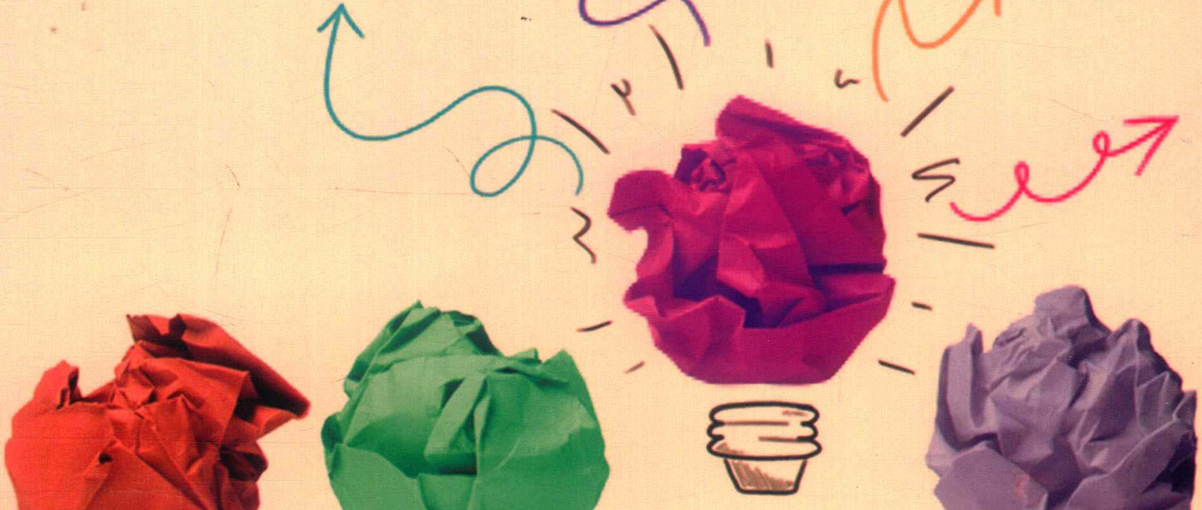
大学生（本科 非数学类）

数学竞赛辅导

线性代数精题精讲精练

陈启浩 编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

大学生〔本科 非数学类〕数学竞赛辅导

线性代数
精题精讲精练

陈启浩　编著

机械工业出版社

本书是本科大学生数学竞赛辅导书，可供自学使用，也可用于竞赛培训.

书中通过典型例题的精解来梳理重点方法，同时穿插介绍一些有普遍性的解题技巧，题解后的总结和讨论使方法更系统和实用. 本书的例题精选自国内外各种数学竞赛，其中既有基本概念和基本方法运用的例题，也有综合性和技巧性较强的例题. 在例题之后还精选了一些练习题并在练习题之后附上解题过程和答案.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数精题精讲精练/陈启浩编著. —北京：机械工业出版社，2016. 5

大学生（本科　非数学类）数学竞赛辅导

ISBN 978-7-111-53218-7

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①陈…　Ⅲ. ①线性代数一高等学校教学参考资料　Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 051668 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　　责任编辑：韩效杰　陈崇昱
版式设计：霍永明　　责任校对：闫玥红
封面设计：路恩中　　责任印制：孙　炜
天津翔远印刷有限公司印刷
2019 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 19. 25 印张 · 471 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-53218-7
定价：49. 00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务　　网络服务
服务咨询热线：010-88379833　　机工官网：www. cmpbook. com
读者购书热线：010-88379649　　机工官博：weibo. com/cmp1952
教育服务网：www. cmpedu. com
金书网：www. golden-book. com

前　言

本书是《大学生（本科　非数学类）数学竞赛辅导　高等数学精题精讲精练》（以下简称《竞辅高数》）的姊妹篇.《竞辅高数》无论在内容的编排上，还是在例题等的选取上，都贴近参赛者，贴近竞赛，十分接地气，所以在其问世后，深受广大参赛者的欢迎，很快便成为了他们的良师益友.

本书与《竞辅高数》一样，旨在为复习迎赛的读者提供一本参考书，帮助他们进一步融会贯通已学过的线性代数知识，熟练掌握各种计算方法和解题技巧，以便在较短时期内，对线性代数各种问题的求解能力有一个较大幅度的提高，从容地将赛题中线性代数部分的分数尽收囊中.

