考研必备

2020年 李正元·范培华

考研数学

数学

数学一

复习全书习题全解

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

上架建议：考试·考研数学

ISBN 978-7-5620-8792-2

9 787562 087922 >

定价：98.80元

中国政法大学出版社

考研必备

2020年李正元·范培华考研数学

数学

数学一

复习全书习题全解

主编 北 京 大 学 李正元
北 京 大 学 尤承业
北 京 大 学 范培华

中国政法大学出版社

2019·北京

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

附：全书题型训练试题解答

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

第一章　极限、连续与求极限的方法

一、选择题

1. 极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(A)　等于$e^{-\frac{1}{6}}$.　(B)　等于$e^{\frac{1}{6}}$.　(C)　等于e^{-6}.　(D)　不存在.

2. 设$f(x)$在$x=a$处连续,$\varphi(x)$在$x=a$处间断,又$f(a)\neq 0$,则

(A)　$\varphi[f(x)]$在$x=a$处间断.　(B)　$f[\varphi(x)]$在$x=a$处间断.

(C)　$[\varphi(x)]^2$在$x=a$处间断.　(D)　$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$在$x=a$处间断.

3. "$f(x)$在点a连续"是$|f(x)|$在点a处连续的(　　)条件.

(A)　必要非充分　(B)　充分非必要　(C)　充要　(D)　既非充分又非必要

4. 设数列x_n,y_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列正确的是

(A)　若x_n发散,则y_n必发散.　(B)　若x_n无界,则y_n必有界.

(C)　若x_n有界,则y_n必为无穷小.　(D)　若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则y_n必为无穷小.

5. $f(x)=x\sin x$

(A)　在$(-\infty,+\infty)$内有界.　(B)　当$x\to+\infty$时为无穷大.

(C)　在$(-\infty,+\infty)$内无界.　(D)　当$x\to\infty$时有极限.

6. 设$f(x),g(x)$在$x=x_0$均不连续,则在$x=x_0$处

(A)　$f(x)+g(x),f(x)\cdot g(x)$均不连续.

(B)　$f(x)+g(x)$不连续,$f(x)g(x)$的连续性不确定.

(C)　$f(x)+g(x)$的连续性不确定,$f(x)g(x)$不连续.

(D)　$f(x)+g(x),f(x)g(x)$的连续性均不确定.

7. 当$n\to\infty$时$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e$是$\dfrac{1}{n}$的

(A)　高阶无穷小.　(B)　低阶无穷小.　(C)　等价无穷小.　(D)　同阶但非等价无穷小.

8. 设$f(x)=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$,则下列结论

(1)$x=1$为可去间断点.　(2)$x=0$为跳跃间断点.

(3)$x=-1$为无穷间断点.

中正确的个数是

(A)　0.　(B)　1.　(C)　2.　(D)　3.

9. 把当$x\to 0^+$时的无穷小量$\alpha=\tan x-x,\beta=\int_0^x(1-\cos\sqrt{t})\,dt$, $\gamma=\left(\dfrac{2-x^3}{2}\right)^x-1$排列起来,使排在后面的是前一个的高阶无穷小,则正确的排列次序是

(A)　α,β,γ.　(B)　γ,β,α.　(C)　β,α,γ.　(D)　γ,α,β.

10. 在 ① $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^2}}$, ② $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x^3}}$, ③ $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$, ④ $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^3}}$ 中,无穷大量是

(A) ①②. (B) ③④. (C) ②④. (D) ②.

二、填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2\sin\dfrac{1}{x}+2\sin x}{x}=$ ________.

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\tan x}-1}{e^{2x}-1}=3$,则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ________.

3. 设 K,L,δ 为正的常数,则 $\lim\limits_{x\to 0}[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}=$ ________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} ae^{2x}, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$ ________.

5. $1+x^2-e^{x^2}$ 当 $x\to 0$ 时是 x 的________阶无穷小(填数字).

6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$,则 $a=$ ________.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n+\sin n}}=$ ________.

8. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x^3)+xf(x)}{x^6}=3$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2x^2}{x^5}=$ ________.

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)=$ ________.

10. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}=$ ________.

11. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2^x+3^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

12. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}dt=4$,则 $a=$ ______, $b=$ ______.

13. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x<0,\\ 3, & x=0,\\ 3+xe^{\frac{1}{x-1}}, & x>0\end{cases}$ 的连续区间是________.

三、计算题

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{t}{n}+\dfrac{t^2}{2n^2}\right)^{-n}$,$t$ 为常数;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right]$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x^2\cos x-1}{\sin(x^2)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$;

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\displaystyle\int_x^0 e^{2t^2}dt}$;

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\arctan\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$($a,b,c$ 为正的常数);

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$；

(13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x(a_1>0,a_2>0)$；

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right)-\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)\right]$；

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$；

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中 $x_n=\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$；

(17) $\lim\limits_{x\to1}f(x)$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}, & x>1,\\ 0, & x=1,\\ \dfrac{\sin(1-x)+\cos(1-x)-1}{1-x}, & x<1.\end{cases}$

2. 设 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$，$x_1>0$，(Ⅰ) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$；　(Ⅱ) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$.

3. 设 $a>0$ 为常数，$x_n=\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

4. 设 $\lim\limits_{x\to0}(x^{-3}\sin3x+ax^{-2}+b)=0$，试确定常数 a,b 的值.

5. 讨论下列函数的连续性并判断间断点的类型：

(Ⅰ) $y=(1+x)\arctan\dfrac{1}{1-x^2}$；

(Ⅱ) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}-x\right)$；

(Ⅲ) $y=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0;\end{cases}$

(Ⅳ) $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$，$x\in(0,2\pi)$；

(Ⅴ) $y=f[g(x)]$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ 2-x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant1,\\ x+4, & x>1.\end{cases}$

四、证明题

1. 设 $0<x_0<1$，$x_{n+1}=x_n(2-x_n)$，求证：$\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n-1)}=\dfrac{4}{e}$.

3. 设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a}f^*(x)=\lim\limits_{x\to a}g^*(x)=0$，且

$$f(x)\sim f^*(x),\quad g(x)\sim g^*(x)(x\to a).$$

(Ⅰ) 当 $x\to a$ 时无穷小 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可比较，不等价 $\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=r\neq1，或\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty\right)$，求证：

$$f(x)-g(x)\sim f^*(x)-g^*(x)(x\to a);$$

(Ⅱ) 当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $f(x)$ 与 $f^*(x)$ 均为正值，求证：

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}f^*(x)^{g^*(x)}$$

（其中一端极限存在，则另端极限也存在且相等）.

4. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in(a,b)$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为任意 n 个正数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)=\frac{\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\cdots+\alpha_nf(x_n)}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\forall x\in[a,b]$，总 $\exists y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$. 试证：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A>0$，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=+\infty$.

7. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\neq 0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx=A$.

▶ 第二章　一元函数的导数与微分概念及其计算

一、选择题

1. 若极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h^2)-f(a+h^2)}{e^{h^2}-1}=A$，则函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处

(A) 不一定可导.　　(B) 不一定可导，但 $f'_+(a)=A$.

(C) 不一定可导，但 $f'_-(a)=A$.　　(D) 可导，且 $f'(a)=A$.

2. 设有多项式 $P(x)=x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，又设 $x=x_0$ 是它的最大实根，则 $P'(x_0)$ 满足

(A) $P'(x_0)>0$.　(B) $P'(x_0)<0$.　(C) $P'(x_0)\leqslant 0$.　(D) $P'(x_0)\geqslant 0$.

3. 设 $f(x)=3x^2+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ ax+b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，则 a,b 满足

(A) $a=0,b=0$.　　(B) $a=1,b=1$.

(C) a 为 $\forall$ 常数，$b=0$.　　(D) a 为 $\forall$ 常数，$b=1$.

5. 设 $f'(a)>0$，则 $\exists\delta>0$，有

(A) $f(x)\geqslant f(a)\ (x\in(a-\delta,a+\delta))$.

(B) $f(x)\leqslant f(a)\ (x\in(a-\delta,a+\delta))$.

(C) $f(x)>f(a)\ (x\in(a,a+\delta))$，$f(x)<f(a)\ (x\in(a-\delta,a))$.

