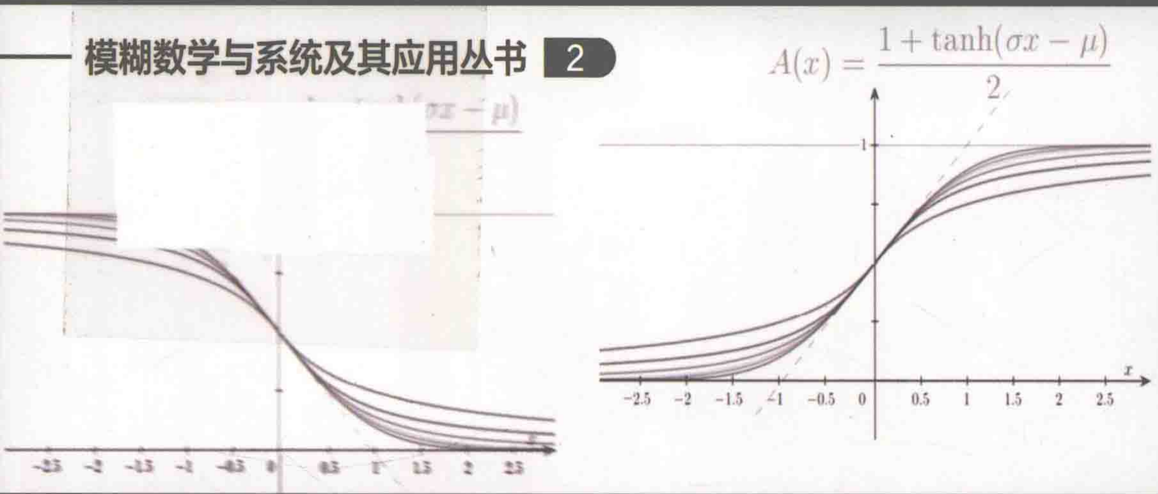
模糊数学与系统及其应用丛书 2



聚合函数及其应用

覃 锋/著

Aggregation Function and Its Application

科学出版社

模糊数学与系统及其应用丛书 2

聚合函数及其应用

覃 锋 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

聚合函数不同于传统的信息聚合模型，是用函数观点来描述信息聚合的数学工具，在模糊数学理论、模糊控制、模糊逻辑、决策理论和智能计算中有广泛的应用. 虽然关于它的研究可以追溯到阿贝尔的早期工作，但是它的真正兴起是近 20 年的事情，目前正处在蓬勃发展阶段. 本书将以一致模算子为主线，介绍近年来的进展及作者在这方面的工作. 主要包括：一致模算子的定义与结构；基于一致模的模糊蕴涵；基于一致模算子的函数方程.

本书可以作为从事模糊逻辑、模糊推理和智能计算研究的科研人员的参考资料，也可以作为数学、计算机、智能计算等相关专业的研究生教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

聚合函数及其应用/覃锋著. —北京：科学出版社, 2019.2
(模糊数学与系统及其应用丛书)
ISBN 978-7-03-060521-4

Ⅰ. ①聚… Ⅱ. ①覃… Ⅲ. ①模糊数学 Ⅳ. ①O159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 028813 号

责任编辑：任 静 / 责任校对：王 瑞
责任印制：吴兆东 / 封面设计：锦 辉

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 2 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2019 年 2 月第一次印刷 印张：17
字数：324 000

定价：108.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《模糊数学与系统及其应用丛书》序

自然科学和工程技术, 表现的是人类对客观世界有意识的认识和作用, 甚至表现了这些认识和作用之间的相互影响, 例如, 微观层面上量子力学的观测问题.

当然, 人类对客观世界最主要的认识和作用, 仍然在人类最直接感受、感知的介观层面发生, 虽然往往需要以微观层面的认识和作用为基础, 以宏观层面的认识和作用为延拓.

而人类在介观层面认识和作用的行为和效果, 可以说基本上都是力图在意识、存在及其相互作用关系中, 对减少不确定性, 增加确定性的一个不可达极限的逼近过程; 即使那些目的在于利用不确定性的认识和作用行为, 也仍然以对不确定性的具有更多确定性的认识和作用为基础.