全书共分五章，每章由以下四部分组成：

一、核心内容提要　这里简要地列出了全章的核心内容.

二、典型例题精解　这是全章的主要部分，其中所选的例题有较强的综合性与技巧性. 对每道题都按分析、精解及附注三部分做出精细且快捷的解答. 并且每章的例题分 A 组（计算题）与 B 组（证明题）两类.（书中例题较多，对于时间比较紧张的参赛者，可以在有经验教师的指导下挑选其中部分阅读.）

三、主要方法梳理　这里对全章的解题方法和技巧（其中许多已在“典型例题精解”中使用过了）进行总结、整理，使之系统化和实用化，使读者通过阅读本书，能准确掌握许多有效的解题方法与技巧.

四、精选备赛练习题　这些练习题都是经过精心挑选和编排的，各章都分 A 组（计算题）与 B 组（证明题）两类，由浅入深. 它们既能衡量读者已经达到的水平和具备的能力，又能通过练习进一步提高读者分析问题和解决问题的本领. 为方便读者使用本书，每章练习题之后都附有解答，供参考.

顺便指出，本书虽是一本数学竞赛辅导书，但也是那些初步学过线性代数、渴望进一步提升线性代数水平的工科类和经济类大学生的一本极好的读物；也是那些承担线性代数教学任务、渴望把课讲得更生动深入的年轻教师的一本极好的读物.

本书编写仓促，其中不当和错讹之处务望读者与同仁费心批评指正，并可通过 cqhsx@gmail. com 联系我.

北京邮电大学教授　陈启浩

目　录

前言
第一章　行列式与矩阵（Ⅰ）…… 1
一、核心内容提要 …… 1
二、典型例题精解 …… 4
A组 …… 4
B组 …… 16
三、主要方法梳理 …… 22
四、精选备赛练习题 …… 23
A组 …… 23
B组 …… 25
附：解答 …… 26
第二章　矩阵（Ⅱ）与向量 …… 40
一、核心内容提要 …… 40
二、典型例题精解 …… 43
A组 …… 43
B组 …… 58
三、主要方法梳理 …… 74
四、精选备赛练习题 …… 77
A组 …… 77
B组 …… 78
附：解答 …… 79
第三章　线性方程组 …… 92
一、核心内容提要 …… 92
二、典型例题精解 …… 94
A组 …… 94
B组 …… 121
三、主要方法梳理 …… 128
四、精选备赛练习题 …… 130
A组 …… 130
B组 …… 133
附：解答 …… 134
第四章　矩阵的特征值与特征向量 …… 150
一、核心内容提要 …… 150
二、典型例题精解 …… 152
A组 …… 152
B组 …… 186
三、主要方法梳理 …… 199
四、精选备赛练习题 …… 201

A组 …… 201
B组 …… 203
附：解答 …… 204
第五章　二次型 …… 224
一、核心内容提要 …… 224
二、典型例题精解 …… 227
A组 …… 227
B组 …… 265
三、主要方法梳理 …… 276
四、精选备赛练习题 …… 277
A组 …… 277
B组 …… 279
附：解答 …… 280
附篇　国内工科大学生数学竞赛线性代数试题选撷（附解答） …… 298
参考文献 …… 302

第一章 行列式与矩阵(Ⅰ)

一、核心内容提要

1. n 阶行列式的定义

由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列正方形表，其值为

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}\text{的记号}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式，记为 D_n，D，或 $|a_{ij}|$. 这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 是它的逆序数，$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

2. n 阶行列式的性质

设 $D=|a_{ij}|$ 是 n 阶行列式，则它有以下性质：

(1) D 与其转置行列式 D^{T}(即将 D 的第 i 行作为第 i 列$(i=1,2,\cdots,n)$构成的行列式)相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2) 互换 D 的两行(列)后的行列式是 D 的相反数.

由此推得，当 D 中有两行(列)相等时，$D=0$.

(3) 用数 k 乘 D 的某行(列)后的行列式等于 kD.

由此推得，当 D 中有两行(列)的元素对应成比例时，$D=0$.