(D) $f(x)<f(a)\ (x\in(a,a+\delta))$，$f(x)>f(a)\ (x\in(a-\delta,a))$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ \sqrt{-x}, & x<0,\end{cases}$ 则

(A) $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(B) $f'(0)$ 存在.

(C) $f'(0)$ 不 $\exists$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处不 $\exists$ 切线.

(D) $f'(0)$ 不 $\exists$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处有切线.

二、填空题

1. 设 $f(x)=\prod\limits_{n=1}^{2014}\left(\tan\dfrac{\pi x^n}{4}-n\right)$，则 $f'(1)=$ ________.

2. 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的导数存在，则极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)+f(1+2\sin x)-2f(1-3\tan x)}{x}=\text{________}.$$

3. 设 $f'(0)=1,f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}=$ ________.

4. 设 k 为常数，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k-1\right]=$ ________.

5. 设 $y = f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$ 且 $f'(x) = \arctan x^2$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} =$ ________.

6. 设 $y = \sin x^2$，则 $\dfrac{dy}{d(x^3)} =$ ________.

7. 设 $f(x)$ 有任意阶导数且 $f'(x) = f^3(x)$，则 $f^{(n)}(x) =$ ________.

8. 设 $y = \ln(1+x^2)$，则 $y^{(5)}(0) =$ ________.

9. 设 $\begin{cases} x = 1+t^2, \\ y = \cos t, \end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2y}{dx^2} =$ ________.

10. 曲线 $(x-1)^3 = y^2$ 上点 $(5,8)$ 处的切线方程是________.

11. 曲线 $y = \ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为________.

12. 曲线 $\begin{cases} x = 1+t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ 上对应点 $t=2$ 处的切线方程为________.

13. $r = a(1+\cos\theta)$ 在点 $(r,\theta) = (2a,0)$，$\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$(0,\pi)$ 处的切线方程分别为________.

14. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 在点 $M_0(2a,\sqrt{3}b)$ 处的法线方程为________.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\lambda \sin\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的导函数在 $x=0$ 处连续，则整数 λ 的取值为________.

三、计算题

1. 计算下列各题：

（Ⅰ）设 $y = e^{\sin^2 x} + \sqrt{\cos x}\,2^{\sqrt{\cos x}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$；（Ⅱ）设 $y = \sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$；

（Ⅲ）设 $y = \dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)$，其中 $a > b > 0$，求 y'.

2. 计算下列各题：

（Ⅰ）设 $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases}$ 其中 $f(t)$ 三阶可导，且 $f''(t) \neq 0$，求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{d^3y}{dx^3}$；

（Ⅱ）设 $\begin{cases} x = \cos t^2, \\ y = t\cos t^2 - \displaystyle\int_1^t \cos u^2 du, \end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值.

3. 计算下列各题：

(1) 由方程 $x^y = y^x$ 确定 $x = x(y)$，求 $\dfrac{dx}{dy}$；

（Ⅱ）方程 $y^{-x}e^y = 1$ 确定 $y = y(x)$，求 $y''(x)$；

（Ⅲ）设 $2x - \tan(x-y) = \displaystyle\int_0^{x-y} \sec^2 t\,dt$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. 设函数 $f(x)$ 有反函数 $g(x)$，且 $f(a) = 3$，$f'(a) = 1$，$f''(a) = 2$，求 $g''(3)$.

5. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二次可导，令 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leqslant x_0, \\ A(x-x_0)^2 + B(x-x_0) + C, & x > x_0, \end{cases}$

求常数 A,B,C 的值使函数 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二次可导.

6. 把 y 看作自变量，x 为因变量，变换方程 $\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = x$.

7. 设 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性．

▶ 第三章　一元函数积分概念、计算及应用

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 为连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\,\mathrm{d}x$，其中 $t>0,s>0$，则 I 的值

(A) 依赖于 s 和 t．　(B) 依赖于 s,t,x．

(C) 依赖于 t,x，不依赖于 s．　(D) 依赖于 s，不依赖于 t．

2. 下列函数中在 $[-1,2]$ 上定积分不存在的是

(A) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$　(B) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>\dfrac{1}{2},\\ x, & |x|\leqslant\dfrac{1}{2},\\ -x^2+1, & x<-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$　(D) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. 下列函数中在 $[-2,3]$ 不存在原函数的是

