无网格法
理论与算法

Meshless Method: Theories and Approaches

杨建军　文丕华/著

科学出版社

无网格法
理论与算法

Meshless Method
Theories and Approaches

杨建军　文丕华　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书以简明易懂的方式，系统地介绍了无网格法的基本理论及各种代表性算法，使初学者很容易掌握这一计算方法的原理和知识。在内容组织上，以固体力学作为应用背景，以无网格法“介点原理”为主线，较为全面地介绍了无网格全局弱式法、局部弱式法、配点类方法、边界型方法和结合式方法等各类离散方法的基本原理及其算法。此外，对移动最小二乘近似法(MLS)的简化和稳定化、介点原理的应用，以及对配点类方法的完善和发展，是本书重点阐述的内容。

本书可作为应用数学、力学、土木、机械、航空航天等专业高年级本科生、研究生的教材，也可供相关专业教师、工程技术人员和科研人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

无网格法：理论与算法/杨建军，文丕华著. —北京：科学出版社，2018.12
ISBN 978-7-03-060300-5

Ⅰ. ①无… Ⅱ. ①杨… ②文… Ⅲ. ①网格计算-研究 Ⅳ. ①TP393.028

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 297154 号

责任编辑：刘信力 郭学雯／责任校对：杨聪敏
责任印制：肖 兴／封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市春园印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 12 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2018 年 12 月第一次印刷 印张：16
字数：312 000

定价：128.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

无网格法从 20 世纪末开始兴起，是 21 世纪初以来计算力学领域研究最为活跃、进展最为显著的计算方法分支。英国物理学家牛顿曾经讲过：“要想探求自然界的奥秘，在于解微分方程。”法国数学家拉普拉斯也有类似的观点：“只要能解微分方程，我就能预测宇宙的过去和将来。”由此说明，求解微分方程对人类深刻理解自然客观规律是何其重要。

或许超乎想象，我们周围的自然世界和人工设备，其状态和运行只是被非常有限的几个微分方程所统治。比如，建筑物的安定与失稳，机车或飞行器平稳运行或破坏，江河的奔流与变迁，气候的变幻莫测，星系的诞生和演化等，这些现象都可以被微分方程所定义。在这些微分方程中，有三类是最主要和最基本的：一是描述振动和波动特征的波动方程；二是反映输运过程的扩散 (热传导) 方程；三是描绘稳定过程的泊松方程。这些方程在形式上都很简单，但对于实际的问题而言，由于几何结构的复杂性，或者是边界条件的复杂性，求解这些方程却并不总是一个简单任务。

无网格法正是一种借助散点信息，应用计算机技术求解微分方程的计算科学方法。该方法学的研究需要集合数学、物理学和计算机工程学等多种学科的知识体系，并发展对应的理论、算法和计算程序等成果。单纯以力学的观点而言，无网格法可被应用于固体力学、流体力学、热力学、电磁力学、生物力学、天体力学、爆炸力学、微观力学等分支领域。

无网格法以散点信息作为计算要素，在计算模型构建时无须构造复杂的网格信息。相比于以有限元法为代表的传统网格类方法，无网格法具有诸多竞争优势。一是具有数值实施上的便利性，用散点进行离散要容易得多，尤其对三维问题而言，散点离散具有明显的便捷性；二是无网格法的近似函数通常是高阶连续的，保证了应力结果在全局的光滑性，无须进行额外的光顺化后处理；三是容易实现自适应分析，散点的局部增删和全局重构很容易实现，在计算收敛性校验和移动边界问题中具有明显优势；四是具有求解的灵活性，无网格法避免了对网格的依赖，也就无须担心网格畸变效应，因此容易处理大变形、断裂、冲击与爆炸等一些特殊问题；五是对物质对象描述的普适性，“点”是最基本的几何元素，容易实现对天文星系、原子晶体、生物细胞等物质结构的直接描述。因此，无网格法作为一种易于实施、具有更广泛适用性的数值求解技术，被学者誉为“新一代计算方法”。