正如确定性以形式逻辑的同一律、因果律、排中律、矛盾律、充足理由律为形同公理的准则而界定和产生一样, 不确定性本质上也是对偶地以这五条准则的分别缺损而界定和产生. 特别地, 最为人们所经常面对的, 是因果律缺损所导致的随机性和排中律缺损所导致的模糊性.

与随机性被导入规范的定性、定量数学研究对象范围已有数百年的情况不同, 人们对模糊性进行规范性认识的主观需求和研究体现, 仅仅开始于半个世纪前 1965 年 Zadeh 具有划时代意义的 *Fuzzy sets* 一文.

模糊性与随机性都具有难以准确把握或界定的共同特性, 而从 Zadeh 开始延续下来的 "以赋值方式量化模糊性强弱程度" 的模糊性表现方式, 又与已经发展数百年而高度成熟的 "以赋值方式量化可能性强弱程度" 的随机性表现方式, 在基本形式上平行——毕竟, 模糊性所针对的 "性质", 与随机性所针对的 "行为", 在基本的逻辑形式上是对偶的. 这也就使得 "模糊性与随机性并无本质差别" "模糊性不过是随机性的另一表现" 等疑虑甚至争议, 在较长时间和较大范围内持续.

然而时至今日, 应该说不仅如上由确定性的本质所导出的不确定性定义已经表明模糊性与随机性在本质上的不同, 而且人们也已逐渐意识到, 表现事物本身性质的强弱程度而不关乎其发生与否的模糊性, 与表现事物性质发生的可能性而不关乎其强弱程度的随机性, 在现实中的影响和作用也是不同的.

例如, 当情势所迫而必须在 "于人体有害的可能为万分之一" 和 "于人体有害

的程度为万分之一”这两种不同性质的 150 克饮料中进行选择时, 结论就是不言而喻的, 毕竟前者对“万一有害, 害处多大”没有丝毫保证, 而后者所表明的“虽然有害, 但极微小”还是更能让人放心得多. 而这里, 前一种情况就是“有害”的随机性表现, 后一种情况就是“有害”的模糊性表现.

模糊性能在比自身领域更为广泛的科技领域内得到今天这一步的认识, 的确不是一件容易的事, 到今天, 模糊理论和应用的研究所涉及和影响的范围也已几乎无远弗届. 这里有一个非常基本的原因: 模糊性与随机性一样, 是几种基本不确定性中, 最能被人类思维直接感受, 也是最能对人类思维产生直接影响的.

对于研究而言, 易感知、影响广本来是一个便利之处, 特别是在当前以本质上更加逼近甚至超越人类思维的方式而重新崛起的人工智能的发展已经必定势不可挡的形势下. 然而也正因为如此, 我们也都能注意到, 相较于广度上的发展, 模糊性研究在理论、应用的深度和广度上的发展, 还有很大的空间; 或者更直接地说, 还有很大的发展需求.

例如, 在理论方面, 思维中模糊性与直感、直观、直觉是什么样的关系? 与深度学习已首次形式化实现的抽象过程有什么样的关系? 模糊性的本质是在于作为思维基本元素的单体概念, 还是在于作为思维基本关联的相对关系, 还是在于作为两者统一体的思维基本结构, 这种本质特性和作用机制以什么样的数学形式予以刻画和如何刻画才能更为本质深刻和关联广泛?

又例如, 在应用方面, 人类是如何思考和解决在性质强弱程度方面难以确定的实际问题的? 是否都是以条件、过程的更强定量来寻求结果的更强定量? 是否可能如同深度学习对抽象过程的算法形式化一样, 建立模糊定性的算法形式化? 在比现在已经达到过的状态、已经处理过的问题更复杂、更精细的实际问题中, 如何更有效地区分和结合“性质强弱”与“发生可能”这两类本质不同的情况? 从而更有效、更有力地在实际问题中发挥模糊性研究本来应有的强大效能?

这些都是模糊领域当前还需要进一步解决的重要问题; 而这也就是作为国际模糊界主要力量之一的中国模糊界研究人员所应该、所需要倾注更多精力和投入的问题.

