王铁行
罗　扬　　著
王娟娟

非饱和土水热传输机理及其工程问题分析

科学出版社

非饱和土水热传输机理
及其工程问题分析

王铁行　罗　扬　王娟娟　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

受到气候因素及其他水源、热源的影响，非饱和土体中的温度场和水分场是变化的。这种变化对工程的稳定性有重要影响，但因其复杂性尚存在诸多疑难问题，受到研究人员和工程技术人员高度重视。本书介绍了作者在非饱和土体水热随气候等的动态变化及由此引起的土体变形和强度破坏等方面的研究成果，包含非饱和土体温度场、水分场、应力场和位移场的机理性研究和工程问题分析，以期对读者深刻认识和分析非饱和土体水热问题有所裨益。

本书适合于高等院校土木工程、水利工程、环境工程等专业高年级本科生和研究生阅读，也可供岩土工程、建筑工程、道路工程、水利工程等行业从事土体水热病害处治的研究人员和工程技术人员阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

非饱和土水热传输机理及其工程问题分析/王铁行，罗扬，王娟娟著. —北京：科学出版社，2018.8

ISBN 978-7-03-058827-2

Ⅰ.①非…　Ⅱ.①王…②罗…③王…　Ⅲ.①饱和土-热传导-研究
Ⅳ.①TU44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 210302 号

责任编辑：姚庆爽 / 责任校对：何艳萍
责任印制：张　伟 / 封面设计：蓝正设计

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第　一　版　开本：720×1000　B5
2018 年 8 月第一次印刷　印张：17 1/2
字数：346 000

定价：110.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

我国北方地区的地表浅层土体基本上是非饱和土，是承载工程活动的主要土层。受到气候及其他水源、热源的影响，土体中的温度场和水分场是变化的。这种变化对工程的稳定性有重要影响，常常导致一系列病害的发生。含水量和温度的变化引起土体强度和变形指标以及冻融状态发生变化，可导致的病害有：路基工程沉陷、波浪、纵裂、水沟失稳等，水利工程冻胀、塌岸、砌体开裂等，市政工程冻胀、沉陷、网裂等，建筑工程地基沉降、结构开裂、管网断裂、地面隆起及沉陷等。大气温度降低使土体冻结时，土体体积增大，产生冻胀病害。大气温度升高使冻土消融，产生融沉病害。降水使边坡体的水量分布发生变化并导致坡体滑动的现象时有发生。土体水热病害给国民经济造成很大损失，严重影响了工程效能的发挥。

上述病害产生的原因是多方面的，主要有非饱和土体温度场因外界因素影响发生变化，温度变化引起水分迁移使含水量重分布，土体因含水量增大产生变形，含水量增大使土体强度降低，冻融使土体自身体积发生变化，阴阳坡面水热差异引起变形差异等。可见，影响非饱和土体工程稳定性的主要原因是土的含水量和温度随气候等的动态变化及由此引起的土体变形和强度破坏。因此，为了保证工程安全，有必要对非饱和土体水热随外界因素的变化过程及由此导致的土体强度和变形问题进行研究。

作者多年来一直从事非饱和土体水热问题的研究工作，深刻认识到这一问题的复杂性。土体中的温度变化会引起水分场变化，含水量的变化又会引起土的导热系数、比热容发生变化，从而影响传热过程及温度分布。温度引起土体冻融相变还会使水分向冻融界面运移，水分运移过程中会携带热量使温度分布发生变化。应力场和位移场的变化可使土体冻融温度、孔隙比、孔隙水压力发生变化，从而影响温度场和水分场分布。同样，温度场和水分场的变化导致的土体冻融状态、含水量的变化又对应力场和位移场产生影响。考虑这些复杂过程，作者进行了相关研究，也取得了部分研究成果，并将研究成果汇集成本书。