(A) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)-x^2}{x^4}, & x\neq 0,\\ -\dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$　(B) $f(x)=\max\{|x|,1\}$．

(C) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}, & x<0.\end{cases}$　(D) $f(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$，$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}(x^2+1), & x<1,\\ \dfrac{1}{3}(x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$

4. 积分 $\int_a^{a+2\pi}\cos x\ln(2+\cos x)\,\mathrm{d}x$ 的值

(A) 与 a 有关．　(B) 是与 a 无关的负数．

(C) 是与 a 无关的正数．　(D) 为零．

5. 设常数 $\alpha>0$，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^\alpha}\mathrm{d}x$，则

(A) $I_1>I_2$．　(B) $I_1<I_2$．

(C) $I_1=I_2$．　(D) I_1 与 I_2 的大小与 α 的取值有关．

6. 下列反常积分中发散的是

(A) $\int_e^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln^k x}\,(k>1)$．　(B) $\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$．

(C) $\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$．　(D) $\int_{-1}^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$．

7. 设 $f(t)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+t^2}\,\mathrm{d}x$，则 $f(t)$ 在 $t=0$ 处

(A) 极限不存在．　　(B) 极限存在但不连续．

(C) 连续但不可导．　　(D) 可导．

8. 设 $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x} f(t)\,\mathrm{d}t$，$f(x)$ 连续，则 $F'(x)=$

(A) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$．　　(B) $f(\ln x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$．

(C) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$．　　(D) $f(\ln x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$．

二、填空题

1. $\int \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$ ________．　　2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}=$ ________．

3. $\int\left(\ln\ln x+\dfrac{1}{\ln x}\right)\mathrm{d}x=$ ________．　　4. $\int \mathrm{e}^{x+\mathrm{e}^x\cos x}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x=$ ________．

5. 设 $f''(x)$ 连续，$f'(x)\neq 0$，则 $\int\left[\dfrac{f(x)}{f'(x)}-\dfrac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}\right]\mathrm{d}x=$ ________．

6. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\,\mathrm{d}x=$ ________．　　7. $\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=$ ________．

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 2x}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 x}}\mathrm{d}x=$ ________．　　9. $\int_0^1 x\arcsin x\,\mathrm{d}x=$ ________．

10. $\int \dfrac{x^{2n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x\ (n\neq 0)=$ ________．　　11. $\int_0^{2\pi}\sin^n x\cos^m x\,\mathrm{d}x$（自然数 n 或 m 为奇数）$=$ ________．

12. $\int_0^a \arctan\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x\ (a>0)=$ ________．

13. 设 $y=f(x)$ 满足 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=0$，则 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$ ________．

14. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，$f(a)=f(b)=0$，且 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=1$，则 $\int_a^b xf(x)f'(x)\,\mathrm{d}x=$ ________．

15. 设 $f(x)$ 具有连续导数，且 $F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)\,\mathrm{d}t$，若当 $x\to 0$ 时 $F'(x)$ 与 x^2 为等价无穷小，则 $f'(0)=$ ________．

16. 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left(\int_0^{\tan^2 y}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y}{x^3}$．

17. 已知 $f(x)=\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=$ ________．

18. $\int_0^{+\infty}x^7\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________．　　19. $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x=$ ________．　　20. $\int_1^{+\infty}\dfrac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x=$ ________．

21. 曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的长度 $L=$ ________．

22. 曲线 $y^2=2x$ 在任意点处的曲率为________．

三、计算题

1. 已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$．　　2. 求 $\int\dfrac{x^4+1}{1+x^6}\mathrm{d}x$．　　3. 求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}$．

4. 求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$．　　5. 求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}$．　　6. 求 $\int_0^1\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4\mathrm{d}x$．　　7. 求 $\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$．

8. 求$\int_0^{e-1}(x+1)\ln^2(x+1)dx$.

9. 求定积分:(Ⅰ)$J=\int_{-2}^{2}\min\{2,x^2\}dx$; (Ⅱ)$J=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt, x\geqslant -1$.

10. 设n为正整数,利用已知公式$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\frac{(n-1)!!}{n!!}I^*$,其中

$I^*=\begin{cases}1, & n\text{为奇数},\\ \frac{\pi}{2}, & n\text{为偶数},\end{cases}$求下列积分:(Ⅰ)$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^n x dx$; (Ⅱ)$J_n=\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx$.

11. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$,且$f(x)=x, x\in[0,\pi)$,求$\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx$.

12. 求无穷积分$J=\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$.

13. 设$f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\leqslant 0,\\ \ln(2x+1), & x>0,\end{cases}$ 求$f(x)$的不定积分$\int f(x)dx$.

14. 设$f'(x)=\arcsin(x-1)^2$, $f(0)=0$,求$\int_0^1 f(x)dx$.

15. 设$a>0$, $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数,求极限

$$\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt.$$

16. 求$\frac{d}{dx}\int_0^{\varphi(x)}[\varphi(x)-t]f(t)dt$,其中$f(t)$为已知的连续函数,$\varphi(x)$为已知的可微函数.

17. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续,在点$x=0$处可导,且$f(0)=0$,令

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$$

(Ⅰ)试求A的值,使$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续;(Ⅱ)求$F'(x)$并讨论其连续性.

18. 设$x\in[0,a]$时$f(x)$连续且$f(x)>0$ $(x\in(0,a])$,又满足$f(x)=\sqrt{\int_0^{x^2}f(\sqrt{t})dt}$,求$f(x)$.

19. 求函数$f(x)=\int_e^x\frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$在区间$[e,e^2]$上的最大值.

四、应用题

1. 求星形线$L: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$所围区域的面积$A$.
2. 求下列旋转体的体积V:

   (Ⅰ)由曲线$y=x^2, x=y^2$所围图形绕x轴旋转所成旋转体;

   (Ⅱ)由曲线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi), y=0$所围图形绕$y$轴旋转的旋转体.
3. 设两点$A(1,0,0)$与$B(0,1,1)$的连线$\overline{AB}$绕z轴旋转一周而成的旋转面为S,求曲面S与$z=0, z=1$围成的立体的体积.
4. 求双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta(a>0)$绕极轴旋转所成的旋转面的面积.
5. 求功:

   (Ⅰ)设半径为1的球正好有一半沉入水中,球的比重为1,现将球从水中取出,问要做多少功?

   (Ⅱ)半径为R的半球形水池,其中充满了水,要把池内的水全部取尽需做多少功?
6. 求引力:

   (Ⅰ)在x轴上有一线密度为常数μ,长度为l的细杆,在杆的延长线上离杆右端为a处有一质量为m

的质点 P，求证：质点与杆间的引力为 $F = \dfrac{kmM}{a(a+l)}$ （M 为杆的质量）.

（Ⅱ）设有以 O 为心，r 为半径，质量为 M 的均匀圆环，$\overline{PO}$ 垂直圆面，$\overline{PO} = b$，质点 P 的质量为 m，试导出圆环对 P 点的引力公式 $F = k\dfrac{mMb}{(r^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$.

7. 过曲线 $y = x^2 (x \geqslant 0)$ 上某点 A 作一切线，使之与曲线及 x 轴围成图形面积为 $\dfrac{1}{12}$，求：（Ⅰ）切点 A 的坐标；（Ⅱ）过切点 A 的切线方程；（Ⅲ）由上述图形绕 x 轴旋转的旋转体的体积 .

8. 设常数 $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$，曲线 Γ：$y = \sqrt{(x-a)(b-x)}\ (x \in [\alpha, \beta])$ 的弧长为 l .

（Ⅰ）求证：$l = \dfrac{b-a}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；（Ⅱ）求定积分 $J = \displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

9. 设 $f(x)$ 为非负连续函数，且满足 $f(x)\displaystyle\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t = \sin^4 x$，求 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的平均值 .

10. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $P(1,2)$，且在该点与圆 $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ 相切，有相同的曲率半径和凹凸性，求常数 a, b, c.

五、证明题

1. 设 $a > 0$，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 连续，求证：

（Ⅰ）$\displaystyle\int_1^a \frac{f(x^2)}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{a^2} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$；（Ⅱ）又设 $f\left(\dfrac{a^2}{x}\right) = f(x)\ (x > 0)$，则 $\displaystyle\int_a^{a^2} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_1^a \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x) \geqslant 0$ 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，求证：在 $[a,b]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

3. 证明 $I_n \xlongequal{\text{记}} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right)$，其中 n 为自然数 .

