应用常微分方程

刘秀湘　田艳玲　徐志庭　李宪高/编

科学出版社

应用常微分方程

刘秀湘　田艳玲　徐志庭　李宪高／编

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书分 5 章. 第 1 章介绍常微分方程的建模案例和基本概念. 第 2 章介绍几类重要一阶微分方程的初等积分法及几类可积的高阶微分方程的求解. 第 3 章阐述常微分方程初值问题解的存在性、唯一性, 以及解关于初值的连续依赖性和可微性. 第 4 章研究常微分方程组解的基本理论和求解方法. 第 5 章介绍常微分方程数值计算和数学软件求解方法, 并给出建模应用案例.

本书可作为高等院校数学专业常微分方程课程的教材, 也可供其他理工类、经济管理类学生学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

应用常微分方程/刘秀湘等编. —北京：科学出版社，2019.2

ISBN 978-7-03-060482-8

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①常微分方程-教材 Ⅳ. ①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 017728 号

责任编辑: 郭勇斌 彭婧煜 孙翠勤 / 责任校对: 彭珍珍
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 2 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2019 年 2 月第一次印刷 印张: 11 1/2
字数: 224 000

定价: 48.00 元

前　言

常微分方程是数学专业的一门专业基础课, 也是其他理工类、经济管理类学生要掌握的一门课程. 作者们根据多年讲授常微分方程的教学实践, 编写了本书. 本书在编写过程中, 主要考虑教学实践中的两个问题. 第一个问题是课程教学时数减少, 即课程教学时数由原来的每周四学时降为三学时. 如何适应这一变化? 简单的办法就是在现有教材的基础上选择部分内容进行讲授, 但是内容的整体性会受到影响. 第二个问题是大学生数学建模活动的普及. 常微分方程建模是很多数学与非数学专业学生非常感兴趣的内容, 如何在数学专业课过程中渗透数学建模思想? 为此, 需要在现有一些教材的基础上对教学内容进行优化、整合. 首先将高阶线性微分方程作为线性微分方程组的特殊情形进行处理, 这不仅可以节省篇幅, 而且在解的基本理论、求解方法上体现其特殊性, 从而使内容更具系统性. 其次将常微分方程的建模、求解 (包括求解析解与数值解) 与应用融入全书的编写.

本书分 5 章. 第 1 章介绍常微分方程的建模案例和基本概念. 第 2 章介绍几类重要一阶微分方程的初等积分法及几类可积的高阶微分方程的求解. 第 3 章阐述常微分方程初值问题解的存在性、唯一性, 以及解关于初值的连续依赖性和可微性. 第 4 章研究线性常微分方程组解的基本理论和求解方法. 第 5 章介绍常微分方程数值计算和数学软件求解方法, 并给出建模应用案例. 本书的初稿由刘秀湘教授、田艳玲副教授、徐志庭教授和李宪高副教授编写, 其中刘秀湘教授编写了第 1 章、第 3 章和 4.3 节, 田艳玲副教授编写了第 5 章, 徐志庭教授编写了第 2 章, 李宪高副教授编写了 4.1 节和 4.2 节. 初稿完成后, 编写组全体成员多次仔细讨论、评阅和修改, 最后由刘秀湘教授、田艳玲副教授负责全书的统稿整理工作.

本书的讲义在华南师范大学数学科学学院 2014~2017 级本科生中进行了试用. 常微分方程的任课老师和许多同学对本书的初稿提出了很多宝贵的修改意见和建议, 指出了一些录入错误等, 在此向他们表示衷心的感谢. 杨启贵教授和梁海华教授审阅了本书并提出了许多宝贵意见, 陈奇斌老师绘制了本书的部分插图, 在此对

他们表示衷心的感谢. 本书的编写和出版得到华南师范大学校级质量工程建设项目资助, 在此表示感谢.

由于受学科水平和教学经验的限制, 书中难免存在疏漏和错误, 恳切希望读者提出批评和指正.

