考研必备

2020年 李正元·范培华

考研数学

数学复习全书

数学三

主编 北京大学 范培华
北京大学 尤承业
北京大学 李正元

20年经典传承 百万考生推荐

辅导名师丁勇、章飞必考点视频讲解

购买正版图书享（价值599元）视频课程

双色印刷 重点突出

数学复习指导

赠送《全书习题全解》

中国政法大学出版社

李正元·范培华考研数学

数学复习全书

数学三

主编 北 京 大 学 范培华
北 京 大 学 尤承业
北 京 大 学 李正元

中国政法大学出版社
2019·北京

图书在版编目（CIP）数据

2020年李正元·范培华考研数学数学复习全书. 数学三/李正元，尤承业，范培华主编. —北京：中国政法大学出版社，2019. 1

ISBN 978-7-5620-8793-9

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①李… ②尤… ③范… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第013097号

出版者　中国政法大学出版社

地　址　北京市海淀区西土城路25号

邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088

网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）

电　话　010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)

承　印　三河市燕山印刷有限公司

开　本　787mm×1092mm　1/16

印　张　44.25

字　数　1020千字

版　次　2019年1月第1版

印　次　2019年1月第1次印刷

定　价　96.80元

数学学习方法与指导

（代前言）

本书自1998年出版以来，经过数次修订，凭借编写体例上的“有特色“，内容讲解、试题分析与解答上的详尽、透彻、易懂，获得了百万考生的青睐和喜爱，也得到专家同行的一致好评。2020版《考研数学复习全书》将在内容、形式方面做进一步的优化和调整，以期更高的质量和崭新的面貌呈现在广大考生面前。

一　内容上

在保持原有体例的基础上，根据不同学科的特点，进行了针对性的改进。

科目	分值	百分比
高等数学	84	56%
线性代数	33	22%
概率论与数理统计	33	22%

高等数学部分：高等数学知识体系庞大，内容分布广、散。为了考生能够抓住复习重点，我们在“考核知识要点讲解”栏目更加突出重难点的设置及讲解。

线性代数部分：本学科的特点是概念多，理论晦涩，考生在复习过程中的难点就是对很多概念理解不清。针对这一点，我们在概念的复习上做了精心的设计，帮助考生快速掌握各个概念及概念间的联系，形成一个概念链。

概率论与数理统计部分：本学科在考研真题中所占比重较小，往往被考生忽略，这部分的复习策略在于多做基础的典型的常考题型，就可以顺利拿到分数，所以我们针对考生的复习弱点，有针对性的对重点概念、公式和常考题型进行多角度讲解，以提高考生运用概念、公式以及综合分析问题的能力。

二　形式上

由于图书的篇幅有限，编者不可能面面俱到，所以有些题目和知识点，考生在看书过程无法做到完全的理解和领会。我们特意增加了“编者答疑”服务，另外还有“免费课程”等。在印刷上我们采用了“双色印刷”。

编者答疑——名师亲自全程答疑，考生可将问题以图片形式发至微信“考研数学章飞答疑”，获取名师点拨。

免费课程——关注“李正元·范培华考研数学”二维码，即可享受考研名师针对本图书的视频详解课程。

最后，为了便于考生用好复习参考书，下面就李正元·范培华考研系列图书的使用给出一个参考性的安排：

■第 1 阶段（现在至 6 月）

认真复习《数学复习全书》的每个章节，全面整理基本概念、公式及其定理，同时对书中的基础题目进行研习、总结。本书在编写时十分注重题型的划分，因此在复习过程中要对知识点框架及解题思路进行划分归纳。

■第 2 阶段（7 月至 8 月）

使用《历年试题解析》刷真题，《历年试题解析》的答案解析十分详细，对每个题目都有考点分析和易错点提醒。考生通过做真题，把握真题的命题方向和重点，做到有的放矢。

■第 3 阶段（9 月至 10 月）

查漏补缺。对于《数学复习全书》和《历年试题解析》中做错的题目，找出错误原因，确定本身存在问题的地方，是计算错误、概念问题，还是解题方法思路问题，有针对性的改善提高。