近年来随着无网格法的快速发展，新的观点、新的理论、新的算法层出不穷，

相关研究呈现“百家争鸣、千花齐放”的繁荣景象。国内外一些学者也先后出版了无网格法的专著，比如 S. N. Atluri、G. R. Liu、T. Belytschko、张雄、陈文、程玉民等陆续有专著面世。即便如此，作者还是希望借助本书的出版，能够推介基于作者认知和理解的独立学术观点，更全面地梳理无网格法的主要发展成就，介绍新近的无网格法研究成果。即使难辞挂一漏万之嫌，本书作为一家之言或可有些许参考之益。

时光如流水，飘忽不相待。本书是作者 10 余年来在此研究专题上的一个阶段性总结。同时，本书能得以完成，也有赖于更广泛的同行和学者在此研究专题上的贡献。本书在内容的取舍上，虽然希望尽可能不遗漏一些重要的研究工作，但在浩如烟海的研究文献面前，达成这样的目标显然并不现实。在推荐和评论研究工作时，虽然希望尽可能保持公允而客观的态度，事实上却难以避免作者学术观点的偏好和视野的局限性。作者虽然尽可能地努力来完善本书的内容，但很多方面依然难尽如人意，希望读者批评指正。

作者特别感谢国家自然科学基金 (No.51478053) 对本书研究工作的资助和支持!

作　者

2018 年 5 月于长沙

目　录

第1章　绪　　论

计算方法和理论分析、实验统计并列为科学研究的三大支柱 [1]。我们面临的力学问题中，许多实际问题通常很难通过解析方法得到问题的精确解，需要借助数值方法求解。除了少数情况，要得到微分方程的解析解是很困难的。而对微分方程进行数值求解，必须将问题域的几何结构进行离散化，将包含无限个自由度的问题域转换为有限个自由度的计算单元。传统上，这些单元是由网格来描述的。这样的离散化处理，可以将一个连续的微分方程求解问题转换为离散化的代数方程问题进行求解，从而使人工计算转化为计算机计算成为可能。当今，借助计算机执行的数值计算方法已经成为求解各种复杂力学问题的重要手段，数值计算方法已经成为工程科学的基本工具之一 [2]。我们面临的实际问题通常可进行必要的简化和假设后建立起数学模型，这些数学模型一般是用包含边界条件和初始条件的偏微分方程 (或者是常微分方程) 描述。

1.1　传统计算力学方法概述

1.1.1　有限元法

有限元法 (finite element method, FEM) 是基于网格离散思想的一种主流计算方法，是计算力学领域最重要的分支之一，并具有良好的通用性。FEM 作为一种独立的计算方法，其名称在 1960 年由 Clough[3] 提出，并在此后得到迅速发展 [4-6]，被誉为 “20 世纪工程科学领域最为重要的成就之一”[7]。该法基于 Lagrange 描述法，即用网格直接描述求解对象，而且网格同时描述力学场，整个计算过程中网格是附着于物质结构的，力学场上的点会追随物质结构上的点运动，即网格会随着结构的运动而运动。

FEM 基于 Lagrange 描述法的优点为：其一，力学场与物质结构实现统一描述，计算实施上相对简单而高效；其二，物质点上的所有场变量的整个时间历程可以很容易地追踪；其三，结构的物质特性容易描述，比如，对于非均匀材料问题，可在材料交界面处设置网格节点，其边界条件可通过这些节点自动施加和追踪；其四，网格只需在实体几何域内布置，网格数使用量相对较少，所以计算效率高。

然而，FEM 也有一定的局限性，主要表现在：

其一，难以应对结构大变形的情况。由于力学场与物质结构的结合性，所以节

点的相对位移会导致网格单元的扭曲变形。因为场变量的近似函数是以网格为基础的，当网格变形太大的时候，近似精度将受到影响，从而导致求解结果失真，甚至出现计算终止的情况。

其二，实现自适应分析比较困难。克服网格畸变的方案就是在计算过程中自动识别，当网格变形超过设定的允许范围时，重新划分网格，我们通常将这种技术称为自适应分析。然而，重新划分网格通常有较大难度，尤其是结构较为复杂时。此外，自适应分析将很多计算时间用于网格划分，往往导致计算低效。

其三，建模成本较大。由于 FEM 使用网格来描述对象，对于结构复杂的问题，尤其是三维问题，当几何结构比较复杂时，对结构的网格划分，并得到协调优质的网格，是一个非常烦琐的工作，需要投入大量的人力成本。