编　者
2018 年 9 月
华南师范大学

目　录

第1章 绪　　论

1.1 常微分方程模型

方程是含有未知量的等式. 初等数学中读者最为熟悉的就是一元一次、二次或高次多项式方程, 以及指数、对数和三角函数等方程. 这些方程的未知量是一个量的某几个特定的值. 但在科学技术和实际应用中还会遇到大量的方程, 其未知量是一个函数, 如

例 1 求一函数 $\phi(x)$, 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $\phi'(0)$ 存在且满足关系式

$$\phi(x+y)=\phi(x)\phi(y).$$

例 2 求函数 $\phi(x)$ 使得 $\phi(\phi(x))=x$.

我们称例 1 和例 2 中这些未知量是函数的方程为**函数方程**或**泛函方程**. 特别地, 那些联系着自变量、未知函数和未知函数导数的函数方程称为**微分方程**. 如果在微分方程中, 出现的未知函数是单个变量的函数, 我们称这类微分方程为**常微分方程**. 如果出现的未知函数是两个或两个以上变量的函数, 则称为**偏微分方程**, 如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

本书仅研究常微分方程, 以下简称常微分方程为微分方程或方程.

自 Newton 和 Leibniz 创立微积分以来, 人们就开始研究微分方程. 三百多年来, 微分方程的发展极大地推动了自然科学和技术的发展. 如今, 微分方程的研究已广泛应用于物理学、化学、生物学、工程技术乃至社会科学等许多领域, 同时从这些领域中的实际问题抽象出来的数学模型也丰富和推动了微分方程的研究和发展, 使之成为当今经济发展和社会进步不可缺少的一门学科.

下面我们通过实例介绍微分方程模型.

1.1.1 种群增长模型

例 3 **单种群增长模型.** 设 $x(t)$ 为某类生物 t 时刻的数量, $b(t)$ 为该生物 t 时刻每单位时间每单位种群增加的数量, 即所谓瞬时出生率, $d(t)$ 为瞬时死亡率, 其中 $b(t)$, $d(t)$ 都是 t 的连续函数. 于是对 $\Delta t>0$, 在区间 $[t,t+\Delta t]$ 中, 该类生物种群数量的改变量为

$$x(t+\Delta t)-x(t)=\int_t^{t+\Delta t}[b(s)-d(s)]x(s)\mathrm{d}s,$$

记 $\mu(t)=b(t)-d(t)$, 称它为该类生物种群数量的自然增长率, 则

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\mu(s)x(s)\mathrm{d}s.$$

令 $\Delta t\to 0$, 得到这类问题的数学模型

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mu(t)x(t). \tag{1.1.1}$$

在方程 (1.1.1) 中, 函数的导数只出现一阶, 故称为**一阶常微分方程**. 如果 $\mu(t)\equiv k$, 就得到著名的 Malthus 模型

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(t). \tag{1.1.2}$$

下面尝试求出方程 (1.1.2) 中的未知函数. 注意到实际意义, 我们考虑 x 非负的情形. 如果 $x>0$, 利用不定积分有

$$\ln x=kt+C_1,\ \text{即}\ x=\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{kt},$$

其中 C_1 为任意常数. 记 $C=\mathrm{e}^{C_1}$, 则 $x=C\mathrm{e}^{kt}$ 且 $C>0$ 为任意常数. 显然 $x=0$ 满足方程 (1.1.2). 于是满足方程 (1.1.2) 且具有实际意义的解为

$$x=C\mathrm{e}^{kt}, \tag{1.1.3}$$

其中 $C\geqslant 0$ 为任意常数. 函数 (1.1.3) 为一阶方程 (1.1.2) 的解, 因为其含有一个任意常数, 我们称之为方程 (1.1.2) 的**通解**. 假设初始时刻 t_0 时的种群数量为 x_0, 即

$$x(t_0)=x_0, \tag{1.1.4}$$

该式称为方程 (1.1.2) 的**初值条件**, 将此条件代入函数 (1.1.3), 即可确定常数 $C=x_0\mathrm{e}^{-kt_0}$, 于是满足函数 (1.1.2) 和初值条件 (1.1.4) 的函数应为

$$x=x_0\mathrm{e}^{k(t-t_0)},$$

称之为方程 (1.1.2) 满足初值条件 (1.1.4) 的**特解**.

