GONGKE SHUXUE FENXI

工科数学分析

第二版 下册

主　编：刘安平　罗文强

副主编：李　星　黄　刚
黄精华　刘鲁文
郭万里

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

工科数学分析

GONGKE SHUXUE FENXI

第二版 下册

主　编：刘安平　罗文强

副主编：李　星　黄　刚

黄精华　刘鲁文

郭万里

中国地质大学出版社

ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析(下册)/刘安平,罗文强主编.—2版.—武汉:中国地质大学出版社,2018.12

ISBN 978-7-5625-4365-7

Ⅰ.①工…
Ⅱ.①刘…②罗…
Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材
Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第169030号

工科数学分析
第二版　下册

刘安平　罗文强　主　编
李　星　黄　刚　黄精华　刘鲁文　郭万里　副主编

责任编辑:王凤林　郑济飞　策划编辑:毕克成　段连秀　郑济飞　责任校对:张咏梅

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号)　邮政编码:430074
电　话:(027)67883511　传真:(027)67883580　E-mail:cbb@cug.edu.cn
经　销:全国新华书店　http://cugp.cug.edu.cn

开本:787毫米×960毫米 1/16　字数:450千字　印张:22.75
版次:2010年12月第1版　2018年12月第2版　印次:2018年12月第5次印刷
印刷:武汉市籍缘印刷厂　印数:13 001—17 000册

ISBN 978-7-5625-4365-7　定价:50.00元

目 录

第二篇 微积分

第三篇 常微分方程

第二篇　微积分

本篇介绍微积分学，内容包括一元函数微积分学(上册)、多元函数微积分学和级数(下册).

第 8 章　无穷级数

无穷级数是表示函数及进行数值运算的一个重要工具，在理论上及实际问题中都有广泛的应用. 本章的主要内容是数项级数、幂级数和 Fourier 级数.

首先介绍数项级数的一些基本概念，如级数的收敛与发散、收敛级数的基本性质，以及各种数项级数收敛与发散的判别法，为后面进一步研究函数项级数，特别是幂级数、Fourier 级数作准备. 我们接着将讨论函数项级数，主要讨论幂级数和 Fourier 级数，这是许多实际问题及理论中经常遇到的级数. 本章将研究这两类级数的收敛性质及应用.

8.1　数项级数的收敛与发散

8.1.1　基本概念

人们认识事物在数量方面的特征，往往有一个由近似到精确的过程. 在这种认识过程中会遇到由有限个数量相加到无穷个数量相加的问题.

例如计算半径为 R 的圆的面积 A，具体做法如下：作圆的内接正六边形，算出这六边形的面积 a_1，它是圆面积 A 的一个粗糙的近似值. 为了比较精确地计算出 A 的值，我们以这个正六边形的每一边为底作一个顶点在圆周上的等腰三角形，算出这六个等腰三角形的面积之和 a_2. 那么 a_1+a_2(即内接正十二边形的面积)就是

A 的一个较好的近似值. 同样地,在这正十二边形的每一边上分别作一个顶点在圆周上的等腰三角形,算出这十二个等腰三角形的面积之和 a_3. 那么 $a_1+a_2+a_3$(即内接正二十四边形的面积)是 A 的一个更好的近似值. 如此继续下去,内接正 3×2^n 边形的面积就逐步逼近圆面积:

$$A\approx a_1, A\approx a_1+a_2, A\approx a_1+a_2+a_3, \cdots,$$
$$A\approx a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

如果内接正多边形的边数无限增多,即 n 无限增大,则和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的极限就是所要求的圆面积 A. 这时和式中的项数无限增多,于是出现了无穷多个数量一次相加的数学式子.

一般地,如果给定一个数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$,则由这数列构成的表达式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots \tag{8.1}$$

称为数项无穷级数,简称为数项级数,记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots,$$

其中第 n 项 a_n 称为级数(8.1)的一般项.

上述级数的定义只是一个形式上的定义,怎样理解无穷级数中无穷个数量相加呢? 联系上面关于计算圆面积的例子,我们可以从有限项的和出发,观察它们的变化趋势,由此来理解无穷多个数量相加的含义.

作(常数项)级数(8.1)的前 n 项的和

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i, \tag{8.2}$$

S_n 称为级数(8.1)的部分和. 当 n 依次取 1,2,3,…时,它们构成一个新的数列

$$S_1=a_1, S_2=a_1+a_2, S_3=a_1+a_2+a_3, \cdots,$$
$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n, \cdots.$$

根据这个数列有没有极限,我们引进无穷级数(8.1)的收敛与发散的概念.

定义 8.1　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限 S,即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,这时极限 S 叫做这级数的和,并写成

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n, +\cdots;$$

如果 $\{S_n\}$ 没有极限,则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

显然，当级数收敛时，其部分和 S_n 是级数的和 S 的近似值，它们之间的差值 $r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ 叫做级数的余项. 用近似值 S_n 代替 S 所产生的误差是这个余项的绝对值，即误差是 $|r_n|$.

例 8.1　无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \tag{8.3}$$

叫做等比级数（又称为几何级数），其中 $a \neq 0$，q 叫做级数的公比. 试讨论级数(8.3)的收敛性.

解　如果 $q \neq 1$，则部分和

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$，因此这时级数(8.3)收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，这时级数(8.3)发散.