限于作者水平，书中难免存在不妥之处，敬请读者不吝指正。

作　者

2018年3月

目　录

第1章　土体非稳态相变温度场的有限元法

本章在推导非稳态温度场有限元方程的基础上，结合土体工程的特点，综合考虑辐射、蒸发、风、气温等各类边界条件及土的冻融相变过程，建立适用于土体非稳态相变温度场的有限元方程，并对计算过程的有关问题进行探讨。

1.1　非稳态相变温度场的有限元方程

岩土工程热问题类型多样，此处主要针对冻土路基和地下管线等线型构筑物，可当成平面问题处理，平面问题非稳态温度场的导热微分方程如下：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{k}{\rho C_{\mathrm{p}}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{q_{\mathrm{v}}}{k}\right) \tag{1-1}$$

式中，T 为物体的瞬态温度，℃；t 为过程进行的时间，s；k 为材料的导热系数；ρ 为材料的密度；C_{p}为材料的定压比热容；q_{v}为材料的内热源强度；x、y 为直角坐标。

采用泛函分析法和加权余量法均可求解此偏微分方程。由于加权余量法不需要寻找泛函，所以适用范围广，数理分析过程也较简单，其实用意义已超过泛函分析法，因此，采用加权余量法求解偏微分方程(1-1)。根据加权余量法的基本思想，将方程(1-1)写成

$$D[T(x,y,t)]=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+q_{\mathrm{v}}-\rho C_{\mathrm{p}}\frac{\partial T}{\partial t}=0 \tag{1-2}$$

取试探函数

$$T(x,y,t)=T(x,y,t,T_1,T_2,\cdots,T_n) \tag{1-3}$$

式中，$T_1,T_2,\cdots,T_n$为待定系数。

将式(1-3)代入式(1-2)，再将式(1-2)代入加权余量公式得

$$\iint\limits_D w_{\mathrm{L}}\left[\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+q_{\mathrm{v}}-\rho C_{\mathrm{p}}\frac{\partial T}{\partial t}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad l=1,2,\cdots,n \tag{1-4}$$

式中，D 为平面温度场的定义域；w_{L}为加权函数。采用 Galerkin 法，w_{L}为

$$w_{\mathrm{L}}=\frac{\partial T}{\partial T_l},\quad l=1,2,\cdots,n \tag{1-5}$$

为了保证试探函数 $T(x,y,t)$能够满足边界条件，应用格林公式把区域内的面积分与边界上的线积分联系起来，在线积分中考虑各类边界条件，将式(1-4)改写为

$$\iint_D \lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\iint_D\left[\lambda\left(\frac{\partial w_{\mathrm{L}}}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial w_{\mathrm{L}}}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+q_{\mathrm{v}}w_{\mathrm{L}}-\rho C_{\mathrm{p}}w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial t}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{1-6}$$

记

$$Y=w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial x},\quad X=-w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial y}$$

应用格林公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_\Gamma(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y)$$

将式(1-6)中的第一个积分式写为

$$\iint_D \lambda\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_\Gamma\lambda\left(-w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial y}\mathrm{d}x+w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}y\right) \tag{1-7}$$

在区域 D 的边界上有如下关系：

$$-\frac{\partial T}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial T}{\partial x}\mathrm{d}y=\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{1-8}$$

式中，n 为物体任意边界面处的外法线方向向量。

将式(1-7)、式(1-8)代入式(1-6)得

$$\iint_D\left[\lambda\left(\frac{\partial w_{\mathrm{L}}}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial w_{\mathrm{L}}}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)-q_{\mathrm{v}}w_{\mathrm{L}}+\rho C_{\mathrm{p}}w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial t}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-\oint_\Gamma\lambda w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}s=0,\quad l=1,2,\cdots,n \tag{1-9}$$