需要注意的是, Malthus 模型中的相对增长率是一个与种群数量 x 无关的常数, 这与许多实际问题并不相符. 自然界由于资源环境的有限, 随着种群数量的增加, 种群的自然增长率会下降, 这就是种群的阻滞增长现象. 为刻画这种现象, 自然增长率 μ 假设为种群数量 $x(t)$ 的线性递减函数 $\mu=r\left(1-\dfrac{x}{K}\right)$, 此时得到所谓的**Logistic 阻滞增长模型**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx\left(1-\frac{x}{K}\right), \tag{1.1.5}$$

其中 r 称为固有增长率, 参数 K 称为环境容纳量, 式 (1.1.5) 也称为**Logistic 方程**. 对于这个方程的进一步分析我们留在第 2 章的 2.1.1 节.

例 4 (马知恩, 1996) 20 世纪 20 年代, 意大利生物学家 D'Ancona 在研究鱼类变化规律时, 无意中发现了第一次世界大战期间, 意大利某港口收购站的软骨掠肉鱼 (鲨鱼等以其他鱼为食的鱼) 在鱼类收购量中的下述比例资料:

年份	1914	1915	1916	1917	1918
比例/%	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年份	1919	1920	1921	1922	1923
比例/%	27.3	16.0	15.0	14.8	10.7

使 D'Ancona 感到惊异的是, 在战争期间软骨掠肉鱼捕获的比例显著地增加. 起初他认为这是由于战争使捕鱼量减少, 软骨掠肉鱼获得了更充裕的食物, 从而促进了它们更快地繁殖生长. 但再转念一想, 捕获量的减少也应同样有利于非掠肉鱼, 为什么会导致软骨掠肉鱼的比例上升呢? D'Ancona 无法用生物学的观点去解释这一现象, 于是就去请教他当时的同事 —— 意大利著名数学家 Volterra, 希望他能利用数学理论解释这一使他迷惑的现象.

首先考虑无捕捞情况. Volterra 把鱼分成两大类: 掠肉鱼和食用鱼. 前者在鱼类中是捕食种群, 后者是食饵种群. 他用 $y(t)$ 表示 t 时刻掠肉鱼的数量, $x(t)$ 表示 t 时刻食用鱼的数量. 假定若不存在捕食者 $y(t)$ 时, 食饵种群 $x(t)$ 的增长符合 Malthus 方程, 即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax(t),$$

其中 a 为一正常数. 当捕食者 $y(t)$ 存在时, 单位时间内每个捕食者对食饵的吞食量与食饵种群规模 $x(t)$ 成正比, 比例系数为 b, 从而

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax(t) - bx(t)y(t).$$

再假定捕食者吞食食饵以后, 立即转化为能量, 供给捕食种群的繁殖增长 (这里略去时间滞后作用). 设转化系数为 α, 捕食种群的死亡率与种群规模成正比, 比例系数为 d, 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha bx(t)y(t) - dy(t).$$

这样, Volterra 建立的捕食者与食饵所构成的两种群相互作用的数学模型为两个一阶方程式联立的方程组, 我们称之为**二维常微分方程组**:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - bxy, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha bxy - dy. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

为方便, 我们假设初始时刻为 $t=0$, 初值条件为

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0. \tag{1.1.7}$$

利用数值计算可以发现式 (1.1.6)-(1.1.7) 描述了掠肉鱼和食用鱼两个种群呈周期性的变化 (详见第 5 章 5.6 节例 6). 设周期为 T, 我们可以计算两种群规模在一个周期内的平均值. 将式 (1.1.6) 的第一个方程两边除以 x 后积分得

$$\int_0^T \frac{\dot{x}(t)\mathrm{d}t}{x(t)} = \int_0^T [a-by(t)]\mathrm{d}t.$$

由于

$$\int_0^T \frac{\dot{x}(t)\mathrm{d}t}{x(t)} = \ln|x(T)| - \ln|x(0)| = 0,$$

故

$$aT - b\int_0^T y(t)\mathrm{d}t = 0,$$

即

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t = \frac{a}{b}.$$

同理可得

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t = \frac{d}{\alpha b}.$$

也就是说, 一个周期内两个种群的规模平均值分别保持常数:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t = \frac{d}{\alpha b}, \quad \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t = \frac{a}{b}.$$

