高数叔高等数学入门

高数叔微积分入门

孙硕　乔木◎主编

图文并茂，语言幽默，视频讲解，简单易学，

让学习成为一种时尚！

石油工业出版社

入门

高数叔微积分入门

孙硕　乔木◎主编

石油工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高数叔微积分入门 / 孙硕，乔木主编. —北京：石油工业出版社，2018.11
（高数叔高等数学入门）
ISBN 978-7-5183-2868-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①孙… ②乔 Ⅲ.①微积分 Ⅳ. ①0172

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第205357号

高数叔微积分入门
孙硕　乔木　主编

出版发行：石油工业出版社
（北京安定门外安华里2区1号 100011）
网　　址：http://www.petropub.com
编 辑 部：(010) 64523610
图书营销中心：(010) 64523731　64523633
经　　销：全国新华书店
印　　刷：北京中石油彩色印刷有限责任公司

2018年11月第1版　2018年11月第1次印刷
710×1000 毫米　开本：1/16　印张：19.25
字数：245千字

定 价：58.00 元
（如发现印装质量问题，我社图书营销中心负责调换）

按照惯例应该有个序

但高数叔不按惯例讲

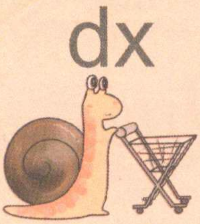
数学也可以不抽象

知识就该有普适的样

我们一起

让学习成为一种时尚

如果你准备好了



请开启

这段

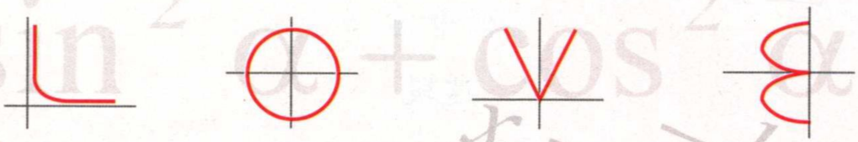
神奇之旅

我们不生产分数

我们只是知识点的解说员

本书讲解视频

$y=\frac{1}{x}$ $x^2+y^2=9$ $y=|-2x|$ $x=-3|\sin y|$



目录
Contents

131 定积分

179 多元函数微分

重积分 225

无穷级数 267

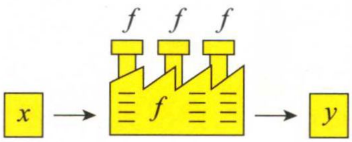
后记 297

引子
Preface

高等数学是一部残暴虐心并且励志泪奔的小说，每个人读完都会有不同的结局. 在开启这段奇妙之旅前，我们先来帮助大家回忆一些曾经学过、不曾记得、将会用到的知识.

1. 函数与反函数

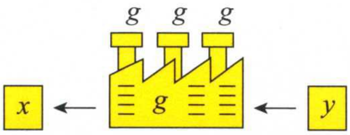
函数“$y=f(x)$，$x\in A$”是一个数值加工厂：



把一个数值“x”放进去，通过“f”这条流水线会生产出唯一确定的数值“y”.

这里x叫作自变量，其取值范围A称为定义域；y叫作因变量，其取值范围C称为值域；f表示函数加工的对应法则. 定义域、值域和对应法则是函数需要被关注的三要素！

相信很多好奇宝宝都会思考，既然函数是工厂流水线，x进去能出来个y，那把y怼回去能不能再变出个x呢？如果有另一条流水线“g”可以做到这一点：



那么这个反向操作的函数就叫作原函数的“反函数”.

反函数的数学定义：

一般地，设$y=f(x)$，$x\in A$的值域为C，若能找到一个$g(y)$，$y\in C$，在每一处$g(y)$都等于x，那么就称“$g(y)$，$y\in C$”叫作“$y=f(x)$，$x\in A$”的反函数，记作$y=f^{-1}(x)$.

举个例子：

$$y=x^3 \qquad \begin{array}{ccc} x & & y \\ 1 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 8 \end{array}$$

反解 $y=x^3$ 可得：

$$x=\sqrt[3]{y} \qquad \begin{array}{ccc} y & & x \\ 8 & \longrightarrow & 2 \\ 27 & \longrightarrow & 3 \end{array}$$

我们还是习惯用x表示自变量，用y表示因变量，所以将 $x=\sqrt[3]{y}$ 改写为 $y=\sqrt[3]{x}$，这样 $y=\sqrt[3]{x}$ 就表示 $y=x^3$的反函数.

通过上面的分析可以发现反函数的一些性质：

（1）反函数的定义域和值域为原函数的值域和定义域；

（2）反函数和原函数的图像关于$y=x$对称；

（3）函数存在反函数的充要条件是函数在定义域上单调，这点其

实也很好理解，函数最重要的一点就是有唯一确定的因变量y与自变量x相对应，如果反过来也有这种操作，那么说明y和x必须是一一对应的，而只有单调才能满足这一点；

（4）一个函数与其反函数有相同的单调性.

