高等数学

下册

主　编　唐晓文
副主编　唐燕贞　李林　兰友发

高等教育出版社

高等数学

下册

主　编　唐晓文
副主编　唐燕贞　李　林　兰友发

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是以教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“大学数学课程教学基本要求(2014年版)”为指导，结合应用型本科院校数学教学的特点编写的。全书分上、下两册，下册主要内容包括：向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程。全书结构严谨、理论系统、案例丰富、实用性强。主要章节都配有A组和B组两组习题，每章配有综合题，题型齐全，难易适中，并将数学建模的思想方法融入教材。

本书纸质教材与数字课程一体化设计，配合紧密。数字课程涵盖小结、应用案例、数学建模概述、数学实验概述、数学家故事、期末考试试卷等栏目，希望提升应用型本科院校高等数学课程的教学效果，同时为学生的学习提供思维与探索的空间。

本书可作为应用型本科院校非数学类专业的高等数学教材，也可作为相关专业学生考研的资料，还可供科技工作者和广大师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/唐晓文主编. --北京:高等教育出版社,2019.1

ISBN 978-7-04-032083-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①唐… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第001063号

策划编辑 李晓鹏 责任编辑 李晓鹏 封面设计 张申申 版式设计 于 婕
插图绘制 于 博 责任校对 刘娟娟 责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	三河市吉祥印务有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	14.75		
字 数	310千字	版 次	2019年1月第1版
购书热线	010-58581118	印 次	2019年1月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	40.00元

物 料 号 32083-00

高等数学

下册

唐晓文　唐燕贞

李　林　兰友发

连广鑫　张代清

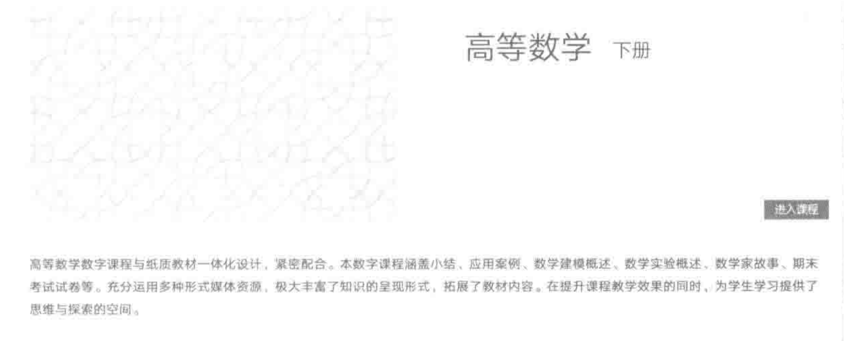
王明锋

1 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1250754，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。

2 注册并登录，进入"我的课程"。

3 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。

4 单击"进入课程"按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

http://abook.hep.com.cn/1250754

目　录

第 6 章　向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题,平面解析几何的知识对学习一元函数微积分十分重要.同样,空间解析几何是我们学习多元函数微积分的基础.本章先介绍向量的概念及运算,然后以向量为工具讨论空间的直线与平面,最后介绍空间的曲面与曲线.

6.1　向量代数与空间直角坐标系

6.1.1　向量及其线性运算

1. 向量的概念

在日常生活和生产实践中,经常遇到两类量:一类如温度、距离、质量等,这种只有大小没有方向的量称为数量(或标量);另一类如力、速度、位移、力矩等,它们既有大小又有方向,我们称这一类量为向量(或矢量).

在几何上通常用有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.如图 6.1 所示.

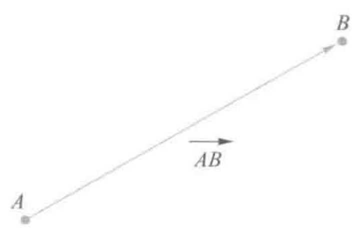


图 6.1

以 A 为起点、B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$,有时也用一个小写黑体字母 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$ 或$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$等来表示向量.

向量的大小称为向量的模,向量$\overrightarrow{AB}$的模记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\boldsymbol{a}|$.模等于 1 的向量称为单位向量.模等于 0 的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$,零向量的方向是任意的.

