

高等数学

下册

主 编 唐晓文
副主编 唐燕贞 李林 兰友发

高等教育出版社

非外借

高等数学

下册

主 编 唐晓文

副主编 唐燕贞 李 林 兰友发



高等教育出版社·北京

内容提要

本书是以教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“大学数学课程教学基本要求(2014年版)”为指导,结合应用型本科院校数学教学的特点编写的。全书分上、下两册,下册主要内容包括:向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程。全书结构严谨、理论系统、案例丰富、实用性强。主要章节都配有A组和B组两组习题,每章配有综合题,题型齐全,难易适中,并将数学建模的思想方法融入教材。

本书纸质教材与数字课程一体化设计,配合紧密。数字课程涵盖小结、应用案例、数学建模概述、数学实验概述、数学家故事、期末考试试卷等栏目,希望提升应用型本科院校高等数学课程的教学效果,同时为学生的学习提供思维与探索的空间。

本书可作为应用型本科院校非数学类专业的高等数学教材,也可作为相关专业学生考研的资料,还可供科技工作者和广大师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/唐晓文主编.--北京:高等教育出版社,2019.1

ISBN 978-7-04-032083-1

I. ①高… II. ①唐… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第001063号

策划编辑 李晓鹏	责任编辑 李晓鹏	封面设计 张申申	版式设计 于 婕
插图绘制 于 博	责任校对 刘娟娟	责任印制 田 甜	

出版发行 高等教育出版社	网 址 http://www.hep.edu.cn
社 址 北京市西城区德外大街4号	http://www.hep.com.cn
邮政编码 100120	网上订购 http://www.hepmall.com.cn
印 刷 三河市吉祥印务有限公司	http://www.hepmall.com
开 本 787mm×1092mm 1/16	http://www.hepmall.cn
印 张 14.75	
字 数 310千字	版 次 2019年1月第1版
购书热线 010-58581118	印 次 2019年1月第1次印刷
咨询电话 400-810-0598	定 价 40.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 32083-00

高等数学

下册

唐晓文 唐燕贞

李 林 兰友发

连广鑫 张代清

王明锋

- 1 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/1250754>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
- 2 注册并登录, 进入“我的课程”。
- 3 输入封底数字课程账号 (20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
- 4 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



高等数学 下册

进入课程

高等数学数字课程与纸质教材一体化设计, 紧密配合。本数字课程涵盖小结、应用案例、数学建模概述、数学实验概述、数学家故事、期末考试试卷等。充分运用多种形式媒体资源, 极大丰富了知识的呈现形式, 拓展了教材内容。在提升课程教学效果的同时, 为学生学习提供了思维与探索的空间。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载 Abook 应用

<http://abook.hep.com.cn/1250754>

目 录

第 6 章 向量代数与空间解析几何	1
6.1 向量代数与空间直角坐标系	1
6.1.1 向量及其线性运算	1
6.1.2 空间直角坐标系、向量的坐标	4
6.1.3 两向量的数量积、向量积	8
习题 6.1	11
6.2 空间平面与直线	11
6.2.1 平面及其方程	11
6.2.2 直线及其方程	14
6.2.3 平面与直线的夹角	17
习题 6.2	18
6.3 空间曲面及曲线	19
6.3.1 曲面及其方程	19
6.3.2 空间曲线及其方程	23
6.3.3 常见的二次曲面	26
习题 6.3	30
综合习题 6	30
第 7 章 多元函数微分学	35
7.1 多元函数的极限与连续	35
7.1.1 多元函数的概念	35
7.1.2 多元函数的极限	37
7.1.3 多元函数的连续性	38
习题 7.1	39
7.2 偏导数	40
7.2.1 偏导数及计算法	40
7.2.2 高阶偏导数	42
习题 7.2	43
7.3 全微分	44
7.3.1 全微分的定义与计算	44
7.3.2 全微分在近似计算中的应用	46
习题 7.3	47
7.4 多元复合函数及隐函数求导	47
7.4.1 多元复合函数求导	47
7.4.2 隐函数求导	50