针对相关领域高等院校师生和科技工作者, 推出这套《模糊数学与系统及其应用丛书》, 以介绍国内外模糊数学与模糊系统领域的前沿热点方向和最新研究成果, 从上述角度来看, 是具有重大的价值和意义的, 相信能在推动我国模糊数学与模糊系统乃至科学技术的跨越发展上, 产生显著的作用.

为此, 应邀为该丛书作序, 借此将自己的一些粗略的看法和想法提出, 供中国

模糊界同仁参考.

罗懋康
国际模糊系统协会 (IFSA) 副主席 (前任)
国际模糊系统协会中国分会代表
中国系统工程学会模糊数学与模糊系统专业委员会主任委员
2018 年 1 月 15 日

前　言

20 世纪 70 年代，信息融合被称为数据融合. 到 20 世纪 90 年代，鉴于传感器获取和提供信息的多样性，信息融合一词被广泛采用. 融合是一种形式框架，其过程是用数学方法或技术工具综合不同来源的信息，目的是得到高品质的有用信息. 而“高品质”的精确定义依赖于应用，因此，存在不同种类和不同等级的融合，如多源头信息融合、数据融合、图像融合、特征融合、决策融合、传感器融合、分类器融合等.

本书中的信息聚合是指多源头信息融合，即在测量与精度范围内，对从测量或感知系统获得的两组或两组以上的数据进行处理. 简言之，就是把一些不同来源的信息聚合成一个具有代表性的数值. 聚合信息的过程称为信息聚合，而描述信息聚合过程的函数称为信息聚合算子，在国内有时也称为综合函数. 据报道，它是当前智能领域中的研究热点. 这是因为，在机器人领域中，需要聚合由传感器提供的数据；在图像处理领域中，需要聚合不同的图片信息；在知识系统中，特别是在多属性决策理论中，需要聚合不同类型的知识并确保知识系统的相容性；在数据挖掘领域中，需要使用各种聚合方法；在分散信息的多 Agent 决策系统中，对单个 Agent 做出决策时，需要聚合其他 Agent 的信息.

因为信息聚合是将不同来源的信息聚合成一个具有代表性数值的过程，能从本质上反映人类思维模式，所以近 20 年来，关于信息聚合模型的研究成果已得到了广泛的应用，不仅体现在数学与计算机科学方面，也体现在经济与社会科学方面. 反过来，大量的应用又极大地激发了人们对聚合函数的研究兴趣，大量的论文与专著被发表.

信息聚合模型的选择与实际应用有密切的联系，所以存在不同类型信息聚合的具体模型. 例如，信息聚合模型三角模和三角余模可看成经典逻辑中逻辑连接词“与”和“或”的推广，在模糊集合理论中有重要的应用. 而信息聚合模型一致模可看成三角模和三角余模的推广，一致模就是定义在 $[0,1]^2$ 上以 $[0,1]$ 中任意设定元为单位元的交换序半群. 它是由 Yager 和 Rybalov 在 1996 年引入的. 此后，它受到了人们的广泛关注，并获得若干重要结论. 但是到目前为止，这些研究成果仍然分散在发表的数百篇论文中，因此系统地总结这些工作，推动一致模算子研究工作走向成熟，已经成为当务之急.

本书的主要目的是按照一致模的总体框架，总结近 20 年来国内外学者在这一领域中的研究成果，以期对我国这一领域的研究起到抛砖引玉的作用.

本书分为 4 章.

在第 1 章中，首先介绍三角模、三角余模、模糊否定和模糊蕴涵，这是学习和研究一致模的基础知识. 其次介绍一致模的定义与基本性质，特别地，详细地介绍可表示一致模、$(0,1)^2$ 内连续的一致模、Fodor 型一致模和幂等一致模等四种基本类型的一致模的定义及其结构刻画. 最后，从推广的角度介绍与一致模相关的算子，主要包括弱一致模、零模、左右零模、半一致模、半零模、半 t-算子、2-一致模，它们也是当前一致模算子研究领域的主要内容.