(4) 如果 D 的某行(列)的各个元素都是两个数之和，则 D 等于相应的两个行列式之和，例如，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 将 D 的某行(列)乘以数 k 加到另一行(列)构成的行列式与 D 相等.

3. n 阶行列式按行(列)展开

设 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$，则

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\text{（按第 }i\text{ 行展开，}i=1,2,\cdots,n\text{）}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\text{（按第 }j\text{ 列展开，}j=1,2,\cdots,n\text{），}$$

这里 A_{ij} 是 D 的元素 a_{ij} 的代数余子式.

注　对 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0(k=1,2,\cdots,n,k\neq i)$，

对 $j=1,2,\cdots,n$ 有 $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=0(k=1,2,\cdots,n,k\neq j)$.

4. 矩阵的概念

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成 m 行 n 列的矩形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，记为 $\boldsymbol{A}$，$(a_{ij})_{m\times n}$，或(a_{ij}).

当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，记它对应的行列式为$|\boldsymbol{A}|$，即$|\boldsymbol{A}|=|a_{ij}|$.

5. 和(差)矩阵、数乘矩阵、置转矩阵和积矩阵

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则分别称 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$，与 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的和矩阵与差矩阵.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 是数，则分别称 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a_{ji})_{n\times m}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的数乘矩阵与转置矩阵.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times l}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n}$，则称 $\boldsymbol{AB}=\left(\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的积矩阵. 特别地，当 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵时，称 $\boldsymbol{A}^m=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{m\text{个}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次幂.

6. 逆矩阵和伴随矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$[㊀]，实际可简化为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶矩阵，则称 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})_{n\times n}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，其中 A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式$(i,j=1,2,\cdots,n)$.

7. 分块矩阵

用若干条纵线与横线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成一些小块（小矩阵），以这些小块为“元素”的矩阵称为

㊀ $\boldsymbol{E}_n$ 表示 n 阶单位矩阵，当不必指出阶数时，也可简记为 $\boldsymbol{E}$.

$\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵(注意 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 相等).

分块矩阵也有矩阵所具有的各种运算，只要把各小块看作元素即可，但需要注意的是各小块在进行运算时，必须符合矩阵运算规则.

8. 矩阵运算的主要性质

(1) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ 是数，则 $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$；

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$；

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则

$$|\boldsymbol{A}|\neq 0,\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*,(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A},(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda\text{ 是非零数}),$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ 是数，则

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n,(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A},$$
$$(\lambda\boldsymbol{A})^*=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*,(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}.$$

(4) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$(当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆时)，$(\boldsymbol{AB})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

(5) 设 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 分别为 m 阶与 n 阶矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 都是矩阵，则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{M}_2\end{vmatrix}=|\boldsymbol{M}_1||\boldsymbol{M}_2|^{\ominus},$$

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{Q}\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|\boldsymbol{M}_1||\boldsymbol{M}_2|.$$

设 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 都是矩阵，则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_2^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_2^{-1}\\ \boldsymbol{M}_1^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1^{-1} & -\boldsymbol{M}_1^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}_2^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_2^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{M}_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{M}_2^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}_1^{-1} & \boldsymbol{M}_2^{-1}\end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2$ 分别是 m 阶与 n 阶矩阵，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 都是矩阵，则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_2\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{M}_2|\boldsymbol{M}_1^* & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{M}_1|\boldsymbol{M}_2^*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_1\\ \boldsymbol{M}_2 & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & |\boldsymbol{M}_1|\boldsymbol{M}_2^*\\ |\boldsymbol{M}_2|\boldsymbol{M}_1^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{M}_2\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{M}_2|\boldsymbol{M}_1^* & -\boldsymbol{M}_1^*\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}_2^*\\ \boldsymbol{O} & |\boldsymbol{M}_1|\boldsymbol{M}_2^*\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{M}_2\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{M}_2|\boldsymbol{M}_1^* & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{M}_2^*\boldsymbol{Q}\boldsymbol{M}_1^* & |\boldsymbol{M}_1|\boldsymbol{M}_2^*\end{pmatrix}.$$

⊖ $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵.

二、典型例题精解

A　组

例 1.1　计算 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}$.