习题 7.4	54
7.5 多元函数微分法的应用	54
7.5.1 空间曲线的切线与法平面	54
7.5.2 曲面的切平面与法线	56
7.5.3 方向导数与梯度	58
习题 7.5	65
7.6 多元函数的极值	65
7.6.1 多元函数的极值	65
7.6.2 多元函数的最值	67
7.6.3 条件极值、拉格朗日乘数法	68
习题 7.6	71
综合习题 7	71
第 8 章 多元函数积分学	75
8.1 二重积分的概念与性质	75
8.1.1 二重积分的概念	75
8.1.2 二重积分的性质	77
8.1.3 二重积分的计算	78
习题 8.1	88
8.2 重积分的应用	90
8.2.1 平面图形的面积和几何体的体积	90
8.2.2 曲面的面积	91
8.2.3 质量与质心	92
8.2.4 转动惯量	94
8.2.5 两个实际例子	94
习题 8.2	96
8.3 三重积分	96
8.3.1 三重积分的概念	96
8.3.2 三重积分的计算	97
习题 8.3	110
8.4 曲线积分	110
8.4.1 对弧长的曲线积分	110
8.4.2 对坐标的曲线积分	115
8.4.3 格林 (Green) 公式及其应用	120
习题 8.4	127
8.5 曲面积分	128
8.5.1 对面积的曲面积分	128
8.5.2 对坐标的曲面积分	133
8.5.3 高斯 (Gauss) 公式及其应用	139
8.5.4 斯托克斯 (Stokes) 公式、环流量与旋度	143

习题 8.5	145
综合习题 8	146
第 9 章 无穷级数	150
9.1 常数项级数	150
9.1.1 数项级数及其敛散性	150
9.1.2 级数的基本性质	152
习题 9.1	154
9.2 数项级数的审敛法	154
9.2.1 正项级数及其审敛法	154
9.2.2 交错级数及其审敛法	159
9.2.3 绝对收敛与条件收敛	160
习题 9.2	162
9.3 幂级数	163
9.3.1 函数项级数的概念	163
9.3.2 幂级数及其收敛域	163
9.3.3 幂级数的运算及其性质	167
习题 9.3	169
9.4 函数的幂级数展开	170
9.4.1 泰勒(Taylor)级数	170
9.4.2 初等函数的幂级数展开	171
9.4.3 幂级数展开式的应用	175
习题 9.4	177
9.5 傅里叶(Fourier)级数	177
9.5.1 以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数	178
9.5.2 以 $2l$ 为周期的函数展开成傅里叶级数	185
习题 9.5	189
综合习题 9	189
第 10 章 常微分方程	193
10.1 基本概念及其解法	193
10.1.1 微分方程的基本概念	193
10.1.2 可分离变量的微分方程	196
习题 10.1	200
10.2 一阶线性微分方程	201
10.2.1 一阶线性微分方程	201
10.2.2 伯努利方程	204
10.2.3 全微分方程	205
习题 10.2	207
10.3 可降阶的高阶微分方程	208
10.3.1 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	208

10.3.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	208
10.3.3 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	209
习题 10.3	210
10.4 高阶线性微分方程	210
10.4.1 线性微分方程及其解的结构	210
10.4.2 二阶常系数齐次线性微分方程	213
10.4.3 二阶常系数非齐次线性微分方程	216
* 10.4.4 欧拉方程	219
习题 10.4	220
综合习题 10	220
附录 1 数学建模概述(下)	224
附录 2 数学实验概述(下)	224
附录 3 数学家故事(下)	224
附录 4 高等数学第二学期期末考试试卷	224
部分习题参考答案	224
参考文献	224

第6章 向量代数与空间解析几何

解析几何的基本思想是用代数的方法来研究几何问题,平面解析几何的知识对学习一元函数微积分十分重要.同样,空间解析几何是我们学习多元函数微积分的基础.本章先介绍向量的概念及运算,然后以向量为工具讨论空间的直线与平面,最后介绍空间的曲面与曲线.