在第 2 章中，从一致模生成模糊蕴涵的角度展开介绍，主要包括基于一致模的剩余蕴涵、(U,N)-蕴涵、QL-蕴涵和 D-蕴涵. 特别地，介绍基于各已知一致模类的剩余蕴涵和基于析取一致模的 (U,N)-蕴涵的公理化刻画.

如果说第 1、2 章是从理论的角度来研究一致模，那么第 3、4 章就是从应用的角度来展开介绍的，它们也是作者近些年部分工作的总结.

在第 3 章中，研究分配性方程，主要包括基于幂等一致模与零模间的分配性、基于半 t-算子与 Mayor 聚合算子的分配性方程、半零模 F 在半 t-算子 G 上的分配性方程、关于拟算术平均算子的分配性方程、2-一致模在半一致模上的分配性、半一致模与半 t-算子之间的分配性.

在第 4 章中，研究蕴涵分配性方程，主要包括基于连续三角模的蕴涵分配性方程、基于连续三角余模的蕴涵分配性方程和类柯西方程. 事实上，第 4 章是对 Baczyński 和 Jayaram 于 2009 年在 *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 学术期刊上提出的一个公开问题的完全回答，并将相关结果进行推广.

作者要特别感谢博士研究生导师王国俊教授 (于 2013 年年底因病医治无效去世)，自 2001 年读博以来，作者在他的悉心指导和鼓励下，一直从事这一领域的研究工作. 作者也特别感谢博士后合作导师赵彬教授和硕士研究生导师徐晓泉教授的指导与帮助. 作者还要特别感谢中国科学院的陆汝钤院士和澳大利亚悉尼科技大学的李三江教授，在访学期间他们让作者开拓了眼界.

在本书的撰写过程中，作者得到了许多老师、同仁和研究生的关心与帮助，在此特别感谢陕西师范大学的李永明教授、李生刚教授、吴洪博教授、周红军教授、韩胜伟教授和汪开云副教授，四川大学的罗懋康教授、张德学教授和寇辉教授，西南交通大学的徐杨教授和秦克云教授，浙江理工大学的裴道武教授、樊太和教授与王三民教授，山东大学的刘华文教授，华东师范大学的陈仪香教授，湖南大学的李庆国教授，武汉大学的胡宝清教授，江南大学的潘正华教授、刘练珍教授、王仕同教授和邓赵红教授，四川师范大学的王学平教授，西北大学的辛小龙教授，上海海事大学的张小红教授，湖北民族学院的詹建明教授，青海民族大学的傅丽教授，兰州理工大学的李骏教授，西安石油大学的折延红教授，延安大学的惠小静教授，江西师范大学的杨金波教授，他们阅读或与作者讨论了部分书稿，提出了宝贵意见.

作者还要感谢研究生赵元元、陈斐、李文煌、王刚、郑炜烨、张程、马文浩和何园园，他们为本书出版付出了辛勤的劳动.

本书的出版得到了国家自然科学基金项目 (61563020，61165014) 和江西省自然科学基金重点项目 (20171ACB20010) 的资助，在此表示感谢. 江西师范大学数学与信息科学学院为本书的出版提供了多方面的支持，在此表示谢忱.

限于作者的水平，本书难免存在不足之处，恳请读者提出宝贵的意见，以便本书逐步完善.

覃　锋

2018 年 5 月于江西师范大学

目　　录

第 1 章　一致模算子

1.1　基础知识

1.1.1　三角模

定义 1.1.1　函数 $T:[0,1]^2 \to [0,1]$ 称为三角模 (简称 t-模)，若对任意 $x, y, z \in [0,1]$，T 满足:

(1) $T(x,y)=T(y,x)$;　(交换性)

(2) $T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$;　(结合性)

(3) 当 $y \leqslant z$ 时，有 $T(x,y) \leqslant T(x,z)$;　(单调性)

(4) $T(x,1)=x$.　(边界性)

例 1.1.1　常见的三角模有:

(1) $T_M(x,y)=\min(x,y)$;

(2) $T_L(x,y)=\max(x+y-1,0)$;

(3) $T_P(x,y)=xy$;

(4) $T_D(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y) \in [0,1)^2, \\ \min(x,y), & \text{其他}. \end{cases}$

定义 1.1.2　设 T 是三角模，称 T 是

(1) 阿基米德的. 若对任意 $x, y \in (0,1)$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x_T^n < y$，这里 $\mathbb{N}$ 表示全体自然数集.