一般情况下,向量只与它的大小、方向有关,与起点无关,这种与起点无关的向量称为自由向量,本章所研究的向量主要就是这种自由向量(以后简称向量).根据需要可以把一些向量的起点放在同一点.

若两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 所在的直线平行,称这两个向量平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,若两个向量大小相等且方向相同,称这两个向量是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

设两个向量平行,则经过平行移动可以共线,因此也称这两个向量共线.

设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,把它们起点放在同一点,如果 k 个终点与公共起点在同一平面上,则称这 k 个向量共面.

2. 向量的线性运算

(1) 向量的加减法

定义 6.1.1　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,以 B 为起点作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 6.2 所示.这种求向量和的方法称为三角形法则.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时可以以 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$,则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 6.3 所示. 这种求向量和的方法称为平行四边形法则.

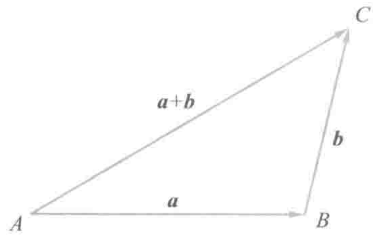


图 6.2

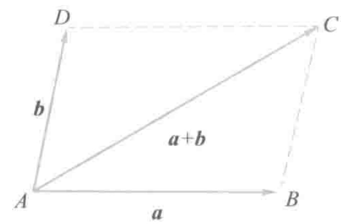


图 6.3

向量的加法满足以下运算律:

交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(图 6.4).

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反且模相等的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$. 我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$,即把 $-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相加,便得到 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 这种求向量差的方法也称为三角形法则(图 6.5).

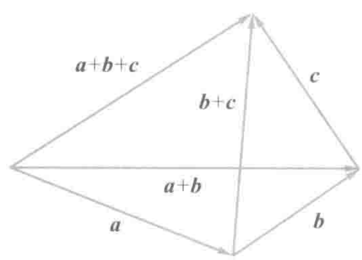


图 6.4

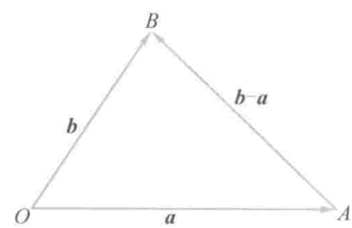


图 6.5

由三角形两边之和大于第三边的原理,可以得到常用的三角不等式:

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ ($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时等号成立);

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ ($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时等号成立).

(2) 数与向量的乘法

数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反. 特别地,在 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即为零向量. $\lambda=1$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$\lambda=-1$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量与数的乘法满足以下运算律(图 6.6):

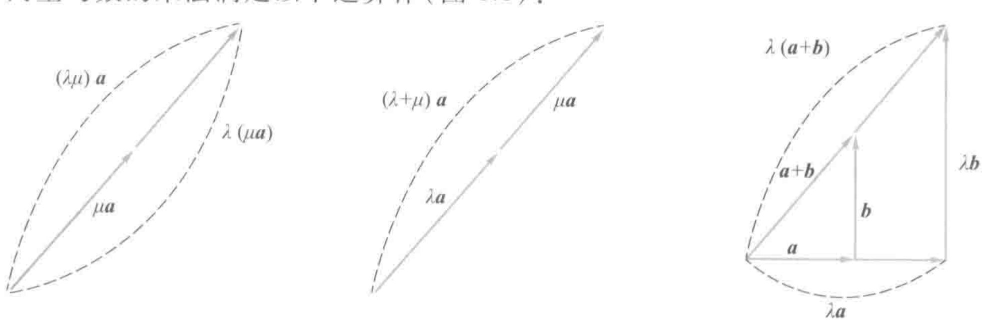


图 6.6

结合律 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

单位向量是非常重要的向量，与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记作 $\boldsymbol{a}^0$. 由以上讨论，有 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 或 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$.

向量的加减和数乘统称为向量的线性运算.