6.1 向量代数与空间直角坐标系

6.1.1 向量及其线性运算

1. 向量的概念

在日常生活和生产实践中,经常遇到两类量:一类如温度、距离、质量等,这种只有大小没有方向的量称为数量(或标量);另一类如力、速度、位移、力矩等,它们既有大小又有方向,我们称这一类量为向量(或矢量).

在几何上通常用有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.如图 6.1 所示.

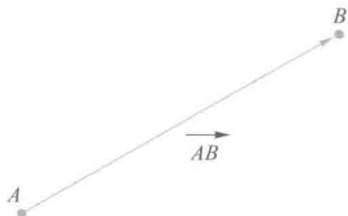


图 6.1

以 A 为起点、 B 为终点的向量记为 $\overrightarrow{AB}$,有时也用一个小写黑体字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 等来表示向量.

向量的大小称为向量的模,向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为单位向量. 模等于 0 的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$,零向量的方向是任意的.

一般情况下,向量只与它的大小、方向有关,与起点无关,这种与起点无关的向量称为自由向量,本章所研究的向量主要就是这种自由向量(以后简称向量).根据需要可以把一些向量的起点放在同一点.

若两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 所在的直线平行,称这两个向量平行,记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$,若两个向量大小相等且方向相同,称这两个向量是相等的,记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

设两个向量平行,则经过平行移动可以共线,因此也称这两个向量共线.

设有 $k(k \geq 3)$ 个向量,把它们起点放在同一点,如果 k 个终点与公共起点在同一平面上,则称这 k 个向量共面.

2. 向量的线性运算

(1) 向量的加减法

定义 6.1.1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A ,作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$,以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$,则向量 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$,如图 6.2 所示.这种求向量和的方法称为三角形法则.

当 a 与 b 不平行时, 可以以 $\overrightarrow{AB}=a, \overrightarrow{AD}=b$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 则 $\overrightarrow{AC}=a+b$, 如图 6.3 所示. 这种求向量的方法称为平行四边形法则.

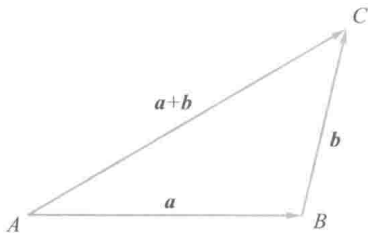


图 6.2

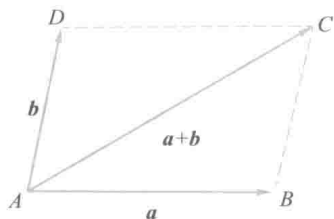


图 6.3

向量的加法满足以下运算律:

交换律 $a+b=b+a$;

结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$ (图 6.4).

设 a 为一向量, 与 a 方向相反且模相等的向量叫作 a 的负向量, 记作 $-a$. 我们规定两个向量 b 与 a 的差为 $b-a=b+(-a)$, 即把 $-a$ 与 b 相加, 便得到 b 与 a 的差 $b-a$. 这种求向量差的方法也称为三角形法则 (图 6.5).

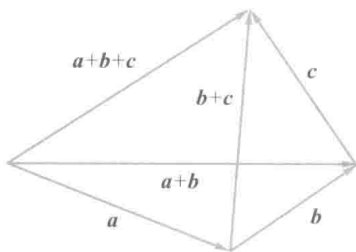


图 6.4

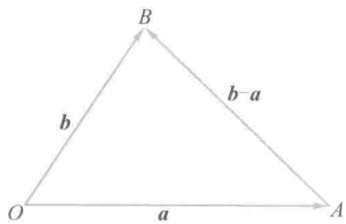


图 6.5

由三角形两边之和大于第三边的原理, 可以得到常用的三角不等式:

$|a+b| \leq |a| + |b|$ (a 与 b 同向时等号成立);

$|a-b| \leq |a| + |b|$ (a 与 b 反向时等号成立).