其四，对移动边界问题难以处理。FEM 中的网格需要严格的连通性要求，在分析一些特殊问题，如断裂、结构破坏和爆炸等移动边界问题时，通常很难处理。

其五，对粒子类物质体系不能直观描述。如果物质体系是以粒子来表现的，比如微、细观上的原子晶体、分子团，或者超宏观上的宇宙星系。用网格只能来描述宏观的力学场，与真实的物质结构体系将很难对应，网格的空间特性与物质的结构性将不能统一。

1.1.2　有限差分法

有限差分法 (finite difference method, FDM) 是基于网格离散思想的另外一种计算方法，其发展历史差不多与 FEM 同时开始 [8-10]。该法基于 Euler 描述法，即网格张在一个规划区域上，并用网格来描述此区域的力学场，而且该区域应覆盖描述对象的运动区域。当物质结构穿过网格时，网格单元是固定的，不随物质的运动而运动，在整个计算过程中网格单元的形状都保持不变。因此物质结构的大变形不会引起网格本身的变形，所以该法能很好地适应大变形问题。

但 Euler 法也有一些缺点，例如，其一，由于网格只能等待物质运动引起的响应，对物质运动不能追踪，因此对物质点上的场变量时间历程很难分析；其二，很难处理复杂的几何结构问题，对物质界面的力学描述不够精确；其三，网格划分区域通常要大于物质结构几何区域，这就意味着需要使用更多的网格进行离散，所以计算效率通常低于有限元法；其四，也是最为重要的一点，Euler 描述法所建立的求解方程通常要复杂得多，远不及 Lagrange 描述法那么简单直接。因此，在实际应用中，FDM 与 FEM 相比，应用的广度和范围不具有竞争优势。

1.1.3　边界元法

边界元法 (boundary element method, BEM) 是稍晚于 FEM 而发展起来的，早期比较有影响力的是 Rizzo 和 Cruse 的研究工作 [11,12]。而使用 “边界元法” 作为此

类方法的专有名称，则直到 1977 年由 Brebbia，Dominguez，Banerjee，Butterfield 等 [13] 共同商定，此后相关的专著陆续得到出版 [14,15]。与区域解法不同，BEM 是一种求解边值问题的数值方法。该法以边界积分方程为数学基础，同时采用了与 FEM 相似的网格单元离散技术。该法借助特定问题解析得到的基本解函数，在域内已满足泛定的方程，并可用有限个边界上节点的解的叠加来满足给定的边界条件。BEM 的最大特点是降低了问题域的网格离散维数，问题域内不需要划分网格，只需在边界上设置网格，从而大幅度节约了网格离散的工作量。它只以边界变量为基本变量，域内未知量可以在需要时根据边界变量求得。

BEM 的优点可以归纳为 [13]：其一，BEM 通常可获得高精度的数值解。由于在边界积分方程中采用了解析基本解，因此相应的数值方法实际上是一种半解析、半数值方法，故通常具有比一般数值方法更高的计算精度。其二，因为 BEM 仅需在边界上使用网格离散，单元数相对于 FEM 和 FDM 要少得多，因此具有更高的计算效率。其三，BEM 比区域解法降低了离散维度，其直接好处就是离散的便捷，很容易处理复杂的几何结构问题；此外，BEM 可以借助无限域的基本解函数，很容易处理无限域问题。其四，BEM 仅需边界离散的特点，使其特别适用于仅部分边界条件可探测的工程反问题。

但是，BEM 也有其固有局限性。其一，BEM 在应用范围上受到限制。该法是以存在解析基本解为前提的，对于特定的一类问题均需寻求其解析基本解，对于较为复杂的问题，寻找这样的解通常是极具挑战性的一项工作。而有些问题，比如非均匀介质问题，解析基本解是不存在的，该法在此类问题上也就无能为力了。其二，BEM 不宜用于大规模求解问题。由于该法的系统方程组系数矩阵是满阵，而且通常为非对称阵，这一弱点限制了其求解规模。