式(1-9)就是平面温度场有限元法计算的基本方程，其中线积分项可把各类边界条件代入，从而使式(1-9)满足边界条件。

此方程的计算过程与单元形式有关，在冻土工程界，目前采用的是直角三角形单元。采用这种单元，虽然计算比较方便，但计算精度不高。作者曾就三角单元的计算精度进行了探讨，发现等边三角形单元的精度高于直角三角形单元，直角三角形单元的精度又高于钝角三角形单元。在采用三角形单元进行有限元计算时，应以采取等边三角形单元为好，且单元尺寸应足够小。为了保证温度场计算能够有较高的精度，本书采用了高精度的等参四边形单元，其插值函数如下：

$$T=H_iT_i+H_jT_j+H_kT_k+H_mT_m \tag{1-10}$$

式中，i、j、k、m 为四边形单元节点号（此时方程(1-9)中 $l=i,j,k,m$）；H_i、H_j、H_k、H_m为形函数，其定义如下：

$$\left.\begin{aligned} H_i &= (1-\xi)(1-\eta)/4 \\ H_j &= (1+\xi)(1-\eta)/4 \\ H_k &= (1+\xi)(1+\eta)/4 \\ H_m &= (1-\xi)(1+\eta)/4 \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

式中，ξ、η 为局部坐标。局部坐标与整体坐标(x、y)的变换关系如下：

$$\left.\begin{aligned} x &= H_i x_i + H_j x_j + H_k x_k + H_m x_m \\ y &= H_i y_i + H_j y_j + H_k y_k + H_m y_m \end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

应用式(1-10)～式(1-12)求解式(1-9)，根据 Galerkin 法的定义

$$w_{\mathrm{L}} = \frac{\partial T}{\partial T_l} = H_l, \quad l = i, j, k, m \tag{1-13}$$

计算出$\dfrac{\partial T}{\partial x}$和$\dfrac{\partial T}{\partial y}$如下：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{4|J|}\left[(a_4 + B\xi)(b_2 + b_4\eta) - (a_2 + B\eta)(b_3 + b_4\xi)\right] \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{4|J|}\left[-(a_3 + A\xi)(b_2 + b_4\eta) + (a_1 + A\eta)(b_3 + b_4\xi)\right] \end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -x_i + x_j + x_k - x_m \\ a_2 &= -y_i + y_j + y_k - y_m \\ a_3 &= -x_i - x_j + x_k + x_m \\ a_4 &= -y_i - y_j + y_k + y_m \\ A &= x_i - x_j + x_k - x_m \\ B &= y_i - y_j + y_k - y_m \\ b_2 &= (-T_i + T_j + T_k - T_m)/4 \\ b_3 &= (-T_i - T_j + T_k + T_m)/4 \\ b_4 &= (T_i - T_j + T_k - T_m)/4 \end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

且

$$|J| = \frac{1}{16}\left[(a_1 a_4 - a_2 a_3) + (Ba_1 - Aa_2)\xi + (Aa_4 - Ba_3)\eta\right]$$

同理可知，计算$\dfrac{\partial H_l}{\partial x}$和$\dfrac{\partial H_l}{\partial y}$如下：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_l}{\partial x} &= \frac{1}{4|J|}\left[(a_4 + B\xi)\frac{\partial H_l}{\partial \xi} - (a_2 + B\eta)\frac{\partial H_l}{\partial \eta}\right] \\ \frac{\partial H_l}{\partial y} &= \frac{1}{4|J|}\left[-(a_3 + A\xi)\frac{\partial H_l}{\partial \xi} + (a_1 + A\eta)\frac{\partial H_l}{\partial \eta}\right] \end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

记

$$\left.\begin{aligned}
&L_1=a_1+A\eta\\
&L_2=a_2+B\eta\\
&L_3=a_3+A\xi\\
&L_4=a_4+A\xi\\
&M_1=-L_3\frac{\partial H_l}{\partial\xi}+L_1\frac{\partial H_l}{\partial\eta}\\
&M_2=L_4\frac{\partial H_l}{\partial\xi}-L_2\frac{\partial H_l}{\partial\eta}\\
&D_1=M_1L_1-M_2L_2\\
&D_2=M_2L_4-M_1L_3
\end{aligned}\right\}\tag{1-17}$$