(2) 数与向量的乘法

数 λ 与向量 a 的乘积是一个向量, 记作 λa , 它的模 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$. 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 方向相反. 特别地, 在 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即为零向量. $\lambda = 1$ 时, $\lambda a = a$, $\lambda = -1$ 时, $\lambda a = -a$.

向量与数的乘法满足以下运算律 (图 6.6):

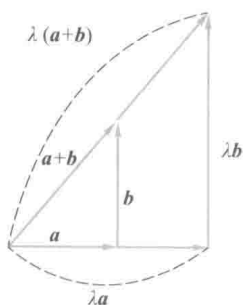
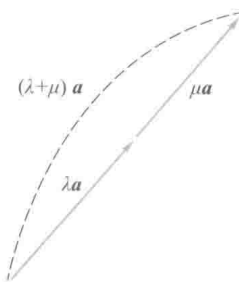
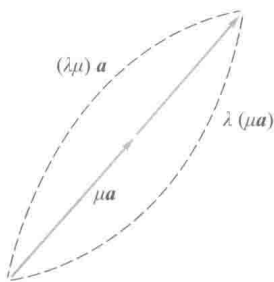


图 6.6

结合律 $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a)$;

分配律 $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a, \lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.

单位向量是非常重要的向量,与非零向量 a 同向的单位向量称为 a 的单位向量,记作 a^0 . 由以上讨论,有 $a^0 = \frac{a}{|a|}$ 或 $a = |a|a^0$.

向量的加法和数乘统称为向量的线性运算.

显然,向量 λa 与 a 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系,即有

定理 6.1.1 设向量 $a \neq 0$, 则向量 b 平行于 a 的充分必要条件是,存在唯一的实数 λ , 使 $b = \lambda a$.

证 必要性. 若 $b \parallel a$, 取 $\lambda = \pm \frac{|b|}{|a|}$ (a 与 b 同向时取+号, a 与 b 反向时取-号), 则 $b = \lambda a$.

唯一性. 若 $b = \lambda a, b = \mu a$, 则 $\lambda a - \mu a = (\lambda - \mu)a = 0$, $|\lambda - \mu||a| = 0$. 因为 $|a| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 所以 $\lambda = \mu$.

充分性显然.

事实上,一个点和一个单位向量就能确定一个数轴,设原点 O 和向量 i 确定一个数轴 Ox (记 i 是与数轴同向的单位向量),如图 6.8 所示,则对于数轴上任意一点 P ,对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$,必存在唯一的实数 x 使得 $\overrightarrow{OP} = xi$, 即点 P 与 x 一一对应. 我们称 x 为点 P 的坐标.

设两点 P_1, P_2 在数轴 Ox 上的坐标分别为 x_1, x_2 , i 是与 Ox 轴正向同向的单位向量,如图 6.9 所示,则有 $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2 - x_1)i$, 称 $x_2 - x_1$ 为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在数轴 Ox 上的坐标.



图 6.8

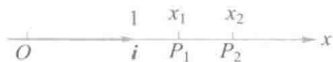


图 6.9

例 6.1.1 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b$, M 为对角线交点, 试用 a 和 b 表示 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$.

解 如图 6.10 所示, 因为平行四边形对角线互相平分, 所以 $a + b = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$, 即 $-(a + b) = 2\overrightarrow{MA}$. 得 $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(a + b)$. 又因为 $\overrightarrow{DB} = a - b = 2\overrightarrow{MB}$, 得 $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(a - b)$.

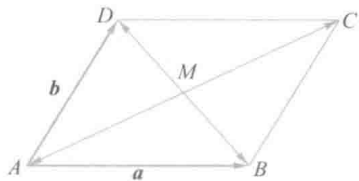


图 6.10

$a^0 = \frac{a}{|a|}$ 表明非零向量除以它的模是一个与原向量同向的单位向量, 此过程又称将向量单位化(图 6.7).

6.1.2 空间直角坐标系、向量的坐标

1. 空间直角坐标系

为了把空间的点与有序的数组对应起来,给出代数方法与几何直观的联系,我们来建立空间直角坐标系.