1.2 无网格法简介

无网格法 (meshless method) 是一种基于散点近似，用于求解偏微分方程问题的数值计算方法。不同于基于网格的传统数值计算方法，无网格法的计算框架是基于散点的，即无网格法使用的基本单元是离散的场节点，场变量的近似函数是通过预定义的散点信息进行描述的。无网格法作为一种独立数值方法的专有名称直至 1996 年才出现，在 Belytschko 等 [16] 的一篇综述性文献中，用 meshless method 作为标题来评述此类方法，这个命名随后得到学者的认可，逐渐成为一种较为通用的名称。为了进一步了解无网格法的特点，我们将其与其他方法进行一个简单的比较，其比较信息列于表 1-1 中。

基于网格的传统数值方法已经非常成熟，其中 FEM 是应用最为广泛的一种计算方法。然而这些使用网格框架求解的方法也面临许多挑战，比如，对一些复

表 1-1　无网格法与其他数值方法的比较

Table 1-1　Meshless method in comparison with other numerical method

比较内容	无网格法	有限元法	有限差分法	边界元法
求解对象	偏微分方程	偏微分方程	偏微分方程	偏微分方程
单元类型	节点	网格	网格	网格
基本单元信息	位置信息	位置及连通信息	位置及连通信息	位置及连通信息
离散方案	散点	全局网格	全局网格	边界网格
形函数构造	散点近似	网格插值	差分插值	网格插值
形函数连续性	全局光滑	分片连续	分片连续	分片连续
理论基础	加权残值法	加权残值法	加权残值法	基本解方法
		变分原理		边界积分方程法

杂的几何结构，尤其是三维问题中，形成网格通常需要花费大量的人力成本，所以在数值实施上用于建模的时间通常要高于计算机求解时间。随着计算机技术的发展，FEM 的人工费用将比计算费用更高。对于一些实际问题，比如大变形问题等，基于网格求解的方法通常较难处理，因此在应用上受到诸多限制，数值方法的灵活性及适用性还不够理想。无网格法作为一种求解偏微分方程的方法，相比于其他基于网格的传统数值方法 (FEM，FDM，BEM 等) 具有如下优势：

其一，具有数值实施上的便利性。相比于用网格离散问题域，无网格法用散点进行离散要容易得多，尤其对三维问题而言，散点离散具有明显的便捷性。在计算成本越来越低，而人力成本越来越高的发展趋势下，无网格法的总体成本优势非常明显。无网格法的近似函数可以是全局高阶连续的，保证了应力结果在全局的光滑性，无须像 FEM 那样进行额外的光顺化后处理。

其二，容易实现自适应分析。为了保证数值解的精确性，或者特殊问题的需要 (如网格类方法消除网格的畸变)，数值方法须采用自适应分析技术。无网格法通常都是 h 自适应的，重新布设场节点或加密场节点要比网格类方法重新生成网格容易得多，因此无网格法处理自适应分析很容易实现。

其三，具有求解的灵活性。网格类方法处理一些特殊问题时，由于受网格的束缚，具有诸多的不适应性。而无网格法因为不使用网格，无须担心网格畸变，在问题域或移动边界上可以自由地增设场节点。因此，无网格法在处理大变形、断裂、流动、冲击与爆炸等问题时表现出更好的适应性。

其四，对求解对象具有描述的灵活性。自然界万物都能以“点”为基础描述，由点连线，由线造面，由面构体。对一些不适宜用网格描述的对象，无网格法也具有明显优势。比如，天文力学中在宇宙尺度下对星系的描述，微观物理学中对原子晶体的描述，生物力学中对分子或细胞的描述等。

此外，无网格法采用的散点近似法通常至少是二阶连续的，有关研究结果表

明，无网格法的求解精度通常要高于 FEM。因此，无网格法作为一种易于实施、具有更广泛适用性的计算方法，被一些学者誉为“新一代计算方法”。其应用前景值得期待，并受到学界广泛关注，已经成为近 20 年来国际计算力学领域最为活跃的研究专题之一。

1.3 无网格法研究简史

了解无网格法的发展历史可查阅 Belytschko 等 [16]、Li 和 Liu[17]、张雄等 [18,19]、Gu 和丁桦 [20,21] 等的综述性文献。此外 Liu 和 Gu[22,23]、Atluri 和 Shen[24,25]、张雄和刘岩 [26]、Belytschko 和 Chen[27]、刘更等 [28]、赵光明 [29]、刘欣 [30]、龙述尧 [31]、程玉民 [32] 等也先后出版了一些系统介绍无网格法研究成果的学术专著，参阅这些文献更有利于全面地了解无网格的研究状况。接下来，通过梳理一些比较重要的基本方法，来反映无网格法的研究进展。