4. 证明定积分 $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\,\mathrm{d}x > 0$.

5. 证明：（Ⅰ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x$；（Ⅱ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin 2x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$；（Ⅲ）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

6. 证明 $\left|\displaystyle\int_n^{n+p} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$，　其中 $p > 0$.

7. 证明 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x = 0$.

8. 已知一条抛物线通过 x 轴上两点 $A(1,0)$，$B(3,0)$，方程为 $y = a(x-1)(x-3)$，求证：两坐标轴与该抛物线所围成的面积等于 x 轴与该抛物线所围成的面积.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且对任意 $x, y \in [0,1]$ 均有 $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$，$M$ 为正的常数，求证：

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2n}.$$

10. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{*}$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数，求证：

$$\max_{[a,b]} |f(x)| \leqslant \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^4}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处

(A) 不可导.　　(B) 可导且 $f'(a)\neq 0$.

(C) 有极大值.　　(D) 有极小值.

2. 若 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^x$ 且 $f'(0)=0$，$f''(x)$ 在 $x=0$ 连续，则下列正确的是

(A) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

3. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 定义，$x_0\in(a,b)$，则下列命题中正确的是

(A) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 单调增加且可导，则 $f'(x)>0(x\in(a,b))$.

(B) 若 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0)=0$.

(C) 若 $f'(x_0)=0,f''(x_0)=0,f'''(x_0)\neq 0$，则 x_0 一定不是 $f(x)$ 的极值点.

(D) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极值，则 $f'(x_0)=0$.

4. 设 $f(x)$ 可导，恒正，且 $0<a<x<b$ 时恒有 $f(x)<xf'(x)$，则

(A) $bf(a)>af(b)$.　　(B) $abf(x)>x^2f(b)$.

(C) $af(a)<xf(x)$.　　(D) $abf(x)<x^2f(a)$.

5. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f(0)<0$，$f'(x)\geqslant k>0$，则在 $(0,+\infty)$ 内 $f(x)$

(A) 没有零点.　　(B) 至少有一个零点.

(C) 只有一个零点.　　(D) 有无零点不能确定.

6. 曲线 $y=\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 渐近线的条数是

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

7. 曲线 $y=f(x)=-\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{3}{2}(x+1)\ln|x+1|+\dfrac{1}{2}(x-1)\ln|x-1|$ 的拐点有

(A) 1 个.　(B) 2 个.　(C) 3 个.　(D) 4 个.

二、填空题

1. $f(x)=\begin{cases}x^2\ln|x|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的极大值点是 $x=$ ________，极小值点是 $x=$ ________.

2. 曲线 $y=3x+\dfrac{\ln x}{2x}+1$ 的渐近线方程为________.

3. 曲线 $y=\dfrac{9}{14}x^{\frac{1}{3}}(x^2-7)(-\infty<x<+\infty)$ 的拐点是________.

4. 数列 $1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots,\sqrt[n]{n},\cdots$ 的最大项为________.

三、计算题与证明题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x-2, & x>0,\\ xe^x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-e^x, & x\geqslant 0,\\ xe^x, & x<0,\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的极值.

2. 求函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$ 的单调区间，极值点，凹凸性区间与拐点. 3. 作函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的图形.

4. 设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 内可导，$g(x)\neq 0$ 且 $\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=0\quad(\forall x\in(a,b))$. 证明：存在常数 c，使得 $f(x)=cg(x),x\in(a,b)$.

5. 证明：$\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x\in(-\infty,+\infty))$.

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 二次可导且 $f(0)=0,f''(x)<0$. 求证：$\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,a]$ 单调下降.

7. 设 $P(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且为负值，$y=y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，在 $(0,+\infty)$ 满足 $y'+P(x)y>0$ 且 $y(0)\geqslant 0$，求证：$y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加.

8. 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，且对 $\forall x(a\leqslant x\leqslant b)$ 满足 $f''(x)+g(x)f'(x)-f(x)=0$. 求证：$f(x)\equiv 0\quad(x\in[a,b])$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，$f(a)=f(b)$，且 $f(x)$ 不恒为常数，求证：在 (a,b) 内存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

10. 证明方程 $x=a\sin x+b(a>0,b>0$ 为常数) 至少有一个正根不超过 $a+b$.