定义 6.1.2 过空间一个定点 O 作三条互相垂直的单位向量 i, j, k , 就确定了三条以 O 为原点且互相垂直的数轴, 这三条轴分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称为坐标轴, 它们所构成的坐标系称为空间直角坐标系 $Oxyz$, 如图 6.11 所示. i, j, k 称为基本单位向量.

习惯上, 把 x 轴与 y 轴放在水平面上, z 轴放在铅垂线上, 它们的正向符合右手法则, 即当右手的四个手指从 x 轴正向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 y 轴正向时大拇指的指向就是 z 轴的正向, 如图 6.12 所示.

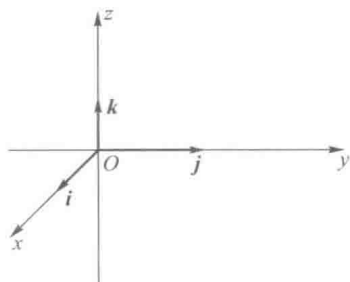


图 6.11

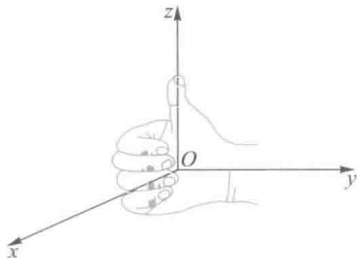


图 6.12

三个坐标轴两两确定一个平面, 称为坐标面. 三个坐标面把整个空间划分为八个部分, 每个部分称为一个卦限, 共有八个卦限, 按照卦限的逆时针顺序, xOy 平面上方的四个卦限依次记为 I, II, III, IV 卦限, xOy 平面下方的四个卦限依次记为 V, VI, VII, VIII 卦限, 如图 6.13 所示.

在空间建立了直角坐标系后, 空间中任意一点就可以用它的三个坐标来表示, 设 M 为空间任一点, 过 M 点作三个分别与 x 轴、 y 轴、 z 轴垂直的平面, 分别交 x 轴、 y 轴、 z 轴于 P, Q, R 三点, 如图 6.14 所示.

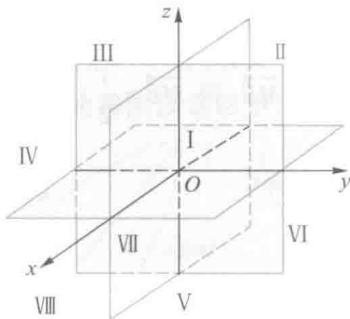


图 6.13

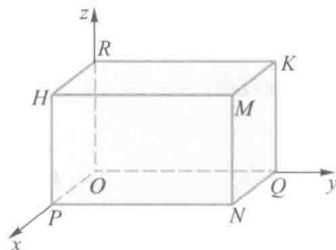


图 6.14

若 P, Q, R 三点在三坐标轴上的坐标分别是 x, y, z , 则空间的一点 M 就唯一确定了

一个有序数组 x, y, z . 反之, 任给一有序数组 x, y, z , 可以在 x 轴、 y 轴、 z 轴上取坐标为 x, y, z 的点 P, Q, R , 并过 P, Q, R 分别作与坐标轴垂直的平面, 则它们相交于唯一的点 M . 这样就建立了空间的点 M 与有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系, 这组数 x, y, z 称为点 M 的坐标, 记为 $M(x, y, z)$.

x, y, z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

2. 空间两点间的距离公式

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间中两点, 为了求它们的距离 d , 过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面, 则这六个平面围成了一个以 M_1M_2 为对角线的长方体, 如图 6.15 所示.

由勾股定理, 得

$$d^2 = |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

由于

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|, \quad |PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|, \quad |NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地, 空间任一点 $M(x, y, z)$ 到坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

例 6.1.2 证明以三点 $A(4, 1, 9), B(10, -1, 6), C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证 因为

$$|AB| = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{49} = 7,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98},$$

故 $|AB| = |AC|$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 又因为 $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.

例 6.1.3 在 y 轴上求与两点 $A(1, 0, -3)$ 和 $B(0, 1, -1)$ 距离相等的点 M .