结合历年试题的每个章节对应《数学复习全书》的每个章节复习，将书中概念、公式和解题思路都圈出来，牢固掌握考查内容和解题方法。

■第 4 阶段（10 月至 11 月）

使用《数学预测试卷》（原经典 400 题）进行模拟演练。做题时间完全按照研究生招生考试的要求来安排，需要注意的是模拟题的难度一般高于真题难度，解题更讲究思路技巧，考生在模拟练习时不要纠结于得分，要找到自己的不足，对照《数学复习全书》填补不足。严格按照考试时间做题，反复做预测试卷 3 遍。

■第 5 阶段（12 月至考前）：

使用《数学最后冲刺超越 135 分》进行全真考试状态模拟，使自己提前进入考试状态。这个阶段需要注意的是对照《数学复习全书》中的概念、定理和公式进行勾画标记复习。

结合自己情况按照老师的指导方法学习，考研数学一定会取得好成绩。

编　者
于北京

目　　录

第一篇　微积分

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第一篇　微积分

第一章　函数、极限、连续

知识结构网络图

- 函数，极限，连续
  - 函数
    - 函数概念
    - 几类常见的函数(单调函数、奇偶函数、周期函数、有界函数)
    - 复合函数与反函数
    - 常见的函数形式(初等函数、分段函数、隐函数，由变限积分确定的函数、由级数确定的函数)
  - 极限
    - 定义与性质，判别极限存在与不存在的方法
    - 求极限的方法
      - 函数极限
        - 直接用运算法则(四则运算，幂指数运算，代入法)
        - 未定式
          - “$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型(恒等变形相消后代入，洛必达法则，变量替换与重要极限，泰勒公式，等价无穷小因子替换)
          - 其他未定式(转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型)
        - 分别求左、右极限
      - 数列极限
        - n 项和的数列(恒等变形，夹逼法，化为定积分，级数求和)
        - 递归数列($x_{n+1}=f(x_n)$)
        - 一般情形(转化为函数极限，恒等变形，夹逼法)
  - 无穷小
    - 概念与性质(高阶、低阶、同阶、等价、阶数)
    - 无穷小阶的比较与确定无穷小的阶的方法(洛必达法则，阶的运算性质，泰勒公式)
  - 连续性
    - 连续与间断的定义
    - 判断连续性与间断点类型的方法(初等函数连续性，连续函数运算性质，按定义)
    - 连续函数的性质

内容概要与重难点提示

(一)微积分中研究的对象是函数　函数概念的实质是变量之间确定的对应关系. 变量之间是否有函数关系，就看是否存在一种对应规则，使得按照这个对应规则，当其中一个变量或几个变量(称为自变量)的取值确定后，余下的另一个变量(称为因变量)的取值也就被唯一确定. 只有一个自变量的函数称为一元函数，不止一个自变量的函数称为多元函数.

函数这部分的重点是:复合函数、反函数、分段函数、函数记号的运算、基本初等函数与其图象以及初等函数的概念等.

(二)极限是微积分的理论基础 微积分中的重要概念,如连续、导数、定积分、级数等都是用不同类型的极限来定义的,由此可见极限的重要性.本章的重点内容是极限.既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件,又要能准确地求出各种极限.求极限的方法很多,综合起来主要有:

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则; ② 利用函数的连续性;

③ 利用洛必达法则; ④ 分别求左、右极限;

⑤ 利用变量替换与两个重要极限; ⑥ 数列极限转化为函数极限;

⑦ 利用夹逼定理; ⑧ 利用导数的定义求极限;

⑨ 利用泰勒公式.

(三)无穷小量就是极限为零的变量 极限问题可归结为无穷小量问题.要理解无穷小量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会确定无穷小量的阶数,并会用重要的等价无穷小替换求极限.

(四)我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数 由于函数的连续性是通过极限定义的,所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限.要掌握判断函数连续性(特别是分段函数在分界点处的连续性)以及求间断点的方法,还要会判别函数间断点的类型.

