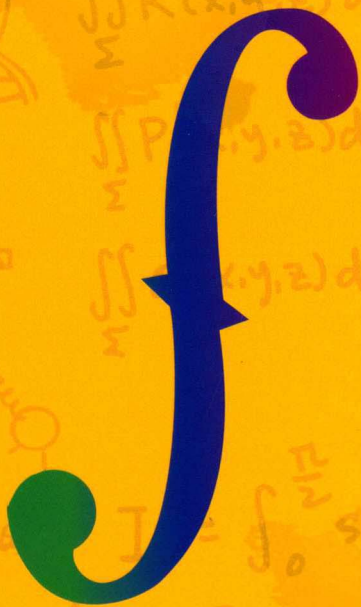


高数叔高等数学入门

高数叔微积分入门

孙硕 乔木◎主编



图文并茂，语言幽默，视频讲解，简单易学，
让学习成为一种时尚！

石油工业出版社

入门

高数叔微积分入门

孙硕 乔木◎主编

石油工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高数叔微积分入门 / 孙硕, 乔木主编. —北京:
石油工业出版社, 2018.11
(高数叔高等数学入门)
ISBN 978-7-5183-2868-0

I. ①高… II. ①孙… ②乔 III. ①微积分 IV.
①0172

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第205357号

 **高数叔微积分入门**
孙硕 乔木 主编

出版发行: 石油工业出版社

(北京安定门外安华里2区1号 100011)

网 址: <http://www.petropub.com>

编辑部: (010) 64523610

图书营销中心: (010) 64523731 64523633

经 销: 全国新华书店

印 刷: 北京中石油彩色印刷有限责任公司

2018年11月第1版 2018年11月第1次印刷

710×1000毫米 开本: 1/16 印张: 19.25

字数: 245千字

定 价: 58.00 元

(如发现印装质量问题, 我社图书营销中心负责调换)

版权所有, 翻印必究

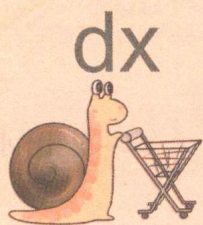
按照惯例应该有个序
但高数叔不按惯例讲
数学也可以不抽象
知识就该有普适的样



我们一起

让学习成为一种时尚

如果你准备好了



请开启

这段

神奇之旅

我们不生产分数

我们只是知识点的解说员



lim



本书讲解视频

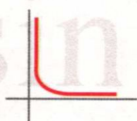
$$\alpha = 1$$

$$\sin \alpha$$

$$\cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

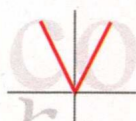
$$y = \frac{1}{x}$$



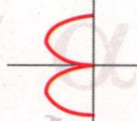
$$x^2 + y^2 = 9$$



$$y = |-2x|$$



$$x = -3|\sin y|$$



$$\sin \alpha$$

$$\cos \alpha$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$



001 引子

011 极限

- 013 第一回 数列的极限
- 017 第二回 函数的极限
- 022 第三回 无穷大与无穷小
- 026 第四回 极限的计算
- 029 第五回 两个重要极限
- 033 第六回 无穷小的比较
- 038 第七回 函数的连续性
- 041 第八回 函数的间断点
- 047 第九回 零点定理、介值定理

049 导数与微分

- 051 第十回 导数的定义



第十一回	导数的计算	056
第十二回	隐函数与参数方程求导	060
第十三回	微分	064

微分中值定理与导数应用

069

第十四回	微分中值定理——罗尔定理	071
第十五回	洛必达法则	075
第十六回	泰勒公式	079
第十七回	微分学的应用	086

不定积分

091

第十八回	不定积分的定义	093
第十九回	不定积分“凑微分”秘籍	098
第二十回	不定积分第二类换元法	106
第二十一回	不定积分分部积分法	112
第二十二回	不定积分之有理分式积分	117
第二十三回	不定积分之无理分式与三角有理式	123