将式(1-13)～式(1-17)代入式(1-9)，并经积分变换得

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda}{16\mid J\mid}\left[\left(D_2\frac{\partial H_i}{\partial\xi}+D_1\frac{\partial H_i}{\partial\eta}\right)T_i+\left(D_2\frac{\partial H_j}{\partial\xi}+D_1\frac{\partial H_j}{\partial\eta}\right)T_j\right.\\
&\left.+\left(D_2\frac{\partial H_k}{\partial\xi}+D_1\frac{\partial H_k}{\partial\eta}\right)T_k+\left(D_2\frac{\partial H_m}{\partial\xi}+D_1\frac{\partial H_m}{\partial\eta}\right)T_m\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
&+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\rho C_{\mathrm{p}}\mid J\mid H_l\left(H_i\frac{\partial T_i}{\partial t}+H_j\frac{\partial T_j}{\partial t}+H_k\frac{\partial T_k}{\partial t}+H_m\frac{\partial T_m}{\partial t}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\\
&-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}q_{\mathrm{v}}\mid J\mid H_l\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta-\oint_{\Gamma}\lambda w_{\mathrm{L}}\frac{\partial T}{\partial n}\mathrm{d}s=0,\quad l=i,j,k,m
\end{aligned}\tag{1-18}$$

式(1-18)共有 4 式，将其写成矩阵形式可得

$$\begin{bmatrix}k_{ii}&k_{ij}&k_{ik}&k_{im}\\k_{ji}&k_{jj}&k_{jk}&k_{jm}\\k_{ki}&k_{kj}&k_{kk}&k_{km}\\k_{mi}&k_{mj}&k_{mk}&k_{mm}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_i\\T_j\\T_k\\T_m\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\eta_{ii}&\eta_{ij}&\eta_{ik}&\eta_{im}\\\eta_{ji}&\eta_{jj}&\eta_{jk}&\eta_{jm}\\\eta_{ki}&\eta_{kj}&\eta_{kk}&\eta_{km}\\\eta_{mi}&m_{mj}&\eta_{mk}&\eta_{mm}\end{bmatrix}+\begin{Bmatrix}\partial T_i/\partial t\\\partial T_j/\partial t\\\partial T_k/\partial t\\\partial T_m/\partial t\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P_i\\P_j\\P_k\\P_m\end{Bmatrix}\tag{1-19}$$

简写为

$$[K]\{T\}+[N]\left\{\frac{\partial T}{\partial t}\right\}=\{P\}\tag{1-20}$$

式中，各系数表达式如下：

$$k_{ln}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda}{16\mid J\mid}\left(D_2\frac{\partial H_n}{\partial\xi}+D_1\frac{\partial H_n}{\partial\eta}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\quad l,n=i,j,k,m\tag{1-21}$$

$$n_{ln}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\rho C_{\mathrm{p}}|J|H_lH_n\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,\quad l,n=i,j,k,m\tag{1-22}$$

$$P_l = P_{1l} + P_{2l} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} q_v |J| H_l \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta + \oint_{\Gamma} \lambda w_L \frac{\partial T}{\partial n} \mathrm{d}s, \quad l = i,j,k,m \tag{1-23}$$

应用高斯二点数值积分求解式(1-21)～式(1-23)可得

$$k_{ln} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} \omega_s \omega_t \frac{\lambda}{16|J|}(E_l E_n + F_l F_n)\big|_{(\xi_s,\eta_t)}, \quad l,n = i,j,k,m \tag{1-24}$$

$$n_{ln} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} \omega_s \omega_t \rho C_p |J| H_l H_n \big|_{(\xi_s,\eta_t)}, \quad l,n = i,j,k,m \tag{1-25}$$

$$P_{1l} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2} \omega_s \omega_t q_v |J| H_l \big|_{(\xi_s,\eta_t)}, \quad l = i,j,k,m \tag{1-26}$$