分析　利用行列式性质使某行(列)有较多元素为零,然后按该行(列)展开.

精解

$$D=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第 2、3 列都加到第 1 列}}\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 3\\ \lambda & \lambda-4 & 3\\ \lambda-4 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第 1 行}\times(-1)\text{加到第 2 行}}\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 3\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ \lambda-4 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 2 行展开}}(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda & 3\\ \lambda-4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

附注　3 阶行列式可以直接计算,即

$$\begin{aligned}D&=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-5)+1\times2\times3+(-2)\times3\times(-1)-(-1)\times3\times(\lambda-4)-\\&\quad 2\times3\times(\lambda-1)-1\times(-2)\times(\lambda-5)\\&=(\lambda-2)^2(\lambda-6).\end{aligned}$$

但如此计算,计算量较大.

例 1.2　计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}$.

分析　所给行列式每行之和都为$\frac{1}{2}n(n+1)$,所以先将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列入手计算.

精解　$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{第 }2,3,\cdots,n\text{ 列都加到第 }1\text{ 列}}\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&3&4&\cdots&n&1\\1&4&5&\cdots&1&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{加到后行}]{\text{从第 }n-1\text{ 行起前行}\times(-1)}\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\0&1&1&\cdots&1&1-n\\0&1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&1-n&\cdots&1&1\\0&1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 }1\text{ 列展开}}\frac{1}{2}n(n+1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&\cdots&1-n&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}(n-1\text{ 阶})$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\cdot(-1)^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}(-1)(-n)^{n-2}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\frac{1}{2}n^{n-1}(n+1).$$

附注　应记住 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&a\end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1},$$

也应记住

$$D_n'=\begin{vmatrix}b&\cdots&b&a\\b&\cdots&a&b\\\vdots&&\vdots&\vdots\\a&\cdots&b&b\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}D_n.$$

题解中应用了以上两个结论.

例 1.3　计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x_1+a_1^2&a_1a_2&\cdots&a_1a_n\\a_2a_1&x_2+a_2^2&\cdots&a_2a_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_na_1&a_na_2&\cdots&x_n+a_n^2\end{vmatrix}$(其中 $x_1x_2\cdots x_n\neq0$).

分析　为将 D_n的对角线上元素的两项之和转化成一项,例如去掉其中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$或 $a_1^2,a_2^2,\cdots,a_n^2$. 为此对 D_n加边升阶,即考虑 $n+1$ 阶行列式

$$D'_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n\\ 0 & a_2a_1 & x_2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & \cdots & x_n+a_n^2\end{vmatrix}$$

精解 $D_n=D'_{n+1}$

$$\xlongequal[\text{对应地加到第 }2,3,\cdots,n+1\text{ 行}]{\text{第 1 行分别乘以}-a_1,-a_2,\cdots,-a_n}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ -a_1 & x_1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_2 & 0 & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & x_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{都加到第 1 列}]{\text{第 }2,3,\cdots,n+1\text{ 列分别乘以}\frac{a_1}{x_1},\frac{a_2}{x_2},\cdots,\frac{a_n}{x_n}\text{后}}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{x_i} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{三角形行列式}}x_1x_2\cdots x_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i}\right).$$

附注 对于 n 阶行列式 D_n 的基本计算方法是按一行(列)展开,但除此之外,还应根据 D_n 的具体情形采用一些有效方法,如本题的"加边"就是计算某些 n 阶行列式的十分有效的方法.

例 1.4 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n\end{vmatrix}$.

分析 将 D_n 的第 n 列中的每个元素写成两个元素之和,即 $0+0,0+0,0+0,\cdots,0+a_n$, $1+(-a_n)$,于是 D_n 成为两个行列式之和,其中,$\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{vmatrix}=$ D_{n-1},由此可由递推方法计算 D_n.