解 因为点 M 在 y 轴上, 故可设 M 点坐标为 $(0, y, 0)$, 由于

$$|AM| = \sqrt{(-1)^2 + y^2 + 3^2} = \sqrt{y^2 + 10},$$

$$|BM| = \sqrt{(y-1)^2 + 1^2} = \sqrt{y^2 - 2y + 2},$$

由 $|AM| = |BM|$, 即 $\sqrt{y^2 + 10} = \sqrt{y^2 - 2y + 2}$, 得 $y = -4$. 所以, 点 M 为 $(0, -4, 0)$.

3. 向量的坐标表示

在讨论向量的概念与运算时, 我们是用几何方法引进的, 这个方法比较直观, 但计算不方便. 下面, 引进向量的坐标, 把向量用数组表示出来, 使向量的运算可以化为数的运算.

特殊点的坐标表示: 原点的坐标为 $(0, 0, 0)$. x 轴上点的坐标为 $(x, 0, 0)$, yOz 面上点的坐标为 $(0, y, z)$. 点 (x, y, z) 关于 x 轴对称点的坐标为 $(x, -y, -z)$, 关于 xOy 面对称点的坐标为 $(x, y, -z)$, 关于原点对称点的坐标为 $(-x, -y, -z)$.

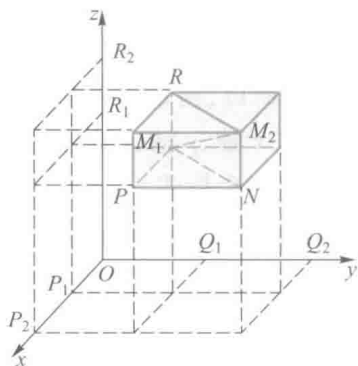


图 6.15

(1) 向量的坐标

设 $\boldsymbol{r}$ 为空间的任一向量, 把向量 $\boldsymbol{r}$ 平移, 使它的起点与原点重合, 终点为 $M(x, y, z)$, 即 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM}$, 则称 $\boldsymbol{r}$ 是点 M 关于原点的向径.

过点 M 作垂直于三个坐标轴的平面, 它们分别与 x 轴、 y 轴、 z 轴相交于 P, Q, R 点, 如图 6.16 所示. 于是有, $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$, 由向量加法有 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$, 所以, 向量 $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, 此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量分解式, $x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$ 分别称为 $\boldsymbol{r}$ 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的分向量, x, y, z 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标, 记作 $\boldsymbol{r} = \{x, y, z\}$, 此式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标式.

又设 $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为起点、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量, 如图 6.17 所示, 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} &= \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \\ &= a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

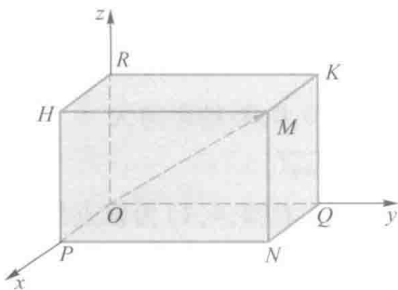


图 6.16

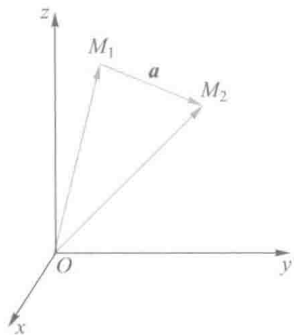


图 6.17

其中 $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标, 记作 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. 即以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为起点、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量可以表示为 $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ (用终点坐标减去起点坐标).

(2) 向量运算的坐标表示

设向量 $\boldsymbol{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\boldsymbol{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, 即 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$, 则有如下运算法则:

$$\text{加法 } \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\};$$

$$\text{减法 } \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\};$$

$$\text{数乘 } \lambda \boldsymbol{a} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}.$$

例 6.1.4 设 $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, 求向量 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n} + \boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的坐标及在 y 轴上的分向量.