$a^0=\dfrac{a}{|a|}$ 表明非零向量除以它的模是一个与原向量同向的单位向量，此过程又称将向量单位化（图 6.7）.

显然，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系，即有

定理 6.1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是，存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 必要性. 若 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，取 $\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$（$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时取+号，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时取−号），则 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

唯一性. 若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则 $\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$. 因为 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，所以 $\lambda=\mu$.

充分性显然.

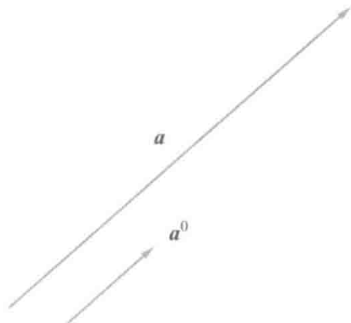


图 6.7

事实上，一个点和一个单位向量就能确定一个数轴，设原点 O 和向量 $\boldsymbol{i}$ 确定一个数轴 Ox（记 $\boldsymbol{i}$ 是与数轴同向的单位向量），如图 6.8 所示，则对于数轴上任意一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，必存在唯一的实数 x 使得 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，即点 P 与 x 一一对应.我们称 x 为点 P 的坐标.

设两点 P_1,P_2 在数轴 Ox 上的坐标分别为 $x_1,x_2,\boldsymbol{i}$ 是与 Ox 轴正向同向的单位向量，如图 6.9 所示，则有 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$，称 x_2-x_1 为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在数轴 Ox 上的坐标.

图 6.8

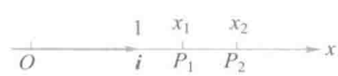


图 6.9

例 6.1.1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 为对角线交点，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$.

解 如图 6.10 所示，因为平行四边形对角线互相平分，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$，即 $-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$.得 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. 又因为 $\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{MB}$，得 $\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

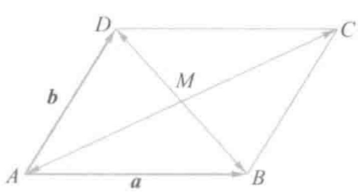


图 6.10

6.1.2 空间直角坐标系、向量的坐标

1. 空间直角坐标系

为了把空间的点与有序的数组对应起来,给出代数方法与几何直观的联系,我们来建立空间直角坐标系.

定义 6.1.2 过空间一个定点 O 作三条互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,就确定了三条以 O 为原点且互相垂直的数轴,这三条轴分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴,它们所构成的坐标系称为空间直角坐标系 $Oxyz$,如图 6.11 所示. $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为基本单位向量.

习惯上,把 x 轴与 y 轴放在水平面上,z 轴放在铅垂线上,它们的正向符合右手法则,即当右手的四个手指从 x 轴正向旋转$\dfrac{\pi}{2}$到 y 轴正向时大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图 6.12 所示.

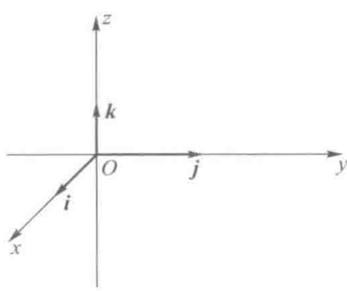


图 6.11

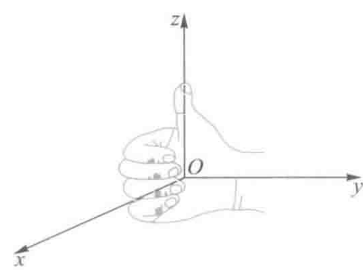


图 6.12

三个坐标轴两两确定一个平面,称为坐标面. 三个坐标面把整个空间划分为八个部分,每个部分称为一个卦限,共有八个卦限,按照卦限的逆时针顺序,xOy 平面上方的四个卦限依次记为 Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ 卦限,xOy 平面下方的四个卦限依次记为 Ⅴ,Ⅵ,Ⅶ,Ⅷ 卦限,如图 6.13 所示.

在空间建立了直角坐标系后,空间中任意一点就可以用它的三个坐标来表示,设 M 为空间任一点,过 M 点作三个分别与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面,分别交 x 轴、y 轴、z 轴于 P,Q,R 三点,如图 6.14 所示.