11. 求证：$e^x+e^{-x}+2\cos x=5$ 恰有两个根.

12. 设当 $x>0$ 时，方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，求 k 的取值范围.

13. 讨论曲线 $y=2\ln x$ 与 $y=2x+\ln^2x+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的交点个数(其中 k 为常数).

14. 证明：$x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x(\forall x>0)$.

15. 已知不等式：当 $x>0$ 时 $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$ (见例 4.23)，求证：$x\in(0,1)$ 时 $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

16. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 可导，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[xf(x)]\leqslant -kf(x)(x>1)$，在 $(1,+\infty)$ 的 $\forall$ 子区间上不恒等，又 $f(1)\leqslant M$，其中 k,M 为常数，求证：$f(x)<\dfrac{M}{x^{k+1}}(x>1)$.

17. 设 $a>e,0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$，求证：$a^y-a^x>(\cos x-\cos y)a^x\ln a$.

18. 设 $0<x_1<x_2$，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 可导，证明：在 (x_1,x_2) 内至少 $\exists$ 一个 c，使得

$$\frac{1}{e^{x_1}-e^{x_2}}\begin{vmatrix} e^{x_1} & e^{x_2} \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix}=f(c)-f'(c).$$

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$，求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

20. 已知以 2π 为周期的周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶导数，且 $f(0)=0$. 设 $F(x)=(\sin x-1)^2f(x)$，证明：$\exists x_0\in\left(2\pi,\dfrac{5\pi}{2}\right)$ 使得 $F''(x_0)=0$.

21. 设 $b>a\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)\neq f(b)$，求证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta).$$

22. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有连续的一阶导数，且 $f'(0)=0$，$f''(0)$ 存在，求证：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f[\ln(1+x)]}{x^3}=\frac{1}{2}f''(0).$$

23. 设有参数方程$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

(Ⅰ) 求证该参数方程确定 $y = y(x)$,并求定义域； (Ⅱ) 讨论 $y = y(x)$ 的可导性与单调性；

(Ⅲ) 讨论 $y = y(x)$ 的凹凸性.

24. 设$f(x) = nx(1-x)^n$(n 为自然数),

(Ⅰ) 求$\max\limits_{[0,1]} f(x)$；(Ⅱ) 求证:$\max\limits_{[0,1]} f(x) < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

25. (Ⅰ) 设$f(x)$在$[x_0, x_0+\delta)$ ($(x_0-\delta, x_0]$) 连续,在$(x_0, x_0+\delta)$ ($(x_0-\delta, x_0)$) 可导,又 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x) = A\right)$,求证:$f'_+(x_0) = A$ $(f'_-(x_0) = A)$.

(Ⅱ) 设$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$连续,在$(x_0-\delta, x_0+\delta)/\{x_0\}$可导,又$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = A$,求证:$f'(x_0) = A$.

(Ⅲ) 设$f(x)$在(a,b)可导,$x_0 \in (a,b)$是$f'(x)$的间断点,求证:$x = x_0$是$f'(x)$的第二类间断点.

26. 设$f(x)$在$(a, +\infty)$内可导,求证:

(Ⅰ) 若$x_0 \in (a, +\infty)$,$f'(x) \geqslant \alpha > 0 (x > x_0)$,则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$；

(Ⅱ) 若$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = A > 0$,则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

27. 证明奇次方程$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \cdots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$一定有实根,其中常数$a_0 \neq 0$.

28. 设$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$可导,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$,求证:$\exists c \in (-\infty, +\infty)$,使得$f'(c) = 0$.

29. 设$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

(Ⅰ) 求$f'(x)$； (Ⅱ) 证明:$x = 0$是$f(x)$的极大值点；

(Ⅲ) 令$x_n = \dfrac{1}{n\pi}$,考察$f'(x_n)$是正的还是负的,n为非零整数；

(Ⅳ) 证明:对$\forall \delta > 0$,$f(x)$在$(-\delta, 0]$上不单调上升,在$[0, \delta]$上不单调下降.