式中，ξ_s、η_t 为积分基点坐标；ω_s、ω_t 为权函数；E_l、E_n、F_l、F_n 含义如下：

$$\left.\begin{aligned} E_l &= L_1 \frac{\partial H_l}{\partial \eta} - L_3 \frac{\partial H_l}{\partial \xi} \\ E_n &= L_1 \frac{\partial H_n}{\partial \eta} - L_3 \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \\ F_l &= L_2 \frac{\partial H_l}{\partial \eta} - L_4 \frac{\partial H_l}{\partial \xi} \\ F_n &= L_2 \frac{\partial H_n}{\partial \eta} - L_4 \frac{\partial H_n}{\partial \xi} \end{aligned}\right\} \tag{1-27}$$

1.2　边界条件的处理

边界条件方程(1-23)中 P_{2l} 项应根据不同边界条件，按第一类、第二类和第三类边界条件计算。

对于第一类边界条件，边界上的温度为已知，这就是固定端点的变分问题，其线积分项为零，即对第一类边界条件有

$$P_{2l} = 0 \tag{1-28}$$

规定四边形单元只有 k、m 处于边界上，边界插值函数为

$$T = (1 - q')T_k + q' T_m \tag{1-29}$$

由此得到

$$\begin{aligned} H_i &= H_j = 0 \\ H_k &= 1 - q' \\ H_m &= q' \end{aligned} \tag{1-30}$$

式中，$q' = s/S_{km}$，S_{km} 为四边形单元边界长；s 为计算点至 k 点的边界长。

对第二类边界条件，边界上的热流密度 q 为已知，即

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}=q$$

此时，由于 $w_i=w_j=0$，可得

$$P_{2i}=P_{2j}=0 \tag{1-31}$$

$$P_{2k}=-\oint_{\Gamma} q w_k \mathrm{d}s=-\int_0^{S_{km}} q\left(1-\frac{S}{S_{km}}\right)\mathrm{d}s=-qS_{km}/2 \tag{1-32}$$

$$P_{2m}=-\oint_{\Gamma} q w_m \mathrm{d}s=-\int_0^{S_{km}} q \frac{S}{S_{km}}\mathrm{d}s=-qS_{km}/2 \tag{1-33}$$

对第三类边界条件，气温 T_a 以及大气和地表的换热系数 α 为已知，用公式表示为

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=\alpha(T-T_a)|_{\Gamma}$$

此时，同样由于 $w_i=w_j=0$，可得

$$P_{2i}=P_{2j}=0 \tag{1-34}$$

$$\begin{aligned} P_{2k} &=-\oint_{\Gamma}\alpha(T-T_a)w_k\mathrm{d}s \\ &=-\int_0^{S_{km}}\alpha\left(1-\frac{S}{S_{km}}\right)\left[\left(1-\frac{S}{S_{km}}\right)T_k+\frac{S}{S_{km}}T_m-T_a\right]\mathrm{d}s \\ &=-\frac{\alpha S_{km}}{3}T_k-\frac{\alpha S_{km}}{6}T_m+\frac{\alpha S_{km}}{2}T_a \end{aligned} \tag{1-35}$$

$$\begin{aligned} P_{2m} &=-\int_0^{S_{km}}\alpha\frac{S}{S_{km}}\left[\left(1-\frac{S}{S_{km}}\right)T_k+\frac{S}{S_{km}}T_m-T_a\right]\mathrm{d}s \\ &=-\frac{\alpha S_{km}}{6}T_k-\frac{\alpha S_{km}}{3}T_m+\frac{\alpha S_{km}}{2}T_a \end{aligned} \tag{1-36}$$