131 定积分

- 133 第二十四回 定积分的定义
- 139 第二十五回 积分上限的函数
- 144 第二十六回 定积分的计算
- 148 第二十七回 定积分的换元法
- 152 第二十八回 定积分的分部积分法
- 157 第二十九回 定积分的计算综合练习
- 163 第三十回 反常积分
- 167 第三十一回 定积分的几何应用

179 多元函数微分

- 181 第三十二回 二元函数的极限和连续性
- 185 第三十三回 偏导数
- 188 第三十四回 全微分
- 191 第三十五回 复合函数链式求导
- 198 第三十六回 多元隐函数求导
- 202 第三十七回 方向导数和梯度
- 210 第三十八回 多元函数微分学的几何应用
- 216 第三十九回 多元函数求极值

重积分

225

- | | | |
|-------|--------------|-----|
| 第四十回 | 二重积分计算（直角坐标） | 227 |
| 第四十一回 | 二重积分计算（极坐标） | 237 |
| 第四十二回 | 三重积分计算（直角坐标） | 246 |
| 第四十三回 | 三重积分计算（柱面坐标） | 254 |
| 第四十四回 | 三重积分不会画图怎么办 | 260 |

无穷级数

267

- | | | |
|-------|----------|-----|
| 第四十五回 | 正项级数 | 269 |
| 第四十六回 | 交错级数 | 277 |
| 第四十七回 | 幂级数的敛散性 | 280 |
| 第四十八回 | 幂级数求和 | 285 |
| 第四十九回 | 函数展开成幂级数 | 290 |

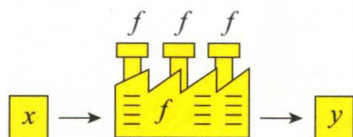
后记

297

高等数学是一部残暴虐心并且励志泪奔的小说，每个人读完都会有不同的结局。在开启这段奇妙之旅前，我们先来帮助大家回忆一些曾经学过、不曾记得、将会用到的知识。

1. 函数与反函数

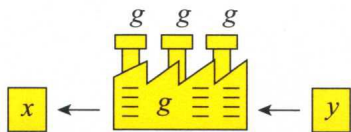
函数“ $y=f(x)$, $x \in A$ ”是一个数值加工厂：



把一个数值“ x ”放进去，通过“ f ”这条流水线会生产出唯一确定的数值“ y ”。

这里 x 叫作自变量，其取值范围 A 称为定义域； y 叫作因变量，其取值范围 C 称为值域； f 表示函数加工的对应法则。定义域、值域和对应法则是函数需要被关注的三要素！

相信很多好奇宝宝都会思考，既然函数是工厂流水线， x 进去能出来个 y ，那把 y 怼回去能不能再变出个 x 呢？如果有另一条流水线“ g ”可以做到这一点：



那么这个反向操作的函数就叫作原函数的“反函数”。

反函数的数学定义：

一般地，设 $y=f(x)$ ， $x \in A$ 的值域为 C ，若能找到一个 $g(y)$ ， $y \in C$ ，在每一处 $g(y)$ 都等于 x ，那么就称“ $g(y)$ ， $y \in C$ ”叫作“ $y=f(x)$ ， $x \in A$ ”的反函数，记作 $y=f^{-1}(x)$ 。



举个例子：

$$y=x^3$$

x		y
1	→	1
2	→	8

反解 $y=x^3$ 可得：

$$x=\sqrt[3]{y}$$

y		x
8	→	2
27	→	3

我们还是习惯用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，所以将 $x=\sqrt[3]{y}$ 改写为 $y=\sqrt[3]{x}$ ，这样 $y=\sqrt[3]{x}$ 就表示 $y=x^3$ 的反函数。

通过上面的分析可以发现反函数的一些性质：

- (1) 反函数的定义域和值域为原函数的值域和定义域；
- (2) 反函数和原函数的图像关于 $y=x$ 对称；
- (3) 函数存在反函数的充要条件是函数在定义域上单调，这点其

实也很好理解，函数最重要的一点就是有唯一确定的因变量 y 与自变量 x 相对应，如果反过来也有这种操作，那么说明 y 和 x 必须是一一对应的，而只有单调才能满足这一点；

(4) 一个函数与其反函数有相同的单调性.