·特殊的反函数：

函数存在反函数必须满足：保持单调，一一对应！但有时也存在一些特殊状况，比如函数$y=x^2$，如图1所示，

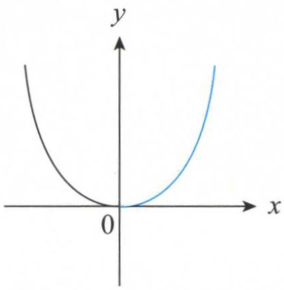


图1

很明显在$x\in R$的范围内不存在反函数，但当$x\geqslant 0$时却是满足条件的，此时$y=\sqrt{x}$为$y=x^2$的反函数；再比如三角函数$y=\sin x$，如图2所示，

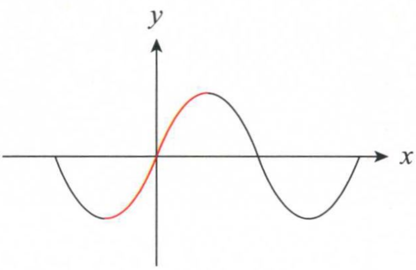
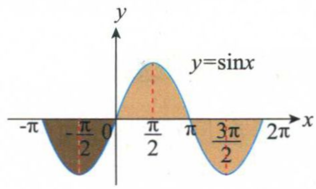
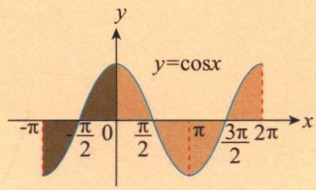
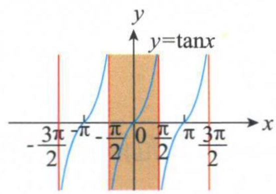
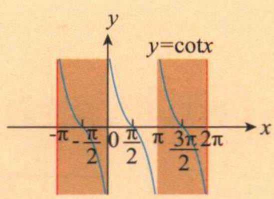
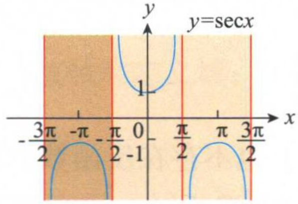


图2

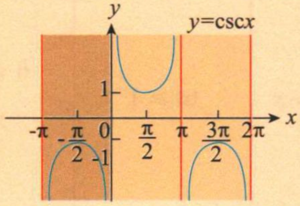
在$x\in R$上也不存在反函数，但当$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$时函数单调，此时$y=\sin x$是存在反函数的.

2. 三角函数与反三角函数公式

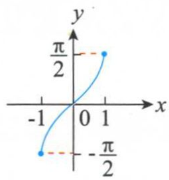
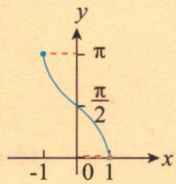
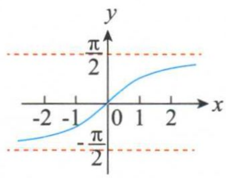
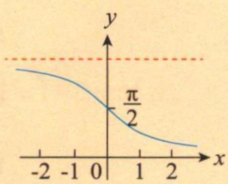
（1）三角函数公式，如下表：

函数	定义域	值域	图像
$y=\sin x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqslant y \leqslant 1$	
$y=\cos x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leqslant y \leqslant 1$	
$y=\tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$	$-\infty < y < +\infty$	
$y=\cot x$	$x \neq k\pi$	$-\infty < y < +\infty$	
$y=\sec x$	$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$	$\|y\| \geqslant 1$	

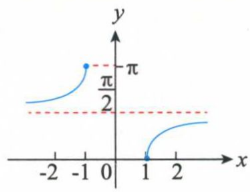
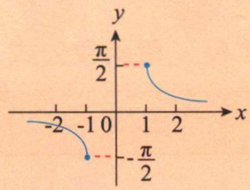
续表

函数	定义域	值域	图像
$y=\csc x$	$x \neq k\pi$	$\|y\| \geqslant 1$	

（2）反三角函数公式，如下表:

函数	定义域	值域	图像
$y=\arcsin x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$	
$y=\arccos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$	
$y=\arctan x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	
$y=\operatorname{arccot} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$	

续表

函数	定义域	值域	图像
$y=\text{arc sec }x$	$\lvert x\rvert \geqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq \frac{\pi}{2}$	
$y=\text{arc csc }x$	$\lvert x\rvert \geqslant 1$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, $y \neq 0$	

3. 三角函数相关公式

（1）三角函数六边形记忆法，如图3所示：

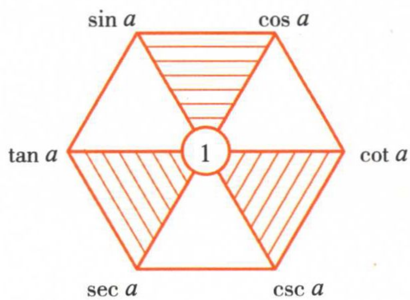


图3

对角线连接的两个三角函数乘积为1：

$$\sin a \cdot \csc a=1,$$

$$\cos a \cdot \sec a=1,$$

$$\tan a \cdot \cot a=1.$$

对于阴影部分的三角形，上面两个端点的平方和等于下面端点的平方：

$$\sin^2 a+\cos^2 a=1^2,$$

$$\tan^2 a+1^2=\sec^2 a,$$

$$1^2+\cot^2 a=\csc^2 a.$$

六边形的每个端点都等于相邻两个端点的乘积：

$$\sin a=\tan a\cdot\cos a,$$

$$\cos a=\sin a\cdot\cot a,$$

$$\cot a=\cos a\cdot\csc a,$$

$$\csc a=\cot a\cdot\sec a,$$

$$\sec a=\csc a\cdot\tan a,$$

$$\tan a=\sec a\cdot\sin a.$$

（2）两角和与差公式：

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,$$

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b,$$

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b,$$

$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b.$$

（3）二倍角公式：

$$\sin 2a=2\sin a\cos a,$$

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a,$$

$$\tan 2a=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.$$

（4）和差化积公式：

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2},$$
$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2},$$
$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2},$$
$$\cos a-\cos b=2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\sin\frac{a-b}{2}.$$

（5）积化和差公式：

$$\sin a\cdot\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)],$$
$$\cos a\cdot\sin b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)],$$
$$\cos a\cdot\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)],$$
$$\sin a\cdot\sin b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)].$$

4. 二项式定理

对任意的正整数n，

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n.$$

5. 整数幂的差

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),\quad n>0.$$