(2) 严格的. 若它是连续的，且对任意 $x \in (0,1]$，当 $y < z$ 时，有 $T(x,y) < T(x,z)$.

(3) 幂零的. 若它是连续的，且对任意 $x \in (0,1)$，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x_T^n = 0$，这里 $x_T^1 = x$，$x_T^2 = T(x,x)$，$\cdots$，$x_T^n = T(x_T^{n-1}, x)$.

注记 1.1.1　(1) 连续三角模 T 是阿基米德的，当且仅当对任意 $x \in (0,1)$ 时，有 $T(x,x) < x$.

(2) 若三角模 T 是严格的或者是幂零的，则它一定是阿基米德的. 反之，每个连续的阿基米德三角模要么是严格的，要么是幂零的.

(3) 就三角模性质而言，阿基米德性质与连续性之间不存在必然关系. 也就是说，既存在连续的非阿基米德三角模，也存在非连续的阿基米德三角模.

下面的定理称为连续阿基米德三角模的表示定理.

定理 1.1.1　对于二元函数 $T:[0,1]^2\to[0,1]$ 而言，下面命题是等价的:

(1) T 是连续阿基米德三角模.

(2) T 有一个连续加法生成子. 即存在一个连续严格单调递减函数 $t:[0,1]\to[0,\infty]$ 满足 $t(1)=0$，并使得对任意 $x,y\in[0,1]$，有

$$T(x,y)=t^{(-1)}(t(x)+t(y)). \tag{1.1.1}$$

其中

$$t^{(-1)}(x)=\begin{cases} t^{-1}(x), & x\in[0,t(0)],\\ 0, & x\in(t(0),\infty]\end{cases} \tag{1.1.2}$$

是 t 的伪逆. 此外，就相差一个正的常系数而言，t 是唯一的. 即若连续严格单调递减函数 f,g 都是连续三角模 T 的加法生成子，则存在正的常数 c 使得 $f=cg$.

(3) T 有一个连续乘法生成子. 即存在一个连续严格单调递增函数 $\theta:[0,1]\to[0,1]$ 满足 $\theta(1)=1$，并使得对任意 $x,y\in[0,1]$，有

$$T(x,y)=\theta^{(-1)}(\theta(x)\cdot\theta(y)). \tag{1.1.3}$$

其中

$$\theta^{(-1)}(x)=\begin{cases} \theta^{-1}(x), & x\in[0,\theta(1)],\\ 1, & x\in(\theta(1),1]\end{cases} \tag{1.1.4}$$

是 θ 的伪逆. 此外，就相差一个正的常系数而言，θ 是唯一的.

注记 1.1.2　(1) 如果在定理 1.1.1 中不使用伪逆，那么式 (1.1.1) 可以改写为对任意 $x,y\in[0,1]$ 有

$$T(x,y)=t^{-1}(\min(t(x)+t(y),t(0))). \tag{1.1.5}$$

(2) T 是严格三角模，当且仅当 T 的每一个连续加法生成子 t 满足 $t(0)=\infty$.

(3) T 是幂零三角模，当且仅当 T 的每一个连续加法生成子 t 满足 $t(0)<\infty$.

定义 1.1.3　一元连续函数 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ 称为自同构的. 若 φ 满足以下条件:

(1) φ 在 $[0,1]$ 上是严格递增的.

(2) $\varphi(0)=0,\varphi(1)=1$.

定义 1.1.4　两个二元运算 $F,G:[0,1]^2\to[0,1]$ 称为共轭的，若存在 $[0,1]$ 上的自同构 φ 使得 $G=F_\varphi$. 这里

$$F_\varphi(x,y)=\varphi^{-1}(F(\varphi(x),\varphi(y))),\quad x,y\in[0,1]. \tag{1.1.6}$$

下面的定理进一步刻画严格三角模和幂零三角模的结构.