下面考虑有捕捞的情况. 假定由于海上捕捞, 食饵与捕食者的数量分别以 hx 和 hy 的速率减少, 其中 h 反映了捕捞能力, 由渔船规模、下网次数等因素确定, $h<a$. 于是在捕捞情况下, 相应于式 (1.1.6) 的模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (a-h)x - bxy, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha bxy - (d+h)y, \end{cases} \tag{1.1.8}$$

此时一个周期内的平均值分别为

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t = \frac{d+h}{\alpha b}, \quad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t = \frac{a-h}{b}. \tag{1.1.9}$$

Volterra 根据式 (1.1.9) 回答了 D'Ancona 的问题: h 的减少将使 $\bar{x}$ 减少, $\bar{y}$ 增加. 第一次世界大战期间, 战争使渔业萧条, 即 h 减少, 与无战争相比, 将有利于

掠肉鱼 y 的增长, 也就是说, 捕捞量的减少将有利于捕食者种群的繁殖增长. 这就是 Finme 港收购站统计表中所呈现规律的原因. Volterra 所发现的这一规律称为Volterra **原理**.

Volterra 原理在现实中有重要的指导意义. 我们把害虫和它的天敌构成一个食饵–捕食者系统, 人们常常使用农药去毒杀害虫, 但农药在毒杀害虫的同时也能毒杀其天敌, 农药的毒杀就相当于系统 (1.1.9) 中的 h, 根据 Volterra 原理, h 的增加反而会导致一个周期内害虫数量 $\bar{x}$ 的增加.

1.1.2　两个物理学模型

例 5　数学摆模型. 考虑一个铅直平面上的单摆的运动情况. 摆锤质量为 m, 摆臂质量相对太小而忽略不计. 摆臂长度为 l , 记重力加速度为 g. 研究此单摆的运动规律.

设在某时刻 t, 摆臂与铅直线的夹角为 $\theta(t)$. 这个夹角的变化就给出了单摆的运动规律. 取逆时针方向为 θ 的正方向, 根据受力分析, 摆锤所受的外力的总和成为一个相切于圆周形式的摆轨道上的力 $F=-mg\sin\theta$, 摆锤从铅直状态到当前状态的位移 $x(t)$ 按弧长计算应该等于 $l\theta(t)$. 由 Newton 第二运动定律得到

$$m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=-mg\sin\theta,$$

从而得到关于 $\theta(t)$ 满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0. \tag{1.1.10}$$

上述方程出现了未知函数 $\theta(t)$ 的二阶导数, 称为**二阶微分方程**. 如果只研究摆的微小振动, 即当 θ 比较小的情况, 我们可以取 $\sin\theta$ 的近似值 θ 代入方程 (1.1.10), 这样得到微小振动时摆的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\theta=0. \tag{1.1.11}$$

注意到方程 (1.1.11) 的左端关于未知函数 θ 及其二阶导数 $\ddot{\theta}$ 都是线性的, 故称为**二阶线性微分方程**, 而方程 (1.1.10) 称为**二阶非线性微分方程**.

当要确定摆的一个特定的运动时, 我们应先给出摆的初始状态, 即摆的初始位置和初始角速度:

$$\theta(0)=\theta_0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\omega_0. \tag{1.1.12}$$

通过研究方程 (1.1.11)、初始条件 (1.1.12), 可以知道它的运动是周期性的.

例 6　人造卫星的运动模型. 设 M 为地球质量, μ 为万有引力常数, m 为卫星质量, 以地心为圆心建立空间三维直角坐标系, 卫星 t 时刻在空间的位置坐标为 $(x(t), y(t), z(t))$. 于是 t 时刻的加速度为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right).$$

首先考虑 x 方向上的方程, 根据 Newton 第二运动定律和万有引力定律有

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x = -\frac{\mu Mm}{r^2}\cdot\frac{x}{r},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu xM}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = 0,$$

其中 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. 类似地我们可以得到 y, z 方向上的方程, 于是人造卫星的运动模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mu xM}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mu yM}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mu zM}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = 0. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

研究微分方程 (1.1.13) 可以得到开普勒观测到的行星运动的三个规律.

1.1.3　两个实用曲线的微分方程模型

例 7　两点间柔软悬链在自身重力作用下的形状称为悬链线, 研究悬链线的曲线方程.