解 因为 $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n} + \boldsymbol{p} = 3(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}) + 4(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}) + (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = 14\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, 所以 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的坐标为 14, 在 y 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

例 6.1.5 设有两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 和 $B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda (\lambda \neq -1)$, 在有向线段

$\overrightarrow{AB}$ 上求一点 $M(x, y, z)$, 使 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

解 如图 6.18 所示, 因为 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, 所以 $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$, 得 $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda} (\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB})$, 于是所求点为

$$M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right).$$

M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点.

(3) 向量的模与方向余弦的坐标表示

定义 6.1.3 设向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{a_x, a_y, a_z\}$ 与三个坐标轴正向的夹角分别为 α, β, γ ($0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$), 则称 α, β, γ 为非零向量 $\mathbf{a}$ 的方向角, 方向角的余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为方向余弦, 如图 6.19 所示.

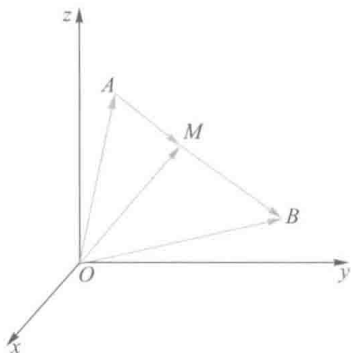


图 6.18

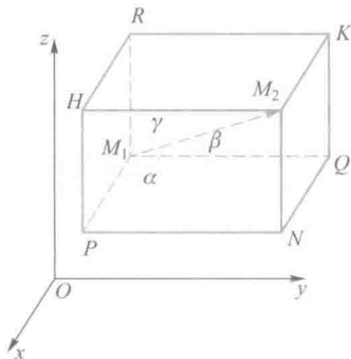


图 6.19

设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 是以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为起点、 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量, 则由空间两点间距离 $\overline{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, 得向量 $\mathbf{a}$ 的模 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. 即有方向余弦

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

例 6.1.6 已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$, $M_2(3, 0, 2)$, 求向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角及与 $\mathbf{a}$ 平行的单位向量.

解 $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{3 - 4, 0 - \sqrt{2}, 2 - 1\} = \{-1, -\sqrt{2}, 1\}$, 所以

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2,$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi, \quad \beta = \frac{3}{4}\pi, \quad \gamma = \frac{1}{3}\pi.$$

特殊地, 当 $\lambda = 1$ 时, 得线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点坐标为 $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

任意向量的方向余弦有性质: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

与非零向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^0 &= \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{a}|} \{a_x, a_y, a_z\} \\ &= \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} \end{aligned}$$

由此可知, 一个向量的方向完全由方向角 (或方向余弦) 确定.

因为 $\boldsymbol{a}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, 所以与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量为 $\pm \boldsymbol{a}^0 = \pm \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right\}$.

6.1.3 两向量的数量积、向量积

1. 两向量的数量积

在力学中我们知道, 一物体在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到点 M_2 , 如图 6.20 所示. 以 $\boldsymbol{s}$ 表示位移 $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, 则力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为 $W = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cos \theta$ (θ 为力 $\boldsymbol{F}$ 和位移 $\boldsymbol{s}$ 方向的夹角).

可知, 数量功 W 可以由两个向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 唯一确定. 在许多实际问题中, 也会有类似情况, 为此, 抽象出数量积的概念.

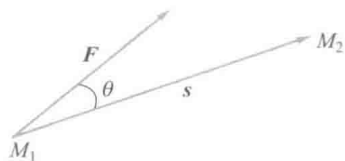


图 6.20

定义 6.1.4 设两个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), 则称 $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \theta$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 (或点积), 记作 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \theta$.

当 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ 时, 称 $|\boldsymbol{b}| \cos \theta$ 为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影, 记作 $\text{Prj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b}$, 即 $\text{Prj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cos \theta$. 同样, 可定义 $\text{Prj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos \theta$.

性质 由数量积的定义可推得

- (1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$;
- (2) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot \text{Prj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \cdot \text{Prj}_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{a}$;
- (3) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$.