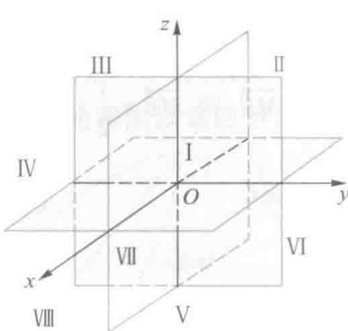


图 6.13

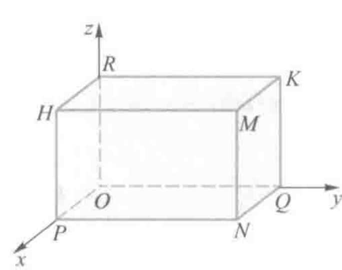


图 6.14

若 P,Q,R 三点在三坐标轴上的坐标分别是 x,y,z,则空间的一点 M 就唯一确定了

一个有序数组 x,y,z. 反之,任给一有序数组 x,y,z,可以在 x 轴、y 轴、z 轴上取坐标为 x,y,z 的点 P,Q,R,并过 P,Q,R 分别作与坐标轴垂直的平面,则它们相交于唯一的点 M. 这样就建立了空间的点 M 与有序数组 x,y,z 之间的一一对应关系,这组数 x,y,z 称为点 M 的坐标,记为 $M(x,y,z)$.

特殊点的坐标表示:原点的坐标为 $(0,0,0)$, x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$, yOz 面上点的坐标为 $(0,y,z)$. 点 (x,y,z) 关于 x 轴对称点的坐标为 $(x,-y,-z)$, 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(x,y,-z)$, 关于原点对称点的坐标为 $(-x,-y,-z)$.

x,y,z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

2. 空间两点间的距离公式

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中两点,为了求它们的距离 d,过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,则这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体,如图 6.15 所示.

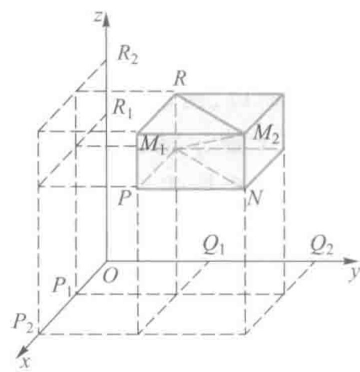


图 6.15

由勾股定理,得

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1P|^2+|PN|^2+|NM_2|^2,$$

由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,\quad |PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,\quad |NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是**空间两点间的距离公式**.

特殊地,空间任一点 $M(x,y,z)$ 到坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 6.1.2 证明以三点 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 因为

$$|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=\sqrt{49}=7,$$

$$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=\sqrt{49}=7,$$

$$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98},$$

故 $|AB|=|AC|$,所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 又因为 $|BC|^2=|AC|^2+|AB|^2$,所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 6.1.3 在 y 轴上求与两点 $A(1,0,-3)$ 和 $B(0,1,-1)$ 距离相等的点 M.

解 因为点 M 在 y 轴上,故可设 M 点坐标为 $(0,y,0)$,由于

$$|AM|=\sqrt{(-1)^2+y^2+3^2}=\sqrt{y^2+10},$$

$$|BM|=\sqrt{(y-1)^2+1^2}=\sqrt{y^2-2y+2},$$

由 $|AM|=|BM|$,即 $\sqrt{y^2+10}=\sqrt{y^2-2y+2}$,得 $y=-4$. 所以,点 M 为 $(0,-4,0)$.

3. 向量的坐标表示

在讨论向量的概念与运算时,我们是用几何方法引进的,这个方法比较直观,但计算不方便. 下面,引进向量的坐标,把向量用数组表示出来,使向量的运算可以化为数的运算.

(1) 向量的坐标

设 $\boldsymbol{r}$ 为空间的任一向量，把向量 $\boldsymbol{r}$ 平移，使它的起点与原点重合，终点为 $M(x,y,z)$，即 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，则称 $\boldsymbol{r}$ 是点 M 关于原点的向径.