解　如图 1.1 所示. 以悬链的最低点为原点建立直角坐标系, $M(x, y)$ 为悬链线 C 上任一点, s 是原点到 M 的链长, 设链的密度为 $\rho(s)$, g 为重力加速度, O 点的水平张力为 T_0, M 点处的张力为 T, 根据物理学知识, T 的方向为 M 的切线方向, 由 Newton 运动定律知

$$T\cos\theta = T_0, \quad T\sin\theta = g\int_0^s \rho(s)\mathrm{d}s,$$

于是

$$T_0\tan\theta = g\int_0^s \rho(s)\mathrm{d}s.$$

注意到 $\tan\theta = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 代入上式并对 x 求导得到

$$T_0\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = g\rho(s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = g\rho(s)\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2},$$

即得到悬链线的数学模型为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{g\rho(s)}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2},$$

特别地, 如果悬链线密度均匀, 即 $\rho(s)\equiv\rho$, 则得到下述方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{g\rho}{T_0}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}, \tag{1.1.14}$$

容易看出模型满足初值条件为

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0.$$

方程 (1.1.14) 的求解类似于第 2 章 2.5.1 节中例 3.

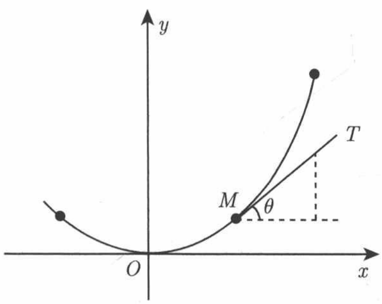

图 1.1

例 8　兔子发现狐狸后立即沿直线逃跑, 狐狸立即追击, 研究狐狸的追捕路线.

解　如图 1.2 所示. 假设兔子从原点出发沿 y 轴正方向逃跑, 狐狸从 $(c,0)$ 出

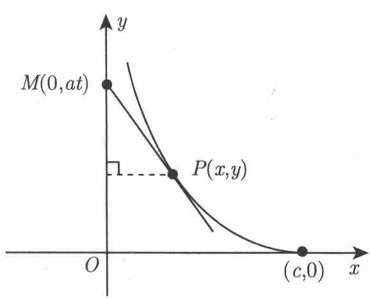

图 1.2

发追捕, 速率分别为 a,b. 经过时间 t 后, 兔子逃到点 $M(0,at)$, 狐狸追到 $P(x,y(x))$, 追捕路程为 s, 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-at}{x},$$

即

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=-at,$$

对 x 求导并注意到 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=b$, 得到

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-a\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-a\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x},$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=-\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2},$$

得到追捕模型为

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{a}{b}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}. \tag{1.1.15}$$

方程 (1.1.15) 的求解类似于第 2 章 2.5.2 节的例 3.

以上我们从生态、物理以及其他现实世界问题的建模中得到一些常微分方程. 从前面的例子可以看出, 微分方程模型的特点是反映客观现实世界中量与量的变化关系, 往往与时间有关, 是一个动态系统. 从常微分方程作为解决实际问题的工具这一要求来说, 利用微分方程研究实际问题的主要步骤如下:

(1) 建模, 即建立起反映变量间内在联系的微分方程, 包括必要的初值条件或其他条件;

(2) 求解, 即求出微分方程的解或研究解的性质;

(3) 应用, 即结合实际具体问题, 给出解的实际意义解释.

1.2　常微分方程概念

1.2.1　矩阵与向量函数

首先引入矩阵值函数 (简称矩阵函数或矩阵) 相关概念.

记 $\mathcal{I}:=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, 设 $a_{ij}(t)(i,j=1,\cdots,n)$ 是定义在 $\mathcal{I}$ 上的函数.

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{bmatrix}$$

称为区间 $\mathcal{I}$ 上的**矩阵函数**. 如果它的每一个分量 $a_{ij}(t)(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为 $\mathcal{I}$ 上的

连续 (可微、可积) 函数, 则称 $\boldsymbol{A}(t)$ 为 $\mathcal{I}$ 上的连续 (可微、可积) 函数, 且

$$\boldsymbol{A}'(t)=\begin{bmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \cdots & a'_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \cdots & a'_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \cdots & a'_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} \int_a^b a_{11}(t)\mathrm{d}t & \int_a^b a_{12}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_a^b a_{1n}(t)\mathrm{d}t \\ \int_a^b a_{21}(t)\mathrm{d}t & \int_a^b a_{22}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_a^b a_{2n}(t)\mathrm{d}t \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_a^b a_{n1}(t)\mathrm{d}t & \int_a^b a_{n2}(t)\mathrm{d}t & \cdots & \int_a^b a_{nn}(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix}.$$