· 特殊的反函数：

函数存在反函数必须满足：保持单调，一一对应！但有时也存在一些特殊状况，比如函数 $y=x^2$ ，如图1所示，

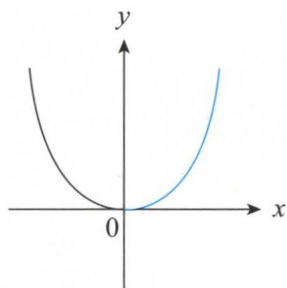


图 1

很明显在 $x \in \mathbb{R}$ 的范围内不存在反函数，但当 $x \geq 0$ 时却是满足条件的，此时 $y = \sqrt{x}$ 为 $y = x^2$ 的反函数；再比如三角函数 $y = \sin x$ ，如图2所示，

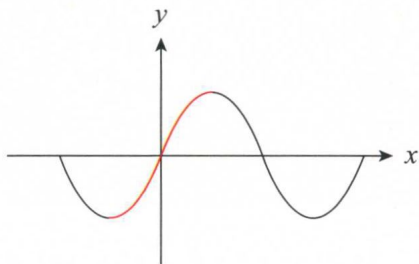


图 2

在 $x \in \mathbb{R}$ 上也不存在反函数，但当 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 时函数单调，此时 $y = \sin x$ 是存在反函数的.

2. 三角函数与反三角函数公式

(1) 三角函数公式，如下表：

函数	定义域	值域	图像
$y = \sin x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leq y \leq 1$	
$y = \cos x$	$-\infty < x < +\infty$	$-1 \leq y \leq 1$	
$y = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$-\infty < y < +\infty$	
$y = \cot x$	$x \neq k\pi$	$-\infty < y < +\infty$	
$y = \sec x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$ y \geq 1$	

续表

函数	定义域	值域	图像
$y = \csc x$	$x \neq k\pi$	$ y \geq 1$	

(2) 反三角函数公式, 如下表:

函数	定义域	值域	图像
$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$	
$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$	
$y = \arctan x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	
$y = \text{arccot } x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$	

续表

函数	定义域	值域	图像
$y = \arcsin x$	$ x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $y \neq \frac{\pi}{2}$	
$y = \arccos x$	$ x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$ $y \neq \frac{\pi}{2}$	
$y = \arcsin x$	$ x \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $y \neq 0$	
$y = \arccos x$	$ x \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $y \neq 0$	

3. 三角函数相关公式

(1) 三角函数六边形记忆法，如图3所示：

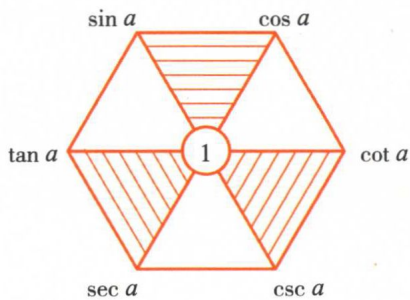


图 3

对角线连接的两个三角函数乘积为1：

$$\sin a \cdot \csc a = 1,$$

$$\cos a \cdot \sec a = 1,$$

$$\tan a \cdot \cot a = 1.$$

对于阴影部分的三角形，上面两个端点的平方和等于下面端点的平方：

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1^2,$$

$$\tan^2 a + 1^2 = \sec^2 a,$$

$$1^2 + \cot^2 a = \csc^2 a.$$

六边形的每个端点都等于相邻两个端点的乘积：

$$\sin a = \tan a \cdot \cos a,$$

$$\cos a = \sin a \cdot \cot a,$$

$$\cot a = \cos a \cdot \csc a,$$

$$\csc a = \cot a \cdot \sec a,$$

$$\sec a = \csc a \cdot \tan a,$$

$$\tan a = \sec a \cdot \sin a.$$

(2) 两角和与差公式：

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

(3) 二倍角公式：

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

(4) 和差化积公式:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2},$$

$$\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}.$$

(5) 积化和差公式:

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)],$$

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)],$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)],$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)].$$

4. 二项式定理

对任意的正整数 n ,

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

5. 整数幂的差

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}), \quad n > 0.$$