过点 M 作垂直于三个坐标轴的平面，它们分别与 x 轴、y 轴、z 轴相交于 P,Q,R 点，如图 6.16 所示. 于是有，$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，由向量加法有 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$，所以，向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量分解式，$x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的分向量，x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$，此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标式.

又设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量，如图 6.17 所示，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\\&=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

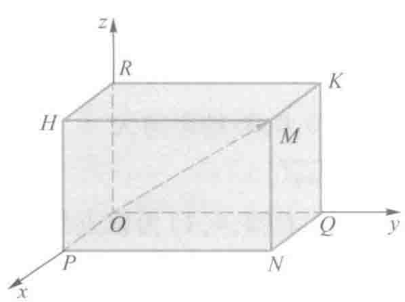


图 6.16

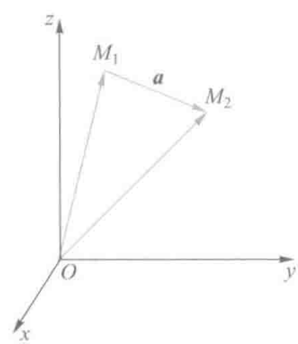


图 6.17

其中 $a_x=x_2-x_1$，$a_y=y_2-y_1$，$a_z=z_2-z_1$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$. 即以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量可以表示为 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$（用终点坐标减去起点坐标）.

(2) 向量运算的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则有如下运算法则：

加法 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\}$；

减法 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$；

数乘 $\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$.

例 6.1.4 设 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的坐标及在 y 轴上的分向量.

解 因为 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+4\boldsymbol{n}+\boldsymbol{p}=3(\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})+4(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})+(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=14\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标为 14，在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

例 6.1.5 设有两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda(\lambda\neq-1)$，在有向线段

$\overrightarrow{AB}$上求一点 $M(x,y,z)$，使$\overrightarrow{AM}=\lambda\ \overrightarrow{MB}$.

解 如图 6.18 所示，因为$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$，所以$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$，得$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\ \overrightarrow{OB})$，于是所求点为

$$M\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right).$$

M 称为有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比分点.

特殊地，当 $\lambda=1$ 时，得线段$\overrightarrow{AB}$的中点坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$.

（3）向量的模与方向余弦的坐标表示

定义 6.1.3 设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{a_x,a_y,a_z\}$与三个坐标轴正向的夹角分别为 α,β,γ $(0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi)$，则称 α,β,γ 为非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为方向余弦，如图 6.19 所示.

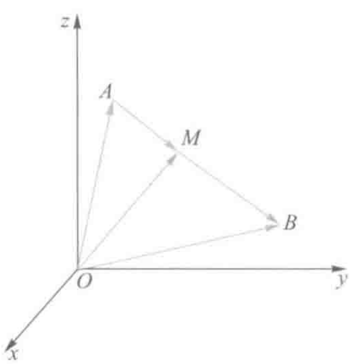


图 6.18

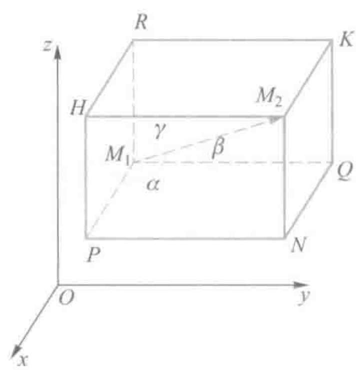


图 6.19

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$是以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量，则由空间两点间距离$\overrightarrow{M_1M_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$，得向量 $\boldsymbol{a}$ 的模$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$. 即有方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

任意向量的方向余弦有性质：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.
与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

由此可知，一个向量的方向完全由方向角（或方向余弦）确定.

例 6.1.6 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$，$M_2(3,0,2)$，求向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦、方向角及与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量.

解 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{3-4,0-\sqrt{2},2-1\}=\{-1,-\sqrt{2},1\}$，所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\gamma=\frac{1}{2},$$

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\quad \beta=\frac{3}{4}\pi,\quad \gamma=\frac{1}{3}\pi.$$

因为 $\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right\}$，所以与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 $\pm\boldsymbol{a}^0=\pm\left\{-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right\}$.