(五)有界闭区间上连续函数的基本性质 函数的许多重要性质都与函数的连续性有关.因此,我们要了解有界闭区间上连续函数的重要性质,包括:有界性定理,最大值、最小值定理和介值(中间值)定理,并掌握这些定理的简单应用.

考核知识要点讲解

一、极限的概念与性质

(一)极限的定义

【定义 1.1】(数列的极限) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow$ 对于任给的常数 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N,使得当 $n > N$ 时就有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

若数列 $\{x_n\}$ 存在极限(有限数),又称数列 $\{x_n\}$ **收敛**,否则称数列 $\{x_n\}$ **发散**.

【定义 1.2】(函数的极限) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任给的常数 $\varepsilon > 0$,存在正数 X,使得当 $|x| > X$ 时就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义单侧极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

【注】 在函数极限情形下 $x\to\infty$ 与数列极限中 $n\to\infty$ 的意义不同,前者是指 $x\to\pm\infty$,而后者是指 $n\to+\infty$.

【定义 1.3】(函数的极限) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对于任给的常数 $\varepsilon > 0$,存在正数 δ,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限 $f(x_0 - 0)$ 与右极限 $f(x_0 + 0)$:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A, \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A.$$

（二）极限的基本性质

▶1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】(极限的不等式性质)　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

(1) 若 $a > b$，则存在 N，当 $n > N$ 时有 $x_n > y_n$；　(2) 若 $n > N$ 时 $x_n \geqslant y_n$，则 $a \geqslant b$.

【定理 1.2】(收敛数列的有界性)　设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 有界（即存在常数 $M > 0$，使 $|x_n| \leqslant M, n = 1,2,\cdots$）.

▶2. 函数极限的基本性质

【定理 1.3】(极限的不等式性质)　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$.

若 $A > B$，则存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$；

若存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant g(x)$，则 $A \geqslant B$.

【推论】(极限的保号性)　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

(1) 若 $A > 0$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > 0$；

(2) 若存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant 0$，则 $A \geqslant 0$.

【注】　若(2)中的条件“$f(x) \geqslant 0$”改为“$f(x) > 0$”，其他条件保持不变，则结论仍是“$A \geqslant 0$”.

【定理 1.4】(存在极限的函数局部有界性)　设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $U_0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 内有界，即存在 $\delta > 0$ 与 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

【注】　其他的极限过程如 $x \to x_0^+$，$x \to x_0^-$，$x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 等也有类似的结论.

（三）两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} \tag{1.1}$$

【例 1.1】　判断下列结论是否正确，并证明你的判断.

(Ⅰ) 设当 $n > N$ 时 $x_n < y_n$，已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ 均存在，则 $A < B$；

(Ⅱ) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 有定义，又存在 $c \in (a,b)$ 使得极限 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 有界；

(Ⅲ) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

【解】　(Ⅰ) 不正确. 令 $a_n = x_n - y_n$，则有 $a_n < 0\,(n > N)$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = A - B \leqslant 0$，即在题设下只能保证 $A \leqslant B$，不能保证 $A < B$. 例如，$x_n = \dfrac{1}{n}$，$y_n = \dfrac{2}{n}$，则 $x_n < y_n$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

> **评注**　若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在，则对不等式 $x_n < y_n\,(n > N)$ 两边当 $n \to \infty$ 时取极限，除保持不等号外还应加上等号，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(Ⅱ) 不正确. 这时只能保证：存在点 c 的一个空心邻域 $U_0(c,\delta) = \{x \mid 0 < |x - c| < \delta\}$，使 $f(x)$ 在 $U_0(c,\delta)$ 中有界，一般不能保证 $f(x)$ 在 (a,b) 有界. 例如：$f(x) = \dfrac{1}{x}$，$(a,b) = (0,1)$，取定 $c \in (0,$

1),则 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\dfrac{1}{c}$,但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在(0,1)无界.