式(1-35)和式(1-36)含有变量 T_k、T_m。为了计算方便，将式(1-35)、式(1-36)的前两项移至式(1-19)的左边，相当于给由式(1-24)计算出的第三类边界上的点 k、m 各加上一项，此时

$$K_{kk}=\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\omega_s\omega_t\frac{\lambda}{16|J|}(E_k^2+F_k^2)|_{(\xi_s,\eta_t)}+\frac{\alpha S_{km}}{3} \tag{1-37}$$

$$K_{mm}=\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\omega_s\omega_t\frac{\lambda}{16|J|}(E_k^2+F_k^2)|_{(\xi_s,\eta_t)}+\frac{\alpha S_{km}}{3} \tag{1-38}$$

$$K_{km}=K_{mk}=\sum_{s=1}^{2}\sum_{t=1}^{2}\omega_s\omega_t\frac{\lambda}{16|J|}(E_kE_m+F_kF_m)|_{(\xi_s,\eta_t)}+\frac{\alpha S_{km}}{6} \tag{1-39}$$

$$P_{2k}=P_{2m}=\frac{\alpha S_{km}}{2}T_a \tag{1-40}$$

1.3　土体冻融相变的处理

由于土在冻结和融化过程中会发生水冰相变，考虑相变过程的平面导热微分方程为

$$\rho C_{\mathrm{p}} \frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)+q_{\mathrm{v}}+\rho L \frac{\partial f_{\mathrm{s}}}{\partial t} \tag{1-41}$$

式中，L 为土冻结或融化相变潜热；f_{s}为固相率。根据固相增量法模量，f_{s}的含义为

$$f_{\mathrm{s}}=\frac{T_{\mathrm{L}}-T}{T_{\mathrm{L}}-T_{\mathrm{s}}} \tag{1-42}$$

式中，T_{L}、T_{s}分别为融化及冻结温度；T 为相变区温度。

式(1-41)中导热系数和比热容在固相区和液相区分别取为 λ_{s}、λ_{L}和 C_{s}、C_{L}，在相变区内则根据温度 T 作线性插值，在相变区：

$$\lambda=\begin{cases}\lambda_{\mathrm{s}}, & T \leqslant T_{\mathrm{s}} \\ \lambda_{\mathrm{s}}+\dfrac{\lambda_{\mathrm{L}}-\lambda_{\mathrm{s}}}{T_{\mathrm{L}}-T_{\mathrm{s}}}(T-T_{\mathrm{s}}), & T_{\mathrm{s}}<T<T_{\mathrm{L}} \\ \lambda_{\mathrm{L}}, & T \geqslant T_{\mathrm{L}}\end{cases} \tag{1-43}$$

$$C=\begin{cases}C_{\mathrm{s}}, & T \leqslant T_{\mathrm{s}} \\ (C_{\mathrm{s}}+C_{\mathrm{L}})/2, & T_{\mathrm{s}}<T<T_{\mathrm{L}} \\ C_{\mathrm{L}}, & T \geqslant T_{\mathrm{L}}\end{cases} \tag{1-44}$$

比较式(1-1)和式(1-41)就会发现，如果将式(1-41)中的相变潜热项当成内热源项处理，则式(1-41)和式(1-1)是一样的。经过前述同样分析过程，同样可得相变导热的有限元方程为式(1-19)。但此时，式(1-23)、式(1-26)的 P_{1l}应加上相变潜热项，即

$$P_{1l}=\sum_{s=1}^{2} \sum_{t=1}^{2} \omega_s \omega_t\left(q_{\mathrm{v}}+\rho L \frac{(\Delta f_{\mathrm{s}})_l}{\Delta t}\right)|J|\,|H_l|_{(\xi_s, \eta_t)}, \quad l=i, j, k, m \tag{1-45}$$

式中，$(\Delta f_{\mathrm{s}})_l$ 是节点 l 在相应 Δt 时间间隔内固相率的变化值，在 Δt 时间间隔内，若节点 1 的温度从 T_t变化到 $T_{t+\Delta t}$，Δf_{s}按下列 8 种情况取值：