作为矩阵函数的特殊情况, 类似地可以定义**向量值函数**$\boldsymbol{u}(t)$(简称向量函数或向量) 及其连续 (可微、可积), 且

$$\boldsymbol{u}'(t)=\begin{bmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \\ \vdots \\ u'_n(t) \end{bmatrix},\quad \int_a^b \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix} \int_a^b u_1(t)\mathrm{d}t \\ \int_a^b u_2(t)\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t \end{bmatrix}.$$

不难验证, 如果 $n\times n$ 矩阵函数 $\boldsymbol{A}(t),\boldsymbol{B}(t)$ 及 n 维向量函数 $\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}(t)$ 是可微的, 则下列等式成立:

(1) $[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)]'=\boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t),\ [\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t)]'=\boldsymbol{u}'(t)+\boldsymbol{v}'(t)$;

(2) $[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)]'=\boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}'(t)$;

(3) $[\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}(t)]'=\boldsymbol{A}'(t)\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{u}'(t)$.

对于 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 和 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 定义它的**范数**为

$$\|\boldsymbol{A}\|=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|,\quad \|\boldsymbol{x}\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $n\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 n 维向量, 容易验证范数具有如下性质:

(1) $\|\boldsymbol{AB}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|$, $\|\boldsymbol{Ax}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$;

(2) $\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|$, $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

向量序列 $\{\boldsymbol{x}_k\}, \boldsymbol{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{nk})^{\mathrm{T}}$ 称为收敛的, 如果对每一个 i ($i = 1, 2, \cdots, n$), 数列 $\{x_{ik}\}$ 都是收敛的. 向量函数序列

$$\{\boldsymbol{x}_k(t)\}, \quad \boldsymbol{x}_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t), \cdots, x_{nk}(t))^{\mathrm{T}}$$

称为在区间 $\mathcal{I}$ 上收敛的 (一致收敛的), 如果对每一个 $i (i = 1, 2, \cdots, n)$, 函数序列 $\{x_{ik}(t)\}$ 在 $\mathcal{I}$ 上都是收敛的 (一致收敛的). 向量函数项级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k(t)$ 称为在区间 $\mathcal{I}$ 上收敛的 (一致收敛的), 如果其部分和作成的向量函数序列在区间 $\mathcal{I}$ 上是收敛的 (一致收敛的).

不难证明, 用于判别函数项级数一致收敛性的 Weierstrass 判别法同样可以应用于向量函数项级数. 如果

$$\|\boldsymbol{x}_k(t)\| \leqslant M_k, \quad t \in \mathcal{I},$$

而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ 是收敛的, 则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_k(t)$ 在区间 $\mathcal{I}$ 上是一致收敛的. 如果连续函数序列 $\{\boldsymbol{x}_k(t)\}$ 在区间 $\mathcal{I}$ 上一致收敛, 则相应地有积分号与取极限运算可以交换, 即

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \boldsymbol{x}_k(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k(t)\mathrm{d}t.$$

类似地可以给出矩阵序列、矩阵函数项级数及其收敛、一致收敛性的定义及其性质, 在此不再赘述.

1.2.2 常微分方程基本形式

微分方程中出现的未知函数导数的最高阶数称为微分方程的**阶数**(简称阶). 通常n **阶常微分方程**的一般形式为

$$F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0,$$

其中

$$x' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad x'' = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \cdots, x^{(n)} = \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n},$$

$F(t, x, x', \cdots, x^{(n)})$ 是 $t, x, x', \cdots, x^{(n)}$ 的已知函数, 而且一定含有 $x^{(n)}$. 习惯上将一般 n 阶常微分方程写成解出最高阶导数的形式

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}). \tag{1.2.1}$$

本书把 n 阶方程式作为 n 维一阶方程组的特殊情形进行处理, 为区分上述的阶数概念, 我们称方程组中未知函数的个数为它的 "维数". 一般的n **维方程组**形式为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$