定理 1.1.2 (1) 三角模 T 是严格的, 当且仅当存在自同构映射 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ 使得 T 与 T_P 共轭, 即

$$T(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)\cdot\varphi(y)),\quad x,y\in[0,1]. \tag{1.1.7}$$

(2) 三角模 T 是幂零的, 当且仅当存在自同构映射 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ 使得 T 与 T_L 共轭, 即

$$T(x,y)=\varphi^{-1}(\max(\varphi(x)+\varphi(y)-1,0)),\quad x,y\in[0,1]. \tag{1.1.8}$$

下面的定理是对连续三角模结构的刻画.

定理 1.1.3 T 是任意连续三角模, 当且仅当 T 具有如下情形之一:

(1) $T=T_M$.

(2) T 是连续阿基米德的.

(3) T 是一族连续阿基米德三角模的序和. 即

$$T(x,y)=\begin{cases} a_m+(b_m-a_m)T_m\left(\dfrac{x-a_m}{b_m-a_m},\dfrac{y-a_m}{b_m-a_m}\right), & (x,y)\in[a_m,b_m]^2,\\ \min(x,y), & \text{其他}. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

其中, T_m 为连续阿基米德三角模; $\{(a_m,b_m)\}_{m\in A}$ 是单位区间 $[0,1]$ 上互不相交的开子区间族, A 是有限或可数无限指标集, 记 $T=(\langle a_m,b_m,T_m\rangle)_{m\in A}$.

1.1.2 三角余模

定义 1.1.5 二元函数 $S:[0,1]^2\to[0,1]$ 称为三角余模 (简称 t-余模或 s-模). 若对任意 $x,y,z\in[0,1]$, S 满足以下条件:

(1) $S(x,y)=S(y,x)$; (交换性)

(2) $S(S(x,y),z)=S(x,S(y,z))$; (结合性)

(3) 当 $y\leqslant z$ 时, 有 $S(x,y)\leqslant S(x,z)$; (单调性)

(4) $S(x,0)=x$. (边界性)

例 1.1.2 常见的三角余模有:

(1) $S_M(x,y)=\max(x,y)$;

(2) $S_L(x,y)=\min(x+y,1)$;

(3) $S_P(x,y)=x+y-xy$;

(4) $S_D(x,y)=\begin{cases} 1, & (x,y)\in(0,1]^2,\\ \max(x,y), & \text{其他}. \end{cases}$

定义 1.1.6 若 S 是三角余模, 称 S 是

(1) 阿基米德的. 若对任意 $x,y\in(0,1)$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x_S^n>y$.

(2) 严格的. 若它是连续的, 且对任意 $x \in [0,1)$, 当 $y < z$ 时, 有 $S(x,y) < S(x,z)$.

(3) 幂零的. 若它是连续的, 且对任意 $x \in (0,1)$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x_S^n = 1$. 这里 $x_S^1 = x$, $x_S^2 = S(x,x)$, $\cdots$, $x_S^n = S(x_S^{n-1}, x)$.

注记 1.1.3　(1) 连续三角余模 S 是阿基米德的, 当且仅当对任意 $x \in (0,1)$, 有 $S(x,x) > x$.

(2) 若三角余模 S 是严格的或幂零的, 则它一定是阿基米德的. 反过来, 连续阿基米德三角余模要么是严格的, 要么是幂零的.

下面的定理是连续阿基米德三角余模的表示定理.

定理 1.1.4　对于二元函数 $S: [0,1]^2 \to [0,1]$ 而言, 下面的叙述等价:

(1) S 是连续阿基米德三角余模.

(2) S 有一个连续加法生成子, 即存在一个连续严格单调递增函数 $s: [0,1] \to [0,\infty]$ 满足 $s(0) = 0$, 使得对任意 $x, y \in [0,1]$, 有

$$S(x,y) = s^{(-1)}(s(x) + s(y)). \tag{1.1.10}$$

其中

$$s^{(-1)}(x) = \begin{cases} s^{-1}(x), & x \in [0, s(1)], \\ 1, & x \in (s(1), \infty] \end{cases} \tag{1.1.11}$$

是 s 的伪逆. 此外, 就相差一个正的常系数而言, s 是唯一的. 即若连续严格单调递减函数 f, g 都是连续三角余模 S 的加法生成子, 则存在正的常数 c 使得 $f = cg$.