T_t和 $T_{t+\Delta t}$均大于 T_{L}或均小于 T_{s}时，$\Delta f_{\mathrm{s}}=0$；

T_t在液相区，$T_{t+\Delta t}$在固相区时，$\Delta f_{\mathrm{s}}=1$；

T_t在固相区，$T_{t+\Delta t}$在液相区时，$\Delta f_{\mathrm{s}}=-1$；

T_t在液相区，$T_{t+\Delta t}$在相变区时，$\Delta f_{\mathrm{s}}=(T_{\mathrm{L}}-T_{t+\Delta t})/(T_{\mathrm{L}}-T_{\mathrm{s}})$；

T_t在相变区，$T_{t+\Delta t}$在液相区时，$\Delta f_{\mathrm{s}}=(T_t-T_{\mathrm{L}})/(T_{\mathrm{L}}-T_{\mathrm{s}})$；

T_t在相变区，$T_{t+\Delta t}$在固相区时，$\Delta f_{\mathrm{s}}=(T_t-T_{\mathrm{s}})/(T_{\mathrm{L}}-T_{\mathrm{s}})$；

T_t在固相区，$T_{t+\Delta t}$在相变区时，$\Delta f_s=(T_s-T_{t+\Delta t})/(T_L-T_s)$；

T_t和$T_{t+\Delta t}$均在相变区内时，$\Delta f_s=(T_t-T_{t+\Delta t})/(T_L-T_s)$。

1.4 求解的特点

通过上述分析，得到了土体相变导热问题的四边形等参元有限元计算方法。有限元基本方程为式(1-19)或式(1-20)，式中的矩阵参数可根据式(1-24)～式(1-26)确定。这些公式考虑了各类边界条件，再加上初始条件，就可求解各类复杂边界的非稳定相变导热问题。这类问题的求解特点是在空间域内用有限元网格划分，在时间域内则用有限差分网格划分。实质上是有限元法和有限差分法的混合解法。这是一种成功的结合，因为它充分利用了有限元法在空间域划分中的优点和有限差分法在时间推进中的优点。

差分格式有向前差分格式、向后差分格式、C-N 格式、Galerkin 格式等。在这些差分格式中，只有向后差分格式是无条件稳定收敛的。采用这种格式简单可靠，不会节外生枝。向后差分格式有两点后差格式和三点后差格式。由于用三点后差格式计算非稳定温度场时，同时需要知道前两个时刻的温度场，这需要占用更多的计算机内存，可能使计算区域划分单元和节点的数目受到限制，从而影响计算精度。因此，采用两点后差格式，将方程(1-20)变成如下形式：

$$\left([K]+\frac{[N]}{\Delta t}\right)\{T\}_t=\{P\}_t+\frac{[N]}{\Delta t}\{T\}_{t-\Delta t} \tag{1-46}$$

式中，$[K]$为温度刚度矩阵；$[N]$为非稳态变温矩阵；$\{P\}$为合成列阵；Δt 为时间步长。一般来说，Δt 越小，计算精度越高。因此，一般应选取较小的时间步长。但对边界条件变化较小的时段，为了节约计算时间，可选用较大的时间步长。

为了提高计算精度，采用的单元的尺寸 Δx 越小越好，同时应采用较小的时间步长 Δt。一般来说，减小 Δt 能使求解的稳定性和精度提高，但在单元边长 Δx 保持不变的情况下，并非 Δt 越小越好，Δt 的最小值需满足：

$$\frac{\lambda\Delta t}{\rho C_p \Delta x^2}>0.1 \tag{1-47}$$

如果 Δt 小于此式规定的最小值，就会产生振荡现象。因此，Δt 的选取，应在满足此式的条件下，越小越好。但为了节省计算时间，在冻土路基边界条件变化较小的时段，可取较大的时间步长，这并不会降低计算精度。