1.3.1 无网格法的早期研究历史

无网格法的研究历史，甚至可以追溯到差不多与有限元法发展的同时代，不过早期的研究是零散的，不成体系的。研究的局部进展通常归类于传统方法中，或者将其列为一些具体的独特方法，一些文献也将早期这类方法统称为粒子法或自由网格法 [17]。

能检索到的最早的粒子类方法，可能是由 Harlow 等提出的一种用于模拟流体动力学行为的胞含粒子 (PIC) 法 [33-37]，PIC 法在 Euler 网格内设置一组粒子，粒子携带质量和位置信息，便于追踪物质的运动。而在背景网格上构造差分近似，并计算空间导数。因此，该法兼具 Lagrange 和 Euler 特性。PIC 法的弱式离散形式及其算法优化后又衍生出两种方法，分别称为流体隐含粒子 (FLIP) 法 [38,39] 和物质点法 (MPM)[40-44]。

在 FDM 的计算框架下，Giraul[45]，Perrone 和 Kao[46]，Liszka 和 Orkisz[47-49] 等发展了广义有限差分法 (GFDM)，此类方法在差分网格的基础上，使用距离函数抓取必要的节点执行计算，由于该法已经具备散点近似的一些特征，故可将其视为早期无网格法的一种表现形式。

为了模拟宇宙星系的演化，Gingold 和 Monaghan[50,51]，Lucy[52] 等提出了光滑粒子流体动力学方法 (SPH)，该法使用 SPH 近似与配点离散技术结合，是一种真正意义上的无网格方法。SPH 法有两个特点：其一是近似的自适应性，即场变量近似基于当前时刻的粒子分布信息，因此很容易处理一些极大变形问题；其二是粒子的材料性，即用于域离散的粒子兼具空间点和物质点两种功能，因此在处理液体流动、冲击与爆炸等一些特殊问题时更具灵活性，是一种应用非常广泛的方法 [53-57]。

专门用于流体计算的还有另外一种粒子方法，其出现略早于 SPH 法，即 Chorin，Leonard 等 [58-62] 提出的涡流法 (vortex method)。该方法通过求解流速–涡量方程来分析流体涡流现象，是一种专门化的数值方法，其应用范围不及 SPH 法广泛。

此外，描述分子运动特性的分子动力学 (MD) 方法 [63-68]，是早期发展的一种非常重要的粒子类方法，该法主要在物理学领域用于计算物质体系的热力学量和其他物理性质。由 MD 方法逐步衍生出的格子玻尔兹曼法 (LBM)[69-71]，在 20 世纪末期得到迅速发展，并被广泛用于流体动力学分析 [72-75]。

1.3.2　近代无网格法研究进展

无网格法真正得到迅速发展，并成为一种明确的研究趋势，则是从 20 世纪末全局弱式法的提出开始的。1992 年，Nayroles 等 [76] 为了克服有限元法的一些固有局限性，提出了采用扩散近似的广义有限元法，因为这种方法已经具备了无网格法的基本特点，后来的学者为了使其区别于有限元法，倾向于用扩散元法 (diffuse element method, DEM) 指代之。此外，DEM 所采用的扩散近似 [76,77]，实际上就是后来被广泛使用的移动最小二乘近似。DEM 提出后，引起了著名计算力学科学家、美国西北大学教授 Belytschko 的高度关注，并在 DEM 的基础上，对导数近似算法和本质边界条件施加方法进行了调整，提出了无单元伽辽金法 (EFG)[78]。此后 EFG 被广泛应用于模拟材料的断裂破坏，展现了该方法在特殊问题中优于传统 FEM 法的求解能力 [79-83]。1996 年，Belytschko 等发表了第一篇系统介绍无网格法的综述文献 [16]，并受到计算力学领域研究同行的广泛关注，这可以视为无网格法成为计算力学一个独立研究分支的开端。