(Ⅲ)正确. 因为 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$,由存在极限的函数的局部有界性即知:存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

二、极限存在性的判别(极限存在的两个准则)

(一)夹逼定理

【定理 1.5】(数列情形) 若存在 N,使得当 $n>N$ 时有 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

【定理 1.6】(函数情形) 若存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,又 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

【注】 其他的极限过程也有类似的结论.

(二)单调有界数列必收敛定理

【定理 1.7】 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界,即 $x_{n+1}\geqslant x_n(n=1,2,\cdots)$,并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n\leqslant M$,则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,且有 $x_n\leqslant a\ (n=1,2,\cdots)$.

若数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界,即 $x_{n+1}\leqslant x_n(n=1,2,\cdots)$,并存在一个数 m 使得对一切的 n 有 $x_n\geqslant m$,则 $\{x_n\}$ 收敛. 即存在一个数 a,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,且有 $x_n\geqslant a\ (n=1,2,\cdots)$.

(三)极限存在的充要条件

【定理 1.8】(函数极限存在的充要条件) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

对于分段函数 $f(x)=\begin{cases} g(x), & x_0-\delta<x<x_0, \\ h(x), & x_0<x<x_0+\delta, \end{cases}$ 考察 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在就需要分别求 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} h(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$,并确定二者是否相等.

【定理 1.9】(数列极限存在的充要条件) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}=A$.

【例 1.2】 设 $f(x)=\begin{cases} 2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 1, & x=0, \\ \dfrac{\ln(1+ax^2)}{x\sin x}, & x<0, \end{cases}$ 又 $a\neq 0$,问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在.

【分析】 分别求右、左极限 $f(0+0)$ 与 $f(0-0)$,由 $f(0+0)=f(0-0)$ 定出 a 值.

【解】 $f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2(x+1)\arctan\dfrac{1}{x}=2\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\pi$,

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{\ln(1+ax^2)}{ax^2}\cdot\frac{ax^2}{x\sin x}\right]=1\cdot a\cdot 1=a(a\neq 0),$$

由 $f(0+0)=f(0-0)$，得 $a=\pi$. 因此，当且仅当 $a=\pi$ 时，存在 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\pi$.

评注 注意在本题中当 $a=\pi$ 时极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\pi$，即当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限存在，但此极限值与函数值 $f(0)=1$ 并不相等，其原因在于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 描述的是当 $x\to 0$ 但 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势，它与函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的函数值 $f(0)$ 是多少没有关系.

【例 1.3】 设 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$

(A) 0. (B) $+\infty$. (C) $-\infty$. (D) 不存在，但也不是 ∞.

【分析】 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$，故应分左右极限来讨论. 由于

$$\lim_{x\to 0^+}xe^{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}xe^{\frac{1}{x}}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t}=0,$$

因此应选(D).

评注 当 $x\to\infty$ 时，对含有 $a^x(a>0,a\neq 1)$ 或 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot}x$ 的函数极限，一定要对 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 分别求极限，若两者相等，则 $x\to\infty$ 时极限存在，否则不存在.

三、求极限的方法

(一) 利用极限的四则运算法则与幂指数运算法则求极限

▶1. 极限的四则运算法则及其推广

【定理 1.10】(四则运算法则) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$，则

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B,\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B,\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

四则运算法则的推广：

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$，且当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=0$.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty(+\infty,-\infty)$，且当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $g(x)$ 有界或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty\ (+\infty,-\infty)$.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty(+\infty)$，且当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $|g(x)|\geqslant A>0(g(x)\geqslant A>0)$，或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0\ (A>0)$，或 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty(+\infty)$，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=\infty\ (+\infty)$.

(4) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，又当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $f(x)g(x)>0$，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$.

【注】 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在也不为 ∞，则 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]$ 不存在也不为 ∞；若又有 $A\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 均不存在也不为 ∞. 但是，当 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 都不存在且不为 ∞ 时，求 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 的极限则必须作具体分析.

▶2. **幂指数函数的极限运算法则及其推广**

【定理 1.11】(幂指数运算法则) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=A^B(A>0)$.