精解　$D_n=\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{vmatrix}+$

$$\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -a_n\end{vmatrix}$$

其中，$\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 }n\text{ 列展开}}D_{n-1}$，

$$\begin{vmatrix}1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -a_n\end{vmatrix}\xlongequal[\text{前一行}]{\text{从第 }n\text{ 行起，每行加到}}$$

$$\begin{vmatrix}-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & -a_3 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -a_n\end{vmatrix}=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n.$$

由此可知，$D_n=D_{n-1}+(-1)^n a_1a_2\cdots a_n$，从而

$$D_n-D_{n-1}=(-1)^n a_1a_2\cdots a_n,$$
$$D_{n-1}-D_{n-2}=(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1},$$
$$\cdots$$
$$D_2-D_1=(-1)^2a_1a_2=a_1a_2,$$
$$D_1=1-a_1.$$

以上各式相加得

$$D_n=1-a_1+a_1a_2+\cdots+(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1}+(-1)^n a_1a_2\cdots a_n.$$

附注 本题采用的递推方法,也是计算 n 阶行列式的常用且有效的方法. 该方法的步骤是:

(1) 利用行列式性质建立 D_n,关于 D_{n-1} 等的递推式.

(2) 由递推式及初始条件 D_1 算出 D_n.

例 1.5 设 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$,求它的第 1 行各个元素的代数余子式之和,即 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$.

分析 由于 $D_n=x_1A_{11}+x_2A_{12}+\cdots+x_nA_{1n}$,所以欲计算 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$,只要计算 $D_n\big|_{x_1=x_2=\cdots=x_n=1}$ 即可.

精解 由于

$$D_n\big|_{x_1=x_2=\cdots x_n=1}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第 } i \text{ 行}\times\frac{1}{i}(i=2,3,\cdots,n)} n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{\text{第 } i \text{ 行}\times(-1)\text{加到第 1 行}} n!\begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=n!\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right),$$

所以,$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=n!\left(1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)$.

附注 实际上,按上面所使用的方法,同样可算得 $D_n=n!\left(x_1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{x_i}{i}\right)$.

例 1.6 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$,其中,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 全不为 a,求 $2n$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}$.

分析 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \frac{1}{2}\boldsymbol{A} \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}$,然后利用行列式性质将右边行列式变成形如 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{N} \end{vmatrix}$ 进行计算.

精解
$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \frac{1}{2}\boldsymbol{A} \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{分别加到第 } n+1,n+2,\cdots,2n \text{ 行}]{\text{第 } 1,2,\cdots,n \text{ 行都乘以}\left(-\frac{1}{2}\right),}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \frac{1}{2}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \frac{3}{4}\boldsymbol{A} \end{vmatrix}$$

$$=|\boldsymbol{A}|\cdot\left|\frac{3}{4}\boldsymbol{A}\right|=\left(\frac{3}{4}\right)^n|\boldsymbol{A}|^2.$$

由于
$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a & x_2 & a & \cdots & a \\ a & a & x_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第 1 行乘以}(-1)\text{加到其余各行}}\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a \\ a-x_1 & x_2-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x_1 & 0 & x_3-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a-x_1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n)]{\text{第 } i \text{ 列乘以}\frac{x_1-a}{x_i-a}\text{加到第 1 列}}\begin{vmatrix} x_1+a\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{x_1-a}{x_i-a} & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_2-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$

$$=\left(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{x_1-a}{x_i-a}\right)(x_2-a)\cdots(x_n-a),$$

所以$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{x_1-a}{x_i-a}\right)^2(x_2-a)^2\cdots(x_n-a)^2.$

附注　为了利用公式$\begin{vmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{P} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{N} \end{vmatrix}=|\boldsymbol{M}|\,|\boldsymbol{N}|$,所以由行列式性质将$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix}$的左下角$\boldsymbol{B}$变成$\boldsymbol{O}$,这是本题获解的关键.

例 1.7　设$\boldsymbol{A}$是n阶可逆的对称矩阵,$\boldsymbol{B}$是n阶矩阵,它们满足$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{E}_n$,试化简矩阵表达式$(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$.

分析　首先指明$\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$可逆,然后利用矩阵运算的性质化简所给的矩阵表达式.

精解　由$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{E}_n$,即$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$可逆,以及$\boldsymbol{A}$可逆知

$$\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}$$

可逆,所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}&=[\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}][\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}]\\&=(\boldsymbol{E}_n+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}(\text{利用 }\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A})\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\text{利用}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}).\end{aligned}$$

附注　题设$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{E}_n$表明$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$可逆,且$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

例 1.8　设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵,满足$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$及$\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{O}$,试化简矩阵表达式$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}-\boldsymbol{A}^*$.