弱式类无网格法的另一个重要进展就是局部弱式法的提出。1998 年，Atluri 和 Zhu[84] 提出了无网格局部彼得罗夫–伽辽金法 (MLPG)，该法积分时不需要背景网格，而仅在节点定义的局部积分域上完成，其离散系统方程是基于节点组装的，在数值实施上更加简洁，在多类问题中表现出广泛的适应性，是一种极具竞争力的无网格法 [85-95]。Zhu 等将边界解法的概念引入局部弱式，提出了局部边界积分方程法 (LBIE)[85,86] 和无网格正则局部边界积分方程法 (MRLBIE)[87]，Atluri 和 Shen[24,25] 在 MLPG 的基础上，通过调整检验函数，又构造出多种不同类型的 MLPGx 法，使得 MLPG 的研究内容非常丰富，其中 MLPG5 凭借其执行简单和计算效率较高的特点，在同系列方法中更具有优势 [94]。

无网格法研究的繁荣还体现在散点近似法的发展上，这些近似方法与不同的离散技术结合，又构成多种各具特点的方法。1995 年，Liu 等 [96] 提出了重构核粒子法 (RKPM) 近似，该近似法应用于伽辽金全局弱式离散，对应的无网格方法直接称为重构核粒子法 (RKPM)[96-99]。RKPM 近似应用于配点离散方法，被称为有限云法

(FCM)[100,101]，而在 RKPM 近似中增加 Hermite 插值特性的配点方法，又被称为 Hermite 云法 (HCM)[102,104]。1995 年，Braun 等 [105,106] 和 Traversoni [107] 提出采用自然邻接插值来构造近似的方法，此后，Sukumar 等拓展了该近似技术的应用，与伽辽金法离散技术结合的方法通常称为自然单元法 (NEM)[108] 和自然邻接伽辽金法 (NNGM)[109]，与局部弱式离散技术结合的方法被称为自然邻接彼得罗夫–伽辽金法 (NNPG)[110] 和彼得罗夫–伽辽金自然单元法 (PGNE)[111]。2001 年，Liu 和 Gu[112] 提出采用多项式基的点插值近似方法，其应用于伽辽金弱式离散的数值方法，即被称为点插值法 (PIM)，而应用于配点离散的数值方法，被称为点插值配点法 (PICM)[113]。1990 年，Kansa[114,115] 将复合二次函数 (multiquadrics (MQ)) 近似应用于数值计算方法，而 MQ 法是径向基近似的一种形式，Franke 等 [116,117] 则进一步发展了径向基近似与配点技术结合的方法 (RBC)。随即，Wendland[118] 提出了径向基近似与伽辽金弱式离散相结合的方法 (MGM)。Wang 和 Liu[119] 则提出采用多项式基与径向基耦合的点插值法构造近似函数，其与伽辽金弱式离散相结合的方法即被称为无网格径向点插值法 (RPIM)[120]，其与局部弱式离散相结合的方法即被称为局部径向点插值法 (LRPIM)[121,122]。1996 年，Duarte 和 Oden，Melenk 和 Babuška 等两个组分别独立地提出单位分解近似的概念，Duarte 和 Oden[123,124] 将发展的方法称为 Hp 云 (Hp-clouds) 法，而 Melenk 和 Babuška[125] 将发展的方法称为单位分解有限元法 (PUFEM)。单位分解近似与局部弱式离散结合的方法，又被称为有限球法 (FSM)[126]。2004 年，Lam 等 [127] 将 Kriging 插值法用于形函数构造，并将其与局部弱式离散技术结合，提出了局部 Kriging 法 (LoKriging)。2007 年，Shaw 和 Roy[128] 提出一种采用非均匀有理 B 样条 (NURBS) 基函数的误差核重构近似法 (ERKM)，其对应的全局弱式方法被称为误差重构无网格法 (ERMF)[129]。