证 (3) 如果 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, 则 $\cos \theta = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, 所以 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

反之, 若 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, 因为 $|\boldsymbol{a}| \neq 0, |\boldsymbol{b}| \neq 0$, 而 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \theta = 0$, 则 $\cos \theta = 0$, 有 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

数量积的运算律 由数量积的定义可推得

- (1) 交换律 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$;
- (2) 分配律 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$;
- (3) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b})$.

以上运算律读者可自己证明.

两向量的数量积及夹角余弦的坐标表示

设 $\boldsymbol{a} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}, \boldsymbol{b} = b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}$, 则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}) \cdot (b_x \boldsymbol{i} + b_y \boldsymbol{j} + b_z \boldsymbol{k}) \\ &= a_x b_x \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + a_x b_y \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} + a_x b_z \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} + \\ &\quad a_y b_x \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{i} + a_y b_y \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} + a_y b_z \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} + \\ &\quad a_z b_x \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} + a_z b_y \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{j} + a_z b_z \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1, \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0$, 所以

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

即两个向量的数量积等于其对应坐标乘积之和.

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}},$$

由此得到,两向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 垂直的充要条件为 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

例 6.1.7 用向量证明三角形的余弦定理.

证 如图 6.21 所示,在 $\triangle ABC$ 中,令 $\angle BCA = \theta$, $\overrightarrow{CB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, 可得 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

由数量积的定义和性质,得

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta.$$

例 6.1.8 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 两两垂直, 且 $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $|\mathbf{c}| = 3$, 求向量 $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ 的模及它与已知向量 $\mathbf{c}$ 之间的夹角余弦.

解 由已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 两两垂直, 得 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = 0$, 所以

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}| &= \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}} \\ &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2} = \sqrt{14}, \\ \cos \langle \mathbf{r}, \mathbf{c} \rangle &= \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{r}| |\mathbf{c}|} = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c}}{|\mathbf{r}| |\mathbf{c}|} \\ &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}}{\sqrt{14} \cdot 3} = \frac{0 + 0 + 3^2}{\sqrt{14} \cdot 3} = \frac{3}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

2. 两向量的向量积

同数量积一样,两向量的向量积也是从物理学中抽象出来的. 例如,物体转动时力所产生的力矩. 如图 6.22 所示,设 O 为杠杆 L 的支点,

力 $\mathbf{F}$ 作用于该杠杆的点 P 处,力 $\mathbf{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ , 则力 $\mathbf{F}$ 对支点 O 的力矩 $\mathbf{M}$ 是一个向量. 它的大小为

$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| |\overrightarrow{OP}| \sin \theta$, 力矩的方向垂直于 $\mathbf{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 与所

确定的平面,并且 $\overrightarrow{OP}, \mathbf{F}, \mathbf{M}$ 的正向构成右手系. 由此,抽象出向量积的概念.

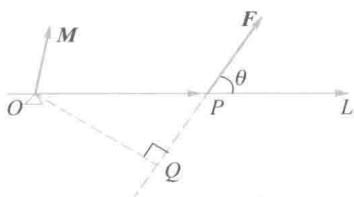


图 6.22

定义 6.1.5 设两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$, 若向量 $\mathbf{c}$ 按下列方式确定:

(1) $\mathbf{c}$ 的模 $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$;

(2) $\mathbf{c}$ 的方向与 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所在的平面垂直, 且使 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 构成右手系, 如图 6.23 所示, 则称向量 $\mathbf{c}$ 为向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的向量积(或叉积), 记作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 即 $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

由此定义, 力矩 $\mathbf{M} = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{F}$.

性质 由向量积的定义可以推得:

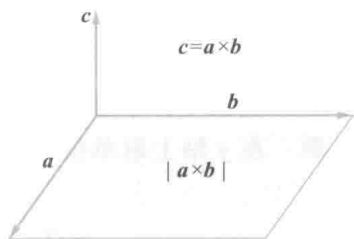


图 6.23

由向量积的定义, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的模 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 在几何上表示以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积, 即为 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$. 这也是向量积的几何意义, 如图 6.23 所示.