分析　利用题设算出$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}$与$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$,由此即可化简所给的矩阵表达式.

精解　由$\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{O}$,即$(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A})+2(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)=4\boldsymbol{E}_n$,得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}_n)=4\boldsymbol{E}_n,\text{即}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)\cdot\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}_n)=\boldsymbol{E}_n.$$

所以,$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}_n)$.

同理,由$\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{O}$,即$\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}_n$,得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}_n)=2\boldsymbol{E}_n,\text{即}\boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}_n)=\boldsymbol{E}_n,$$

所以$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}_n)$. 从而$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}_n)$.

由此得到

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}-\boldsymbol{A}^*=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}_n)-\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}_n)=-\frac{1}{4}\boldsymbol{E}_n.$$

附注　计算抽象型矩阵的逆矩阵时,常常使用以下结论:

设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵,如果能找到n阶矩阵$\boldsymbol{B}$,使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_n$或$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$,则$\boldsymbol{A}$可逆,且$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}$.题中$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}$和$\boldsymbol{A}^{-1}$都按此计算.

例 1.9　设$\boldsymbol{A}$是n阶矩阵,且$2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n$,$\frac{4}{3}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n$都可逆,记$\boldsymbol{B}=(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_n)$,试化简矩阵表达式$(\boldsymbol{E}_n+2\boldsymbol{B})^{-1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_n$.

分析　先算出$\boldsymbol{E}_n+2\boldsymbol{B}$,然后计算$(\boldsymbol{E}_n+2\boldsymbol{B})^{-1}$,最后再化简所给的矩阵表达式$(\boldsymbol{E}_n+$

$2\boldsymbol{B})^{-1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_n$.

精解　由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_n+2\boldsymbol{B}&=\boldsymbol{E}_n+(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}(2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}_n)\\&=(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)+(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}(2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}_n)\\&=(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}(4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n)\end{aligned}$$

可逆$\left(\text{这里利用}\frac{4}{3}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n\text{，即 }4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n\text{可逆}\right)$，且

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}_n+2\boldsymbol{B})^{-1}&=(4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n)^{-1}(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)\\&=(4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n)^{-1}\cdot\frac{1}{2}[(4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n)+5\boldsymbol{E}_n]\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_n+\frac{5}{2}(4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n)^{-1},\end{aligned}$$

所以，$(\boldsymbol{E}_n+2\boldsymbol{B})^{-1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_n=\frac{5}{2}(4\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}_n)^{-1}$.

附注　题解中将$\boldsymbol{E}_n$表示为$(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)^{-1}(2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}_n)$，使得计算顺利进行.

例 1.10　设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都是$n$阶矩阵，且$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n,\boldsymbol{B}$都可逆及$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)^{-1}=\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_n$，试将$\boldsymbol{A}^{-1}$用关于$\boldsymbol{B}$的矩阵式表示.

分析　由$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)^{-1}=\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_n$，推出$\boldsymbol{AM}=\boldsymbol{E}_n$(其中$\boldsymbol{M}$是关于$\boldsymbol{B}$的某个矩阵表示式)，由此即得$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{M}$.

精解　由$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)^{-1}=\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_n$，即$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_n)(\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_n)=\boldsymbol{E}_n$，得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_n)=\boldsymbol{B}^*.$$

上式两边同时右乘$\boldsymbol{B}$，得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{E}_n,$$

于是由$|\boldsymbol{B}|\neq0$，得　$\boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}(\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_n$. 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}&=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}(\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{B}=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B})\\&=\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}\boldsymbol{B}.\end{aligned}$$

附注　对n阶矩阵有$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$，这是化简包含有$\boldsymbol{A}^*$的矩阵表达式的常用公式.

例 1.11　设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$，求解矩阵方程$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n$.

分析　化简$(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$后再求解方程.

精解　由于$(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})]^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$，所以所给矩阵方程成为$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_n$，从而

$$\boldsymbol{X}=[(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}]^{-1}=\left(\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\2&1&0&0\\ \hdashline 3&2&1&0\\4&3&2&1\end{array}\right)^{-1}$$