求解非稳态相变温度场问题时，通常采用迭代法，但不宜单纯采用迭代法，单纯迭代虽然程序简单，但收敛性能较差。为了改进收敛性能，应在两次迭代之间用矩阵消元法直接求解，再用低松弛因子来确定下次迭代值，如果第 i 次迭代消元计算得到值 $T^{(i)}$，若经验算表明此值不满足精度要求，必须继续进行迭代计算，但不

宜直接将 $T^{(i)}$ 作为迭代值，应先对 $T^{(i)}$ 作下述修正：

$$\widetilde{T}^{(i)}=\omega T^{(i)}+(1-\omega)\widetilde{T}^{(i-1)} \tag{1-48}$$

式中，$\widetilde{T}^{(i-1)}$ 为第 i 次代入迭代值；ω 为松弛因子。对冻土路基的非稳态相变温度场问题，应取 $\omega<1$，即采用低松弛迭代，在计算过程中，为了加速收敛，应根据迭代次数不断调整 ω 值。$T^{(i)}$ 经修正后得到新值 $\widetilde{T}^{(i)}$，将新值 $\widetilde{T}^{(i)}$ 作为迭代值进行计算，计算得到的值经修正后再代入迭代式计算，以此类推，直至计算值能够满足精度要求。

第 2 章　土体热参数及工程边界条件的确定

第 1 章给出了适用于土体非稳态相变温度场的有限元方程。求解此方程时，需先确定土体热参数及实际工程边界条件。土体热参数与土质、物理参数、冻结状态等密切相关，一般应实测确定。非饱和土体含水量是随气候及渗漏水等因素变化的，考虑此变化分析土体热问题十分必要。实际工程的边界条件十分复杂，包括辐射、蒸发及对流换热等各类边界条件，这些边界条件不仅随时间变化，而且随工程断面尺寸及坡体走向的不同而不同，随着坡度坡向的变化也是变化的。本章以青藏高原多年冻土以及黄土为对象，就确定土体热参数及各类边界条件的方法进行探讨。

2.1　冻土热参数的确定

冻土热参数有导热系数 λ、比热容 C 和相变潜热 L。参数 λ、C、L 与土质、土密度和土体含水量有着密切的关系，一般情况应该实测。但由于路基中的含水量分布是变化的，土的密度也因冻融循环而变化，这就要求测试各种密度及含水量组合下的热参数值，显然这种测试工作量是相当大的。为了减小测试工作量，同时考虑到一般单位尚不具备冻土测试条件。为便于应用，也为了探讨参数 λ、C 随密度及含水量的变化规律，对已有测试数据进行回归分析，热物理参数可按下列各式计算。

对亚黏土：

$$\lambda_f = 1.24\times10^{1.37\rho_d-3} + 1.04w\times10^{0.485\rho_d-2} \tag{2-1}$$

$$\lambda_u = (11.33\lg w - 3.4)\times10^{0.649\gamma_d-2} \tag{2-2}$$

$$C_f = \rho_d(0.962 + 0.021w)\times10^3 \tag{2-3}$$

$$C_u = \rho_d(0.835 + 0.042w)\times10^3 \tag{2-4}$$

对砾砂土：

$$\lambda_f = 1.4\times10^{\rho_d-2} + [4.99w\times10^{0.67} - 0.066\,(w-10)^2]\times10^{0.48\rho_d-2} \tag{2-5}$$

$$\lambda_u = (8.7\lg w + 4.96 + 1.24b)\times10^{0.6247\rho_d-2}$$

且

$$b = (60w + 120\rho_d - 20\rho_d w - w^2 - 296)/64 \tag{2-6}$$

$$C_f = \rho_d(0.732 + 0.021w)\times10^3 \tag{2-7}$$

$$C_u = \rho_d(0.794 + 0.042w)\times10^3 \tag{2-8}$$