四、最值问题

1. 求函数$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{2}x \ (x \in (-\infty, +\infty))$的最小值.

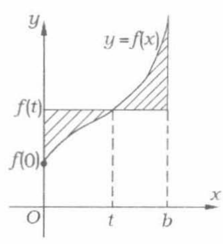
2. 将长为a的一段铁丝截成两段,用一段围成正方形,另一段围成圆,为使两段面积之和最小,问两段铁丝各长多少?

3. 求从点$A(10,0)$到抛物线$y^2 = 4x$的最短距离.

4. 求圆$x^2 + y^2 = 1$的一条切线,使此切线与抛物线$y = x^2 - 2$所围面积取最小值,并求此最小值.

5. 要建一个圆柱形无盖水池,使其容积为$V_0 \mathrm{m}^3$.底的单位面积造价是周围的两倍,问底半径r与高h各是多少,才能使水池造价最低?

6. 设$f(x)$在$[0,b]$可导,$f'(x) > 0$ $(\forall x \in (0,b))$,$t \in [0,b]$,问t取何值时,图中阴影部分的面积最大?最小?



第五章　一元函数的泰勒公式及其应用

1. 求下列函数的带皮亚诺余项至括号内所示阶数的麦克劳林公式:

(Ⅰ) $f(x)=e^x\cos x \quad (x^3)$； (Ⅱ) $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+x-1} \quad (x^3)$；

(Ⅲ) $f(x)=\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$，其中 $a>0 \quad (x^2)$．

2. 求下列函数的带皮亚诺余项的麦克劳林公式：(Ⅰ) $f(x)=\sin^3 x$； (Ⅱ) $f(x)=x\ln(1-x^2)$．

3. 确定下列无穷小量当 $x\to 0$ 时关于 x 的阶数：

(Ⅰ) $f(x)=e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x\sin x$； (Ⅱ) $f(x)=\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)\cos x-1$．

4. 求下列极限：

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$； (Ⅱ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln(1+x)]^2-e^{x^2}+1}{\arctan x-\sin x}$；

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$．

5. 确定常数 a 和 b 的值，使得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=6$．

6. 设 $f(x)=x^2\sin x$，求 $f^{(n)}(0)$．

7. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，又 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{e^{f(x)}-1}=1$，求 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$．

8. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 $n(n\geqslant 2)$ 阶可导，且当 $x\to a$ 时 $f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小，求证：$f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 当 $x\to a$ 时是 $x-a$ 的 $n-1$ 阶无穷小．

9. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处四阶可导，且 $f'(a)=f''(a)=f'''(a)=0$，但 $f^{(4)}(a)\neq 0$，求证：当 $f^{(4)}(a)>0(<0)$ 时 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小(大)值点．

10. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 某邻域有二阶连续导数，曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 有相同的凹凸性．求证：曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处相交、相切且有相同曲率的充要条件是：$f(x)-g(x)=o((x-x_0)^2)(x\to x_0)$．

11. 求 $f(x)=3^x$ 带拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式．

12. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明：$\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{1}{4}(b-a)^2f''(\xi).$$

13. 设 $f(x)$ 为 $n+1$ 阶可导函数，求证：$f(x)$ 为 n 次多项式的充要条件是 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，$f^{(n)}(x)\neq 0$．

14. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 二阶可导且 $f(x)$，$f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界，求证：$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界．

15. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f(x)>0$，$f''(x)<0((x\in(a,b))$，求证：$\max\limits_{[a,b]}f(x)<\dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$．

▶ 第六章　常微分方程

一、选择题

1. 方程 $y'\sin x=y\ln y$ 满足条件 $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$ 的特解是

(A) $\dfrac{e}{\sin x}$． (B) $e^{\sin x}$． (C) $\dfrac{e}{\tan\frac{x}{2}}$． (D) $e^{\tan\frac{x}{2}}$．

2. 设 C,C_1,C_2,C_3 是任意常数，则以下函数可以看作某个二阶微分方程的通解的是

(A) $y=C_1x^2+C_2x+C_3$． (B) $x^2+y^2=C$．

(C) $y=\ln(C_1x)+\ln(C_1\sin x)$． (D) $y=C_1\sin^2x+C_2\cos^2x$．