配点离散技术的方法，通常具有纯无网格特性、执行简单、计算效率高的优点。随着无网格研究的深入，配点技术方法也得到进一步发展。1996 年，Onate 等 [130,131] 将 MLS 近似与配点离散技术结合，提出了有限点法 (FPM)，类似的还有 Lee 和 Yoon[132] 于 2004 年提出的无网格配点法 (MPCM)。2000 年，Breitkopf 等将 MLS 与配点技术结合，并引入估值点进行两阶段近似，提出了双网格扩散配点法 (DGDC)[133]。为了减轻传统配点法计算不稳定的问题，还发展了采用最小二乘离散技术的配点型方法，例如，Zhang 等 [134] 于 2001 年提出的最小二乘配点法 (LSCM)，Park 和 Yoon 于 2001 年提出的最小二乘无网格法 (LSMM)[135]，张雄等 [136] 于 2003 年提出的加权最小二乘无网格法 (WLSM)，Liu 等 [137] 于 2006 年提出的最小二乘径向基配点法 (LS-RPCM)，Kee 等 [138] 于 2007 年提出的规则化最小二乘径向基配点法 (RLS-RPCM)。为了消除配点法不稳定计算的问题，杨建军和郑健龙采用局部介点近似技术，于 2013 年提出了一种具有 h-p-d 适应性的无网格介点法 (MIP)[139,140]，于 2017 年提出采用有限点变分法导出的无网格全局介

点法 (MGIP)[141]。

为了克服单一一种离散技术方法的某些缺憾，或者是为了提高计算稳定性，或者是为了提高求解效率，抑或是为了便于施加边界条件，一类耦合离散技术的方法，或者是结合式方法也相继被提出。比如，Belytschko 等提出的有限元与 EFG 的结合法 (FE-EFG)[142]，Liu 和 Gu 提出的 EFG 与 BEM 的结合法 (EFG-HBEM)[143]、MLPG 与 FEM 的结合法 (MLPG-FE)[144]、配点与 MLPG 结合的弱强式法 (MWS)[145]，Pan 等提出的最小二乘配点与 EFG 相结合的无网格伽辽金最小二乘法 (MGLS) [146]，de Vuyst 等提出的 SPH 与 FEM 的结合法 (SPH-FE)[147]，Atluri 等提出的 MLPG 与 FDM 的结合法 (MLPG-FD)[148]、MLPG 与配点结合法 (MLPG-CM)[149]，Zhang 等提出的 EFG 和 BEM 结合的方法 (EFG-BEM)[150]，杨建军和郑健龙 [151] 提出的 MLPG 与 MIP 结合的无网格局部强弱法 (MLSW) 等。

借助无网格法的求解理念和研究成果，传统 FEM 也得到进一步发展。在有限元网格求解框架下，在局部采用单位分解技术，可以更为灵活地处理裂纹扩展问题，赋予 FEM 新的能力。此类方法的代表性成果有 Sukumar 等提出的扩展有限元法 (XFEM)[152-156]，Duarte 等提出的广义有限元法 (GFEM)[157,158]，一些学者也用 XFEM 统一指代此类方法 [159−161]。严格来说，此类方法应属于 FEM，但其最显著的新特性就是在特殊区域运用了无网格法的技术，因此可将此类方法列为无网格法研究的衍生性成果之一。

此外，将无网格近似技术应用于边界元法 (BEM)，便可消除其对网格的依赖性，进而发展出一类边界型无网格法。例如，Mukherjee 等提出的边界节点法 (BNM)[162,163]，Li 和 Aluru 提出的边界云法 (BCM)[164]，Zhang 等提出的杂交边界点法 (HBNM)[165]，Chen 等提出的边界配点法 (BCoM)[166]，Gu 和 Liu 提出的边界径向基点插值法 (BRPIM)[167]，程玉民和陈美娟提出的边界无单元法 (BEFM)[168]，Chen 提出的边界粒子法 (BPM)[169]、边界点法 (BKM)[170,171] 和奇异边界法 (SBM)[172,173]，Ren 等 [174] 提出的插值型边界无单元法 (IBEFM) 等。Yang 等 [175] 基于介点原理对 MFS 改进后提出 GMFS。

以上是对无网格法发展历史及目前已经发展出的无网格方法的一个简要总结。综上，可以将目前发展出的主要的一些无网格方法，按所使用的近似技术和离散方程导出规则列于表 1-2 中，这张表基本能够反映当前无网格法的研究，尤其是基本方法的发展现状。以上对无网格法研究进展的介绍是非常粗略与概括性的，具体方法的多样性和应用研究的繁荣已很难进行准确而细致的介绍。目前关于无网格法的应用研究方兴未艾，并已成功应用于天体物理学、微观粒子力学、流体力学、固体力学、断裂力学、爆炸力学、热力学、生物力学、电磁力学、拓扑优化等领域。