幂指数运算法则的推广:

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A(A>0,且A\neq 1)$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & 0<A<1,\\ +\infty, & A>1.\end{cases}$

(2) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$,$f(x)>0(0<|x-a|<\delta)$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=B\neq 0$,则

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}0, & B>0,\\ +\infty, & B<0.\end{cases}$$

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$,$\lim\limits_{x\to a}g(x)=A\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}+\infty, & A>0,\\ 0, & A<0.\end{cases}$

▶3. **对$\dfrac{0}{0}$,$\dfrac{\infty}{\infty}$,$0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,0^0,1^∞,∞^0等各类未定式不能直接用上述运算法则.**

最基本的是$\dfrac{0}{0}$与$\dfrac{\infty}{\infty}$型,其他类型应经恒等变形转化为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型未定式.

求$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型极限的方法有多种(参看题型一),其中一种重要技巧是设法消去分子、分母中的极限为零或∞因子,于是转化为可以直接用四则运算法则的情形(后面还要介绍其他方法,如洛必达法则).

【例 1.4】 设常数$x>0$,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n^2+n)(x^{\frac{1}{n-1}}-x^{\frac{1}{n}})\right]$.

【解】
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)(x^{\frac{1}{n-1}}-x^{\frac{1}{n}})\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)\cdot x^{\frac{1}{n}}(x^{\frac{1}{n(n-1)}}-1)\right]\\&=(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n}})\cdot\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)(e^{\frac{\ln x}{n(n-1)}}-1)\right]\\&=1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)\ln x}{n(n-1)}=\ln x.\end{aligned}$$

评注 ① 本题用到了当$n\to\infty$时的等价无穷小替换$e^{\frac{\ln x}{n(n-1)}}-1\sim\dfrac{\ln x}{n(n-1)}$.

② 下列做法是错误的:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)(x^{\frac{1}{n-1}}-x^{\frac{1}{n}})\right]&=\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)(e^{\frac{\ln x}{n-1}}-1-e^{\frac{\ln x}{n}}+1)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)(e^{\frac{\ln x}{n-1}}-1)\right]-\lim_{n\to\infty}\left[(n^2+n)(e^{\frac{\ln x}{n}}-1)\right]\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)\ln x}{n-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)\ln x}{n}\\&=\ln x\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n(n-1)}=\ln x.\end{aligned}$$

错误的原因在于上述第二个等号后的两个极限均不存在,不能运用极限的加法或减法运算法则.

③ 运用极限的四则运算法则时必须满足其前提条件,在对两个函数的乘积求极限时,应视具体情况用极限的四则运算法则分别求极限,但需要注意对$\infty\cdot 0$型未定式不能用.

【例 1.5】 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)$都存在,且$\lim\limits_{x\to+\infty}3xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[4f(x)+6]$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=$ ________.

【分析】 由题设可知$\lim\limits_{x\to+\infty}3xf(x)$存在

于是 $$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}3xf(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}xf(x)=\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}[4f(x)+6]=\frac{6}{3}=2,$$

（二）利用函数的连续性求极限

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续，按定义就有 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. 因此对连续函数求极限就是用代入法求函数值.

2. 一切初等函数在它的定义域上连续. 因此，若 $f(x)$ 是初等函数，且 a 属于它的定义域，则

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

3. 设 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，若补充定义 $g(a)=A$，则 $g(x)$ 在 $x=a$ 连续. 若又有 $y=f(u)$ 在 $u=A$ 连续，则由复合函数的连续性得

$$\lim_{x\to a}f[g(x)]=f[\lim_{x\to a}g(x)]=f(A).$$

【注】 可用此结论证明幂指数函数的极限运算法则.

（三）利用变量替换法和两个重要极限求极限

通过变量替换，把求某个极限转化为求另一个极限，若后者能算得出来，问题就解决了.

1. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$ 且 $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to+\infty}f[\varphi(x)]\xlongequal{u=\varphi(x)}\lim_{u\to+\infty}f(u)=A.$$

（若把 $x\to+\infty$ 改为 $x\to-\infty$ 或 $x\to x_0$ 上述结论仍成立.）

2. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$ 且 $f(u)$ 在 u_0 连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]\xlongequal[\substack{x\to x_0\text{ 时}\\ u\to u_0}]{u=\varphi(x)}\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0).$$

重要极限与变量替换法相结合可求下列极限：

（1）诸如：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\quad \lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to x_0}\frac{\ln[1+\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1,$$

$$\lim_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}}=\lim_{x\to x_0}\left([1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)^{\psi(x)}=\mathrm{e}^A,$$

其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$.

（2）设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则求 1^∞ 型极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{g(x)[f(x)-1]}=\mathrm{e}^A,$$

转化为求 $0\cdot\infty$ 型极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)[f(x)-1]=A$.

【注】 上述极限过程 $x\to x_0$ 改为其他情形也有类似结论.

【例 1.6】 求下列极限：

（Ⅰ） $w = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^{x}$；（Ⅱ） $w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3-e^{x}}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

【解】 本题中两个极限都是 1^{∞} 型未定式，可用如下方法求解．

$$\lim f(x)^{g(x)} = e^{A}，其中 A = \lim g(x)[f(x)-1].$$

（Ⅰ）$w = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{A}$，而

$$A = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right) \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \lim_{t\to 0^{+}}\frac{\sin t+\cos t-1}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^{+}}\frac{\sin t}{t} - \lim_{t\to 0^{+}}\frac{1-\cos t}{t} = 1 - \frac{1}{2}\lim_{t\to 0^{+}}\frac{t^{2}}{t} = 1,$$

故 $w = e$.

（Ⅱ）$w = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3-e^{x}}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{A}$，而

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3-e^{x}}{2+x}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x}-x}{(2+x)\sin x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x}-x}{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x+e^{x}-1}{x}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}\right) = -\frac{1}{2}(1+1) = -1,$$

故 $w = e^{-1}$.

（四）利用等价无穷小因子替换求极限

利用等价无穷小因子替换求极限可大大减少计算量．但在利用等价无穷小因子替换求极限时应注意下面两点：

（1）只在极限的乘除运算中使用等价无穷小因子替换，不能随意在极限的加减运算中使用．这是因为：由等价无穷小的性质 1 知道，作等价无穷小因子替换时，必须将分子和分母的整体分别换成它们各自的等价无穷小（由于 $\alpha \sim \alpha, \beta \sim \beta$，故保持分子或分母不变也是可以的）．但如果对分子（或分母）中的某个加项作替换，则不能保证替换后的新的分子（或分母）与原来的分子（或分母）是等价无穷小．

（2）除要熟练应用后面第四节中所列常见的等价无穷小因子替换外，还要会运用等价无穷小量的传递性质以及无穷小量阶的运算性质，并结合洛必达法则、变量替换（即换元法）等以简化计算过程．

【例 1.7】 求下列极限：

（Ⅰ） $w = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^{4}}-1}{1-\cos(x\sqrt{1-\cos x})}$ ； （Ⅱ） $w = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1}{\ln(1+2x^{3})}$.

【解】 （Ⅰ）注意 $x \to 0$ 时，$1-\cos(x\sqrt{1-\cos x}) \sim \frac{1}{2}x^{2}(1-\cos x) \sim \frac{1}{4}x^{4}, e^{x^{4}}-1 \sim x^{4} \Rightarrow$

$$w = \lim_{x\to 0}\frac{x^{4}}{\frac{1}{4}x^{4}} = 4.$$

（Ⅱ）因为$\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{2x}-1 = e^{2x\ln\frac{1+\cos x}{2}}-1 \sim 2x\ln\frac{1+\cos x}{2} = 2x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{2}\right) \sim 2x\cdot\frac{\cos x-1}{2} \sim$

$x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{2}\right) = -\frac{1}{2}x^{3}\ (x\to 0), \ln(1+2x^{3}) \sim 2x^{3}\ (x\to 0)$，所以