(3) S 有一个连续乘法生成子, 即存在一个连续严格单调递减函数 $\xi: [0,1] \to [0,\infty]$ 满足 $\xi(0) = 1$, 使得对任意 $x, y \in [0,1]$, 有

$$S(x,y) = \xi^{(-1)}(\xi(x) \cdot \xi(y)). \tag{1.1.12}$$

其中

$$\xi^{(-1)}(x) = \begin{cases} \xi^{-1}(x), & x \in [\xi(0), 1], \\ 1, & x \in [0, \xi(0)) \end{cases} \tag{1.1.13}$$

是 ξ 的伪逆. 此外, 就相差一个正的常系数而言, ξ 是唯一的.

注记 1.1.4　(1) 如果在定理 1.1.4 中不使用伪逆, 那么式 (1.1.10) 可以改写为: 对任意 $x, y \in [0,1]$, 有

$$S(x,y) = s^{-1}(\min(s(x) + s(y), s(1))). \tag{1.1.14}$$

(2) S 是严格三角余模, 当且仅当 S 的每一个连续加法生成子 s 满足 $s(1) = \infty$.

(3) S 是幂零三角余模, 当且仅当 S 的每一个连续加法生成子 s 满足 $s(1) < \infty$.

下面的定理将进一步刻画严格三角余模和幂零三角余模的结构.

定理 1.1.5 (1) 三角余模 S 是严格的，当且仅当存在自同构映射 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ 使得 S 与 S_P 共轭，即

$$S(x,y)=\varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(x)\cdot\varphi(y)),\quad x,y\in[0,1]. \tag{1.1.15}$$

(2) 三角余模 S 是幂零的，当且仅当存在自同构映射 $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ 使得 S 与 S_L 共轭，即

$$S(x,y)=\varphi^{-1}(\min(\varphi(x)+\varphi(y),1)),\quad x,y\in[0,1]. \tag{1.1.16}$$

下面的定理是连续三角余模的结构定理.

定理 1.1.6 S 是任意连续三角余模，当且仅当 S 具有如下情形之一:

(1) $S=S_M$.

(2) S 是连续阿基米德余模.

(3) S 是一族连续阿基米德三角余模的序和，即

$$S(x,y)=\begin{cases} a_m+(b_m-a_m)S_m\left(\dfrac{x-a_m}{b_m-a_m},\dfrac{y-a_m}{b_m-a_m}\right), & (x,y)\in[a_m,b_m]^2,\\ \max(x,y), & \text{其他}. \end{cases} \tag{1.1.17}$$

S_m 为连续阿基米德三角余模，$\{(a_m,b_m)\}_{m\in A}$ 是单位区间上互不相交的开子区间族，A 是有限或无限可数指标集，记 $S=(\langle a_m,b_m,S_m\rangle)_{m\in A}$.

1.1.3 模糊否定

定义 1.1.7 一元函数 $N:[0,1]\to[0,1]$ 称为模糊否定，若它是单调递减的，并满足 $N(0)=1$, $N(1)=0$.

定义 1.1.8 若 $N:[0,1]\to[0,1]$ 是模糊否定，称 N 是

(1) 弱否定. 若对任意 $x\in[0,1]$，都有 $x\leqslant N^2(x)$.

(2) 强否定. 若它是严格单调递减的对合函数，即对任意 $x\in[0,1]$ 有

$$N(N(x))=x.$$

(3) 严格的. 若它是严格单调递减的连续函数.

注记 1.1.5 若一元函数 N 是强否定，则它一定是严格否定，但反之不然. 显然 $N(x)=1-x$ 是强否定，通常称它为标准强否定，记作 N_0.

下面的定理给出了弱否定的分类刻画.

定理 1.1.7 若 $N:[0,1]\to[0,1]$ 是弱否定，记 $t=\sup\{s\in[0,1]|N(s)>s\}$，则弱否定能分成如下情况.

(1) 若 $N(t)>t$，则当 $x\in(t,N(t)]$ 时，必有 $N(x)=t$.