如果 $|q| = 1$，则当 $q = 1$ 时，$S_n = na \to \infty$，因此级数(8.3)发散；当 $q = -1$ 时，级数(8.3)成为

$$a - a + a - a + \cdots,$$

显然 S_n 随着 n 为奇数或为偶数而等于 a 或等于零，从而 S_n 的极限不存在，这时级数(8.3)发散.

综合以上结果，我们得到：如果等比级数(8.3)的公比的绝对值 $|q| < 1$，则级数收敛；如果 $|q| \geqslant 1$，则级数发散.

例 8.2　证明级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots \tag{8.4}$$

收敛，并求和.

证　因为 $u_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2} - \dfrac{1}{3n+1}\right)$，

级数(8.4)的部分和为

$$S_n = \frac{1}{3}\left[(1 - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{7}) + (\frac{1}{7} - \frac{1}{10}) + \cdots + (\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3n+1}).$$

所以 $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{3}$，所以此级数收敛，它的和是 $\dfrac{1}{3}$.

例 8.3　证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散.

证　部分和为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]$

$$=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty),$$

因此,该级数发散.

从定义 8.1 可知,级数和数列有着密切的联系.给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$,就有部分和数列 $\left\{S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\right\}$;反之,给定数列 $\{S_n\}$,就有以 $\{S_n\}$ 为部分和数列的级数

$$S_1+(S_2-S_1)+\cdots+(S_n-S_{n-1})+\cdots=S_1+\sum_{n=2}^{\infty}(S_n-S_{n-1})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

其中,$a_1=S_1$,$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$,按定义,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与数列 $\{S_n\}$ 同时收敛或同时发散,且在收敛时,有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$,即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i$.因此,有关数列极限的一些结果都可以平行的移到对应的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 上来.反之亦然.下面根据数列极限的 Cauchy 准则,给出判别数项级数是否收敛的 Cauchy 准则.

定理 8.1(Cauchy 准则)　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充分必要条件是:$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,$\forall m,n>N$,$m>n$,有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m|<\varepsilon.\tag{8.5}$$

证　必要性.设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则其部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限.根据数列极限存在的 Cauchy 准则,$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,$\forall m,n>N$,有

$$|S_m-S_n|<\varepsilon.\tag{8.6}$$

不妨设 $m>n$,则有

$$|(a_1+a_2+\cdots+a_m)-(a_1+a_2+\cdots+a_n)|<\varepsilon,$$

由此得到式(8.5).

充分性.设条件(8.5)成立,则式(8.6)成立,根据数列极限存在的 Cauchy 准则知,极限 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

例 8.4　证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

证　对于任意的自然数 $m>n$,有

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right|\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\leqslant\frac{1}{n}.$$

因此，$\forall\varepsilon>0$,取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$,则当 $m,n>N$ 时,就有

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right|<\varepsilon.$$

由 Cauchy 准则知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛.

8.1.2　收敛级数的性质

根据无穷级数收敛、发散以及和的概念,可以得出收敛级数的几个基本性质.

性质 8.1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,k 为任一常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ 也收敛,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

证　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和为 S_n,由假设 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,$S$ 为一有限数. 又设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ 的部分和为 S'_n,显然 $S'_n=aS_n$,再按数列极限性质知道

$$\lim_{n\to\infty}S'_n=\lim_{n\to\infty}aS_n=aS,$$

这就是　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n.$

性质 8.2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 也收敛,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}b_n,$$

利用数列极限的运算法则即可获得证明.

性质 8.3　在级数中去掉、加上或改变有限项,不会改变级数的收敛性.

证　我们只需证明“在级数的前面部分去掉或加上有限项,不会改变级数的收

敛性”,因为其他情形(即在级数中任意去掉、加上或改变有限项的情形)都可以看成在级数的前面部分先去掉有限项,然后再加上有限项的结果.

将级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{k+n} + \cdots$$

的前 k 项去掉,则得到级数

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} + \cdots.$$

于是新得到的级数的部分和为

$$\sigma_n = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} = S_{k+n} - S_k,$$

其中 S_{k+n} 是原来级数的前 $k+n$ 项的和. 因为 S_k 是常数,所以当 $n\to\infty$ 时,σ_n 与 S_{k+n} 或者同时具有极限,或者同时没有极限.

类似地,可以证明在级数的前面加上有限项,不会改变级数的收敛性.

性质 8.4　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛到 S,则将其项任意地结合后(不改变其次序)得到的级数

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2}) + \cdots \\ &\quad + (a_{i_n+1} + \cdots + a_{i_{n+1}}) + \cdots\end{aligned} \tag{8.7}$$

仍收敛且其和为 S.

证　设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,已知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. 设级数(8.7)的部分和为 P_n. 则有

$$P_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1} = S_{i_1},$$

$$P_2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2}) = S_{i_2},$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}P_n = &(a_1 + a_2 + \cdots + a_{i_1}) + (a_{i_1+1} + \cdots + a_{i_2}) + \cdots \\ &+ (a_{i_{n-1}+1} + \cdots + a_{i_n}) = S_{i_n},\end{aligned}$$

由此可见,数列 $\{P_n\}$ 实际上就是数列 $\{S_n\}$ 的一个子列,因此

$$\lim_{n\to\infty} P_n = S.$$

注意,这个命题的逆命题不成立. 例如级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots$$

收敛于零,但去掉括号后的级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

却是发散的.

根据性质 8.4 可得如下的推论:

推论 8.1　如果加括号之后的级数发散,则原级数也发散.