益最高；或者在预期收益一定时，确定风险最低的证券组合。这些组合所形成的边界就是所谓的“有效前沿边界(efficient frontier)”，只要投资者的目标是在收益和风险之间进行权衡，那么最有效的做法就是在“有效前沿边界”上进行投资组合的选择。上述马柯维茨的资产组合选择理论亦被人们称为“均值—方差理论”，它揭示了不同证券价格之间的协方差起着极为重要的作用，因为协方差是决定所建立的证券组合选择的非系统风险的关键因素。正是由于马柯维茨的这一工作，人们才完全意识到构建证券组合时分散化思想对于降低非系统性风险(unsystematic risk)①所起的重要作用。由于他的开拓性工作，马柯维茨获得了1990年由瑞典皇家科学院颁布的诺贝尔经济学奖，他本人亦被称为“证券投资理论之父”。之后，马柯维茨的基础性工作得到了进一步的具体发展，其直接结果是导致两种经典理论的产生：1964年威廉·夏普(W. Sharpe)的资本资产定价理论(capital asset pricing model, CAPM)和1976年罗斯(Ross)套利定价理论(arbitrage pricing theory, APT)。1958年托宾(J. Tobin)[138]将货币因素考虑到马柯维茨的理论中，得到了著名的“双基金分离定理”。1963年，马柯维茨的学生威廉·夏普推进了马柯维茨和托宾的工作，他通过引入市场组合的概念简化了证券分析模型。随后，威廉·夏普[133]按照马柯维茨的投资原则和市场出清条件，证明了任何资产的预期收益都是无风险利率和市场组合收益率的线性函数，这就是著名的“资本资产定价理论(CAPM)”，该理论的核心内容是单个资产或者证券组合的预期收益只与其总风险中的系统性风险②有关。随后，林特纳(J. Lintner)[99]和莫辛(J. Mossin)[199]等人对“资本资产定价理论(CAPM)”进行了必要补充，因此资本资产定价模型又叫作Sharpe-Lintner-Mossin理论。这个理论的出台，掀起了金融学术界对资本资产定价理论研究的热潮，并出现了大量的成果。然而却受到了罗尔(Richard Roll)[127]的批判，

---

① 非系统性风险也称为可分散风险、异质风险、剩余风险等，它可以通过分散化来降低，即投资者可以通过构建投资组合来影响它的大小。

② 系统性风险也称为不可分散风险、市场风险，它是不可以通过分散化来降低的。

其主要论点是 CAPM 模型下的市场组合不仅限于股票指数，而且还包括经济体中的一切有形和无形的财富，如债券、地产、人力资本等。由于存在不可观测的财富，使得我们不可能对 CAPM 模型进行实证检验。因为假设实证数据不支持 CAPM，我们无法判断是由于 CAPM 模型本身的问题还是由于实证中所采用的市场组合本身不是效率组合的问题。为克服不可检测性，罗尔强调用“套利定价理论(APT)”来代替“资本资产定价理论”。“套利定价理论”是由罗斯[128]等人提出的。不同于以消费为基础、采用市场均衡定价法的 CAPM 理论，APT 理论采用的是相对定价法，正如罗斯所说的“它(APT)运用更多的是套利关系而非均衡关系”。它以资本市场无套利原理和充分分散化资产为依据，证明了资本资产价格是少数几个基本因素的线性函数，奠定了研究资本市场价格的理论框架。“资本资产定价理论”和“套利定价理论”两种理论阐述了某种证券的收益是怎样形成的和由什么确定的。其中前者认为它依赖于该证券所在的整体市场环境，后者强调这种收益依赖于怎样的因子，在金融计算时应该由怎样的概念出发。至此，以马柯维茨、威廉·夏普、林特纳和莫辛以及罗斯等人的工作为标志的“第一次华尔街革命”降下了历史帷幕。

“第二次华尔街革命”始于 20 世纪 70 年代，其标志是布莱克、斯科尔斯和莫顿等人在 CAPM 模型、APT 模型等理论的基础上发展出了金融产品定价理论。巴舍利耶在其博士论文中提出用算术布朗运动来模拟股票价格的变化，为了进一步克服此假设下资产价格会有负值出现的问题，1965 年萨缪尔森[129]对该模型进行了修正，提出了股票的收益率服从算术布朗运动的假设，即假设股票价格服从几何布朗运