6.1.3　两向量的数量积、向量积

1. 两向量的数量积

在力学中我们知道，一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2，如图 6.20 所示. 以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W=|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{s}|\cos\theta$（$\theta$ 为力 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 方向的夹角）.

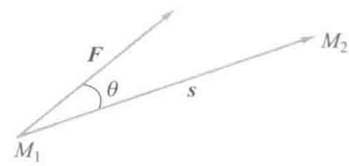


图 6.20

可知，数量功 W 可以由两个向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 唯一确定. 在许多实际问题中，也会有类似情况，为此，抽象出数量积的概念.

定义 6.1.4　设两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则称 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（或点积），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，称 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$，即 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta$. 同样，可定义 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

性质　由数量积的定义可推得

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cdot\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$；

（3）两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证　（3）如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\cos\theta=\cos\frac{\pi}{2}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{2}=0$.

反之，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，因为 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$，而 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$，则 $\cos\theta=0$，有 $\theta=\frac{\pi}{2}$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

数量积的运算律　由数量积的定义可推得

（1）交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

（2）分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

（3）结合律　$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$.

以上运算律读者可自己证明.

两向量的数量积及夹角余弦的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

即两个向量的数量积等于其对应坐标乘积之和.

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}},$$

由此得到,两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件为 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

例 6.1.7 用向量证明三角形的余弦定理.

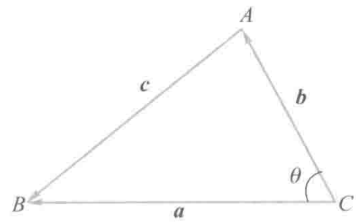


图 6.21

证 如图 6.21 所示,在 $\triangle ABC$ 中,令 $\angle BCA=\theta$, $\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,则 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,可得 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

由数量积的定义和性质,得

$$|\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

例 6.1.8 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直,且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$,求向量 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模及它与已知向量 $\boldsymbol{c}$ 之间的夹角余弦.

解 由已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直,得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$,所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}|&=\sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}}\\&=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2}=\sqrt{14},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\langle\boldsymbol{r},\boldsymbol{c}\rangle&=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{c}|}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{c}|}\\&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}}{\sqrt{14}\cdot 3}=\frac{0+0+3^2}{\sqrt{14}\cdot 3}=\frac{3}{\sqrt{14}}.\end{aligned}$$

2. 两向量的向量积

同数量积一样,两向量的向量积也是从物理学中抽象出来的. 例如,物体转动时力所产生的力矩. 如图 6.22 所示,设 O 为杠杆 L 的支点,力 $\boldsymbol{F}$ 作用于该杠杆的点 P 处,力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ,则力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$ 是一个向量. 它的大小为 $|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{OP}|\sin\theta$,力矩的方向垂直于 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 与所确定的平面,并且 $\overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{M}$ 的正向构成右手系. 由此,抽象出向量积的概念.

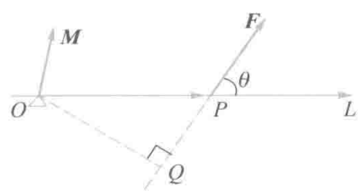


图 6.22

定义 6.1.5 设两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$,若向量 $\boldsymbol{c}$ 按下列方式确定:

由向量积的定义,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 在几何上表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积,即为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,这也是向量积的几何意义,如图 6.23所示.

(1) $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$;

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的平面垂直,且使 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 构成右手系,如图 6.23 所示,则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的向量积(或叉积),记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

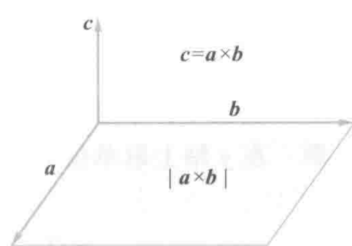


图 6.23

由此定义,力矩 $\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{F}$.

性质 由向量积的定义可以推得: