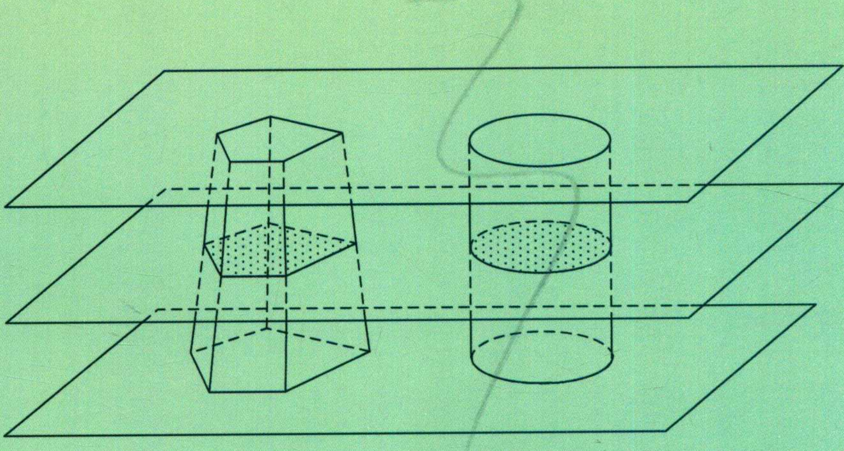
数学分析讲义

（第二册）

◎ 张福保 薛星美 潮小李 编



体积原理 · 祖暅 Zu Geng

科学出版社

数学分析讲义

(第二册)

张福保　薛星美　潮小李　编

科学出版社

内 容 简 介

本书是作者在东南大学连续 20 多年讲授“数学分析”课程的基础上写成的，并已连续试用近 10 年. 本书取名为“讲义”，最大特点就是一切从读者的角度去讲解，既注重数学思想的阐述和严格的逻辑推导，又突出实际背景与几何直观的描述，并适当穿插了一些数学文化的介绍. 在编排上尽量体现先易后难和分步走的原则. 习题分类安排，即分为 A、B、C 三类. 其中, A 类是基本题, B 类是提高题, C 类是讨论题. 本书对讨论题给予更多关注，目的在于帮助学生厘清概念，增强研学与创新能力.

本书分为三册，第一册包括极限、连续、导数及其逆运算(不定积分)，第二册包括实数理论续(含上极限、下极限、欧氏空间)、定积分及多元微积分，第三册包括级数与反常积分(含参变量积分)等.

本书可作为数学、统计学等专业的数学分析教材与参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义. 第二册/张福保，薛星美，潮小李编. —北京：科学出版社，2019.6

ISBN 978-7-03-061607-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… ②薛… ③潮… Ⅲ. ①数学分析 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019) 第 114438 号

责任编辑：胡 凯 许 蕾 曾佳佳 / 责任校对：杨聪敏
责任印制：师艳茹 / 封面设计：许 瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

石家庄继文印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 6 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2019 年 6 月第一次印刷 印张：14 1/4
字数：338 千字

定价：69.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

致 读 者

数学, 始终伴随着人类文明的发祥与发展. 从远古到公元前 6 世纪, 由于计数和土地丈量的需要, 人类开始认识自然数和简单的几何图形. 建于约公元前 2600 年的埃及法老胡夫金字塔, 不仅是建筑史上的奇迹, 其数学方面的成就也很让人称奇. 例如, 它的正方形塔基每边长约 230m, 其正方程度与水平程度的平均误差不超过万分之一. 这个阶段只是数学的萌芽时期. 公元前 6 世纪 Pythagoras (毕达哥拉斯) 学派与“万物皆数论”的出现, 标志着初等数学时期, 或称常量数学时期的到来. 其间出现了 Euclid (欧几里得) 的《几何原本》、Archimedes (阿基米德) 求面积与体积的方法、Apollonius (阿波罗尼奥斯) 的《圆锥曲线论》、Ptolemaeus (托勒密) 的三角学以及 Diophantus (丢番图) 的不定方程等, 逐渐形成了初等数学的主要分支和现在中学数学的主要内容. 17~18 世纪, Newton (牛顿) 与 Leibniz (莱布尼茨) 等的微积分 (数学分析的主要内容) 的发明与发展, 标志着数学发展进入了近代变量数学时期. 而 19 世纪以来, 则可称为现代数学时期.

1. 数学代表了人类文明的理性精神

任何一种值得一提的文明——精神财富的集中体现, 都是要探究真理的, 而其中最基本也是最伟大的真理是有关宇宙与人类自身的真理. 地球、太阳系的谜团, 如太阳的升与落、月亮的圆与缺、奇妙的日蚀与月蚀等, 以及人类的起源、人生的目的与人类的归宿等, 这是我们的先祖们曾经迫切想搞清楚的问题. 在人类文化刚开始萌芽的时期, 人类刚从蒙昧中觉醒, 迷信和原始宗教还控制着人类的精神世界, 直到希腊文化的出现. 古希腊人敢于正视自然、摈弃传统观念. 他们之所以能如此, 是因为他们发现了人类最伟大的发现之一——推理, 知道了人类是有智慧、有思维、能发现真理的, 而不是只能听从“神”的旨意的. 而他们的思维与推理的成功, 数学可谓功不可没. 可以说在这个时期, 数学帮助人类从宗教和迷信的束缚下解放出来, 同时也发展了数学自身. 这个时期数学成就的顶峰就是 Pythagoras 学派的“万物皆数论”与 Euclid 的《几何原本》.

进入中世纪后，在人类探索宇宙奥秘的过程中形成了“地心说”和“日心说”这两种对立的观点. 为了捍卫“日心说”, Kopernik (哥白尼)、Kepler (开普勒)、Galileo(伽利略) 等人前赴后继, 逐步形成了 Kepler 三大定律和 Galileo 惯性定律、自由落体运动等物理定律以及重事实、重逻辑的近代科学. Kepler 指出了行星的运动规律, 可是为什么行星会绕太阳转呢? 支持其运动的动力来自何方? 天上的运动与地上的 Galileo 所描述的运动是内在统一的吗? 当时的人们无法回答这些问题, 只能期待时代伟人的出现. “自然界和自然规律隐藏在黑暗中. 上帝说, 让 Newton 出生吧! 于是一切都是光明. ”(英国文豪 Pope (蒲伯)). 其实, 在 Newton 发明微积分之前, 还有 Descartes (笛卡儿) 发明的坐标系与解析几何、业余数学家之王 Fermat (费马) 的一系列工作以及 Newton 的“死敌”Hooke (胡克) 等一大批伟人的贡献. Newton 自己在和 Hooke 的名利之争中也不得不承认, “如果说我能看得更远一些, 那是因为我站在巨人的肩膀上”(姑且不论他这里所指的巨人是谁). 而

发现哈雷彗星的回归与太阳系的第八颗行星海王星, 更是数学, 特别是微积分作为人类文明理性精神的代表的最经典的诠释. [参见《数学与文化》(齐民友, 2008)]

Engels (恩格斯) 在其《自然辩证法》中就曾经说过:“在一切理论成果中, 未必再有什么像 17 世纪后半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了.” 这也足以看出微积分在人类理性文明中的至高无上的历史地位.

2. 一种科学只有在成功地运用数学时, 才算达到真正完善的地步

按照法国的国际工人运动活动家、工人党创始人之一的 Lafargue (拉法格) 在《忆马克思》一书中的记载, Marx (马克思) 在距今一百多年以前就论断, 一种科学只有在成功地运用数学时, 才算达到真正完善的地步. 现在, 人们已经普遍接受这样的观点:“哲学从一门学科中退出, 意味着这门学科的建立; 而数学进入一门学科, 就意味着这门学科的成熟.”

不仅如此, 更进一步, 从 20 世纪 80 年代开始, 人们已经认识到, 高技术本质上是一种数学技术. 这一观点是美国前总统尼克松的科学顾问 David 于 1984 年 1 月 25 日在美国数学会 (American Mathematical Society, AMS) 和美国数学协会 (Mathematical Association of America, MAA) 联合年会上正式提出的. 其实著名数学家华罗庚在更早的一次学术会议上也提出过这样的观点. 从两弹一星到核武器试验, 再到太空技术, 都离不开数学的现代化. 陈省身与杨振宁的数理合作更是现代科学相互渗透、相互依赖的典范.

现代物理学家 Hawking (霍金) 说过“有人告诉我说我载入书中的每个等式都会让销量减半. 然而, 我还是把一个等式写进书中——爱因斯坦最有名的那个: $E = mc^2$. 但愿这不会吓跑我一半的潜在读者. ”这表明现代自然科学已经离不开数学. 而在社会科学方面, 以往是没有数学的地位的, 现在情况发生了根本变化. 经济、金融甚至政治, 都极大地数学化. 据统计, 近 10 年来, 诺贝尔经济学奖获得者有一半以上有数学学位或履历.

3. 数学分析课程的重要性

数学分析 (mathematical analysis), 又称高等微积分 (advanced calculus), 是变量数学的核心, 同时它也是现代数学的三大分支——分析、代数和几何中的分析学的基础. 数学分析的研究对象是一般的函数, 研究手段主要是极限. 最成功之处在于解决初等数学中无法解决的诸如一般曲线的切线问题和不规则图形 (如曲边梯形) 的面积问题等, 因此在天文、力学、几何以及经济、金融等方面有着广泛的应用.

从学科分类来看, 数学、统计学等都是一级学科, 在数学一级学科下分为五个二级学科: 基础数学, 计算数学, 概率论与数理统计, 应用数学, 运筹与控制论. 目前, 数学学科的研究生专业即按此分类. 而本科数学与统计学科则包含三个专业, 分别是数学与应用数学专业、信息与计算科学专业以及统计学专业.

数学分析是这三个专业的大类学科课程与核心课程, 它对应于非数学专业的高等数学课程 (广义的高等数学则是指除初等数学以外的所有现代数学), 被公认为是这三个专业最重要的基础课程, 位于传统的“三高”(高等微积分、高等代数、高等几何 (解析几何)) 之首, 学分数占大学本科四年总学分的十分之一. 它不仅是数学与统计学专业学生进校后首先面临的一门重要课程, 而且整个大学本科阶段的几乎所有的分析类课程在本质上都

可以看作是它的延伸和应用. 可以这样说, 其重要性无论怎么强调都不过分.

4. 如何学好数学分析

数学分析这门课程内容丰富、逻辑严密、思想方法灵活, 且应用领域又十分广泛, 所以要想学好它, 必须深刻理解其基本概念的思想内涵, 养成善于思考、认真钻研、灵活应用等学习习惯. 首先, 必须认真钻研教材, 并用心研读相当数量的参考书, 其目的是弄清楚主要概念和定理的背景、含义、本质及作用, 避免死记硬背. 常见的参考书有《数学分析》(华东师范大学数学系, 2001)、《数学分析》(陈纪修等, 2004)、《数学分析教程》(李忠和方丽萍, 2008), 起点更高的有《数学分析》(卓里奇, 2006)、*Principles of Mathematical Analysis* (Rudin, 1976) 等. 其次, 为了加深理解, 几何直观是很好的帮手. 但是不能以直观替代严密推导. 思考问题时应避免想当然, 避免以特殊代替一般. 每一步推理或判断都要合乎逻辑、有根有据. 再次, 要有相当强度的基础训练. 训练的目的不仅在于模仿和记忆, 更在于加深理解, 掌握方法. 当然光理解还不够, 要在理解的基础上做到熟练. 学习指导书或习题课教程也是值得大家认真读的, 例如, 《数学分析学习指导书》(吴良森等, 2004)、《数学分析习题课讲义》(谢惠民等, 2003).

数学分析是数学学院学生最先学习的课程, 对尽快适应大学阶段的学习显得很重要. 只要大家按照上面的建议, 并根据自己的实际情况, 多思考、多讨论、多总结, 举一反三, 就一定能练就扎实的分析功底, 并为后继课程的学习打下坚实基础.

5. 关于本书

本书是根据我 20 多年连续讲授“数学分析”课程的实践, 结合泛函分析的教学与科研工作的体会写成的, 并且已经连续使用近 10 年. 本书取名为“讲义”, 其特点就是一切为读者所想, 特别适合初学者. 本书既注重数学思想和严格的逻辑推导, 又突出实际背景与几何直观; 写作语言既严谨又朴实, 并适当穿插数学文化, 提高学生学习兴趣; 尽量体现先易后难的原则, 例如，实数连续性理论的安排、可积性的讨论等都分步走, 便于学生接受; 习题的安排分类分层次，即分为 A、B、C 三类, 其中, A 类是基本题, B 类是提高题, C 类是讨论题. 本书对讨论题给予更多关注, 目的在于帮助学生厘清概念, 这往往是学生的软肋, 同时也能增强研学与创新能力.

按照现在通行的讲授三个学期的现状, 教材分为三册. 但本书的结构体系进行了较大的调整：第一册的内容包括极限、连续、导数及其逆运算 (不定积分), 第二册的内容包括实数理论续 (含上极限与下极限、欧氏空间)、定积分及多元微积分, 第三册的内容包括级数与反常积分 (含参变量积分) 等.

为了尽快接触到微积分的主要内容, 体会到微积分的巨大成功, 同时又照顾到读者学习的便利, 第一册选择尽可能少的实数理论做基础即展开极限与连续以及微分学的讨论, 而把比较复杂的证明 (包括实数等价命题和上、下极限的讨论) 放到第二册开头, 并把欧氏空间理论也放到开头这一章, 作为实数连续性的自然推广. 这样的结构对于为学生打好坚实的数学基础也很有帮助, 也为接下去进行严格的可积性推导奠定基础. 注意到反常积分, 包括反常重积分, 和级数有较多的相似性, 例如都是有限情况取极限以及目标相同：重点研究收敛性, 判别法也类似等, 因此将这两者组合在同一册里也是恰当的, 也将给读

者的学习带来极大便利.

致谢：本教材得到了东南大学数学学院与教务处的大力支持. 薛星美教授在多次使用本教材的基础上对微分学部分进行了完善与补充, 潮小李教授对级数与反常积分部分进行了完善与补充, 罗庆来教授、黄骏教授、徐君祥教授、孙志忠教授、江其保副教授、闫亮副教授等先后对教材提出过宝贵意见, 在此一并表示衷心的感谢!

尽管本书从编写到出版, 经历了 10 年, 其间一直在修改, 但囿于个人的学识与能力, 一定还有不少疏漏和不足, 恳请专家与读者提出宝贵意见, 以便今后修订.

张福保

2019 年 1 月于东南大学九龙湖校区

目　　录

第 7 章　Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$

本章主要包含两个部分的内容. 第一部分是实数理论的续论, 我们将在第 1 章和第 3 章的基础上较为系统地研究实数连续性. 实数连续性是微积分的基石, 但理论性强, 初学者不易接受, 所以本教材分两步走, 在学完了数列与函数极限以及连续与导数等内容后继续研究实数连续性. 这既是对已学知识的巩固与深化, 也为后续定积分与级数的学习做好准备. 本章的第二部分内容是介绍 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$, 这是第一部分内容实数连续性的自然推广, 也为后续多元函数微积分的学习奠定基础.

§7.1　实数连续性 (续)

在第 1 章第 3 节, 我们初步讨论了实数系的连续性, 即从确界原理 (supremum and infimum principle) 出发, 证明了单调有界原理 (monotone bounded principle)、致密性定理 (subsequence theorem) 与 Cauchy 收敛准则 (Cauchy's criterion for convergence). 因此, 确界原理在我们的讨论中处于基础性的地位. 但事实上, 我们将在本节证明这些定理是相互等价的. 不过, 这些定理虽然是等价的, 但它们还是各自反映了实数系性质的不同层面. 例如, 确界原理反映的是实数的连续性, Cauchy 收敛准则反映的是实数的完备性等.

在证明这些定理的等价性之前, 我们还要增加一个新的实数连续性定理 —— 闭区间套定理, 这是实数连续性的一个非常重要的定理, 是对实数连续性的一种新的刻画, 由此还可以证明实数集的一个基本而又重要的事实: 实数集的不可数性.

1. 闭区间套定理 (theorem of nested closed interval)

定义 7.1.1　一列递缩的且长度趋于 0 的闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$, 即它们满足条件

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots, \text{且} \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0, \tag{7.1.1}$$

称为闭区间套. 如图 7.1.1 所示.

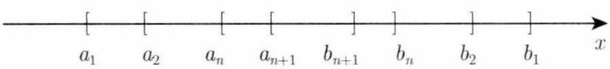


图 7.1.1

定理 7.1.1 (闭区间套定理)　如果闭区间列 $\{[a_n, b_n]\}$ 是个闭区间套, 则存在唯一的实数 ξ 属于所有的这些闭区间, 即

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \quad \xi \in [a_n, b_n], \tag{7.1.2}$$

且

$$\xi = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{7.1.3}$$

证明 由式 (7.1.1) 知, 对任何 $n, p \in \mathbb{N}^+$, 有

$$a_n \leqslant a_{n+p} \leqslant b_{n+p} \leqslant b_n, \tag{7.1.4}$$

且任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 使当 $n > N$ 时, $0 < b_n - a_n < \varepsilon$. 从而, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+p} - a_n| = a_{n+p} - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon,$$

由 Cauchy 收敛准则, 即知 $\{a_n\}$ 收敛.

记 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, 则由 $b_n = a_n + (b_n - a_n)$ 知, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$.

在不等式 (7.1.4) 中, 令 $p \to +\infty$, 即知对任何 $n \in \mathbb{N}^+$, 有 $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$, 即 $\xi \in [a_n, b_n]$.

进一步, 若另有一点 ζ 也属于所有的闭区间 $[a_n, b_n]$, 则 $|\xi - \zeta| \leqslant b_n - a_n \to 0$, 这表明 $\xi = \zeta$. □

注 7.1.1 (1) 闭区间套定理也简称为区间套定理. 但是, 若定理中的区间列不是闭的, 则区间套定理的结论可能不成立. 例如, 考虑开区间列 $\left\{\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right\}$, 或半开区间列 $\left\{\left(0, \dfrac{1}{n}\right]\right\}$.

(2) 区间套定理也可以用单调有界原理来证明, 且更自然, 见习题 7.1. 但为了下面证明实数连续性命题的等价性的方便, 我们利用Cauchy 收敛准则进行证明.

2. 实数集的不可数性

应用区间套定理, 我们来证明实数集的一个重要特性, 即实数集是不可数的 (uncountable). 显然, 只要证明区间 $[0,1]$ 是不可数的.

定理 7.1.2 $[0,1]$ 上的实数全体是不可数的.

证明 用反证法. 假设 $I = [0,1]$ 上的实数全体是可数的, 则不妨假设它们排列如下:

$$I = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

第一步, 将区间 I 三等分为三个闭区间, 则其中至少有一个闭区间不包含 x_1, 记这个闭区间为 I_1. 如果有两个闭区间都不包含 x_1, 为确定起见, 规定取左边的那个区间为 I_1.

第二步, 再将 I_1 三等分, 则必定可确定其中的一个闭区间不包含 x_2, 记其为 I_2. 当然 I_2 也不包含 x_1.

第三步, 以此类推, 我们可以得到一列闭区间 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1}$, 满足 $x_n \notin I_n$, 且 $I_n = [a_n, b_n]$ 的长度 $b_n - a_n = \dfrac{1}{3^n} \to 0$.

第四步, 根据区间套定理, 存在唯一的 $\xi \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}^+$. 由此可见 ξ 与所有的 x_n 都不一样, 因为 $\xi \in I_n$, 而 $x_n \notin I_n$. 但 $\{x_n\}$ 全体就是 $[0,1]$ 中所有实数, 故得矛盾. □

注 7.1.2 根据第 1 章关于集合"势"的概念, 我们知道, 实数集 $\mathbb{R}$ 的势与有理数集 (可数集) 的势是不同的. 可数集的势通常记为 $\aleph_0$ (读作阿列夫零), 而实数集的势记为 $\aleph$ (读作阿列夫), 它也称为是连续统的势. 现在我们知道 $\aleph_0 \neq \aleph$. 可是在 $\aleph_0, \aleph$ 之间还有没有其他的势? 集合论创始人Cantor 确信不存在这种势. 他的猜测成为著名的连续统假设,

位列Hilbert的 23 个问题之首. 1938 年, 奥地利数学家、逻辑学家和哲学家Kurt Gödel(哥德尔, 1906 ~ 1978 年) 证明: 标准集合论与连续统假设是不矛盾的. 1963 年, 美国数学家P. Cohen (保罗 · 科恩, 1934 ~ 2007 年) 证明: 如果否定连续统假设, 这也不与集合论矛盾. 简言之, 连续统假设是由表明它是"不可判定的"来判定的. 这里的情况与平行线 (第五) 公设的独立性是类似的.

对集合势的研究, 可参见通常的实变函数教材, 例如《实变函数与泛函分析基础》(程其襄等, 2010), 也可见著名华裔数学家、菲尔茨奖得主Terence Chi-Shen Tao (陶哲轩) 的《陶哲轩实分析》以及连续统假设方面的科普读物, 可参见《神秘的阿列夫》(阿米尔 · 艾克塞尔, 2008).

3. 实数连续性命题的等价性

总结一下, 到现在为止, 我们已经介绍了以下有关实数连续性的基本定理:

确界原理、单调有界原理、致密性定理、Cauchy 收敛准则、闭区间套定理.

下面我们要证明这五个定理是相互等价的. 关于这个等价性, 前面已完成的证明是

确界原理 $\xRightarrow{\text{定理 2.3.1}}$ 单调有界原理 $\xRightarrow{\text{定理 2.3.3}}$ 致密性定理 $\xRightarrow{\text{定理 2.3.5}}$ Cauchy 收敛准则 $\xRightarrow{\text{定理 7.1.1}}$ 闭区间套定理

因此下面只需要用区间套定理来证明确界原理.

用区间套定理来证明确界原理.

证明 设非空数集 S 有上界, 设 b_1 是它的某个上界. 在 S 中任取一个数, 记为 a_1. 如果 a_1 是 S 的上界, 则证明完成, 否则考虑 $\dfrac{a_1+b_1}{2}$. 如果它是 S 的一个上界, 则令 $a_2 = a_1, b_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, 否则令$a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}, b_2 = b_1$. 这样对区间 $[a_2, b_2]$ 就满足: a_2 不是 S 的上界, 但 b_2 是 S 的上界. 再将 $[a_2, b_2]$ 两等分, 取其中的一个区间, 记为 $[a_3, b_3]$, 使得 a_3 不是 S 的上界, 但 b_3 是 S 的上界. 依此类推, 可得闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$, 具有性质: 所有 a_n 都不是 S 的上界, 但每个 b_n 都是 S 的上界.

由区间套定理知, 存在唯一的 ξ, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^+, \xi \in [a_n, b_n]$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$. 下面我们证明 $\xi = \sup S$.

由于 b_n 总是 S 的上界, 所以对任何 $x \in S$, 都有 $x \leqslant b_n$, 由数列极限的不等式性质知道 $x \leqslant \xi = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 即 ξ 是 S 的一个上界.

其次, 对任何 $\varepsilon > 0$, 可知 n 充分大时必有 $a_n > \xi - \varepsilon$, 又因为 a_n 不是 S 的上界, 所以存在 $x_n \in S$, 使得 $x_n > a_n$. 从而 $x_n > a_n > \xi - \varepsilon$. 因此, 根据上确界的定义知 ξ 即是 S 的上确界. 证明完成. □

本节最后需要说明的是, 此处我们只是采用循环论证的方法证明这些定理的相互等价性, 若要独立地证明其中的某一条，例如证明确界原理，就要涉及更为基础的实数理论. 通常, 人们采用 Dedekind 分割 (Dedekind cuts) 或公理化等办法来处理. 但为简单起见, 本书不再展开这些讨论了.需要详细了解实数理论的读者可参见《微积分学教程》(菲赫金哥尔茨, 1978)、《陶哲轩实分析》(陶哲轩, 2008)、《数学分析》(卓里奇, 2006) 等.

习　题　7.1

A1. 用单调有界原理分别证明确界原理和区间套定理.

A2. 分别用区间套定理和 Cauchy 收敛准则证明单调有界原理.

A3. 用区间套定理证明致密性定理.

A4. 用致密性定理证明 Cauchy 收敛准则.

A5. 设 $\{x_n\}$ 是有界数列, 但不收敛. 证明 $\{x_n\}$ 必有两个收敛子列, 它们的极限不同.

A6. 若 $\{x_n\}$ 是无界数列, 但不是无穷大量. 证明 $\{x_n\}$ 必有两个子列, 其中一个收敛, 一个是无穷大量.

B7. 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是 $\{x_n\}$ 的每个子列 $\{x_{n_k}\}$ 都有一个子列 $\{x_{n_{k_j}}\}$ 收敛于 a.

B8. 设 S 是非空有上界的数集, $\xi = \sup S$, 且 $\xi \notin S$, 则存在 S 中严格递增的数列 $\{x_n\}$ 收敛于 ξ.

C9. 若 $f : [a,b] \to [a,b]$, 且存在常数 $k \in (0,1)$, 使

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|,\ \forall x, y \in [a,b],$$

则称 f 是 $[a,b]$ 上的一个压缩映像, k 称为压缩常数. 证明:

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 x, 即 $f(x) = x$;

(2) 对任意给定的 $x_0 \in [a,b]$, 定义序列 (称为迭代序列)

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$;

(3) 迭代序列满足下列估计:

$$|x_n - x| \leqslant \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n-1}|,\quad |x_n - x| \leqslant \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|.$$

§7.2　数列的上极限与下极限

数列极限在实数连续性甚至整个数学分析中具有重要地位. 我们已经知道, 收敛数列必有界, 但反之未必. 这多少有些遗憾. 本节要更深入地研究数列的收敛问题. 为此要引入比数列极限概念较弱的上极限与下极限的概念, 由此可得结论: 有界数列必存在上极限与下极限, 这将为我们研究有界数列的收敛性带来方便, 同时也为我们今后研究级数收敛性提供更好的工具.

§7.2.1　数列的上极限与下极限的定义

先对有界数列讨论.

1. 数列的极限点

定义 7.2.1　给定有界数列 $\{x_n\}$, 若存在实数 ξ 和 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi,$$

则称 ξ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个**极限点**(limit point).

等价说法, ξ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点, 当且仅当 ξ 的任意邻域中都含有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

例 7.2.1 分别求数列 $\left\{x_n=(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 和 $\left\{y_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$ 的极限点.

解 因为

$$x_{2n}=\frac{2n}{2n+1}\to 1\quad (n\to\infty),$$
$$x_{2n+1}=-\frac{2n+1}{2n+2}\to -1\quad (n\to\infty),$$

所以 $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 的全部极限点为 1 和 -1.

因为

$$y_{8n}=y_{8n+4}=0,\ y_{8n+1}=y_{8n+3}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_{8n+2}=1,$$
$$y_{8n+5}=y_{8n+7}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ y_{8n+6}=-1,$$

所以 $\left\{\sin\dfrac{n\pi}{4}\right\}$ 的全部极限点为 0, $\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},1,-1$.

显然, 有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是其极限点唯一. 由此记 E 是有界数列 $\{x_n\}$ 的所有极限点的集合, 即

$$E=\{\xi|\xi\text{是}\{x_n\}\text{的极限点}\},\tag{7.2.1}$$

则由 Bolzano-Weierstrass 定理知, E 是非空的有界集合. 记

$$H=\sup E,\ h=\inf E,\tag{7.2.2}$$

下面的定理说明 $H, h\in E$, 即

定理 7.2.1 E 中有最大值和最小值, 即

$$H=\max E,\ h=\min E.\tag{7.2.3}$$

证明 当 E 为有限集时, 定理自然成立, 所以不妨设 E 是无限集.

由 $H=\sup E$ 可知, 存在 $\xi_k\in E(k=1,2,\cdots)$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\xi_k=H.$$

取 $\varepsilon_k=\dfrac{1}{k}>0\ (k=1,2,\cdots)$.

因为 ξ_1 是 $\{x_n\}$ 的极限点, 所以在 $O(\xi_1,\varepsilon_1)$ 中有 $\{x_n\}$ 的无穷多个项, 可任取其中的一项, 记为 x_{n_1};

因为 ξ_2 是 $\{x_n\}$ 的极限点, 故在 $O(\xi_2,\varepsilon_2)$ 中有 $\{x_n\}$ 的无穷多个项，任取 $x_{n_2}\in O(\xi_2,\varepsilon_2)$, 且可以不妨设 $n_2>n_1$;

$\cdots\cdots$

因为 ξ_k 是 $\{x_n\}$ 的极限点, 所以在 $O(\xi_k,\varepsilon_k)$ 中有 $\{x_n\}$ 的无穷多个项, 可以取 $n_k > n_{k-1}$, 使得 $x_{n_k}\in O(\xi_k,\varepsilon_k)$;

一般地, 可得到 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$|x_{n_k}-\xi_k|<\frac{1}{k}.$$

于是由三角不等式可得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\lim_{k\to\infty}\xi_k=H,$$

由定义 7.2.1 知, H 是 $\{x_n\}$ 的极限点, 也就是说, $H\in E$.

同理可证 $h\in E$. □

2. 数列的上极限与下极限

定义 7.2.2　E 的最大值, 即 $\{x_n\}$ 的最大极限点 $H=\max E$ 称为数列 $\{x_n\}$ 的**上极限**(upper limit), 记为

$$H=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n, \text{或} H=\limsup_{n\to\infty}x_n. \tag{7.2.4}$$

E 的最小值, 即 $\{x_n\}$ 的最小极限点 $h=\min E$ 称为数列 $\{x_n\}$ 的**下极限**(lower limit), 记为

$$h=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n, \text{或} h=\liminf_{n\to\infty}x_n. \tag{7.2.5}$$

由上面的讨论知, 对有界数列来说, 上 (下) 极限总是存在的 (但极限却未必存在), 这个事实将给我们带来方便, 并且上 (下) 极限与极限有下面的关系.

定理 7.2.2　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在 (且为有限) 当且仅当

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

证明　若 $\{x_n\}$ 是收敛的, 则它的任一子列收敛于同一极限, 即 E 中只有一个元素, 故成立

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

若 $\{x_n\}$ 不收敛, 则至少存在它的两个子列收敛于不同极限, 因此有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n>\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$ □

下面再用 ε-N 语言刻画上、下极限.

定理 7.2.3　设 $\{x_n\}$ 是有界数列, 则

(1) H 是 $\{x_n\}$ 的上极限的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, $x_n<H+\varepsilon$, 并且 $\{x_n\}$ 中有无穷多项 $x_n>H-\varepsilon$.

(2) h 是 $\{x_n\}$ 的下极限的 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$ 的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时, $x_n>h-\varepsilon$, 并且 $\{x_n\}$ 中有无穷多项 $x_n<h+\varepsilon$.

证明　下面只给出 (1) 的证明, (2) 的证明类似.

必要性　由于 H 是 $\{x_n\}$ 的最大极限点, 因此对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 大于或等于 $H+\varepsilon$ 的 x_n 至多只有有限项, 否则就有极限点 $\xi'\geqslant H+\varepsilon$, 这与 H 是 $\{x_n\}$ 的最大极限点矛盾. 设这有限项中最大的下标为 N, 则当 $n>N$ 时, 必有

$$x_n<H+\varepsilon,$$

由于 H 是 $\{x_n\}$ 的极限点, $\{x_n\}$ 中有无穷多项属于 H 的 ε 邻域, 因此这无穷多个项满足

$$x_n>H-\varepsilon,$$

这就完成了证明.

充分性　由条件, 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, $x_n<H+\varepsilon$, 于是对每个收敛子列 $\{x_{n_k}\}$ 来说, 都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}\leqslant H+\varepsilon$, 因此有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant H+\varepsilon$. 由 ε 的任意性可知

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n\leqslant H.$$

又由于 $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $x_n>H-\varepsilon$, 于是 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant H-\varepsilon$, 由 ε 的任意性又可知

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n\geqslant H.$$

结合上述两式, 就得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}x_n=H.$$

□

对无界数列, 类似于广义极限, 我们也有广义的上、下极限的概念.

3. 广义上极限与下极限

定义 7.2.1′　给定数列 $\{x_n\}$, 若存在 $\xi\in[-\infty,+\infty]$, 以及 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi,$$

则称 ξ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个**极限点**. 仍然记 E 为 $\{x_n\}$ 的极限点的集合.

若 $\xi=+\infty$ 为极限点, 则定义数列 $\{x_n\}$ 的**广义上极限** $H=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=\sup E=+\infty$; 而若 $\eta=-\infty$ 为极限点, 则定义数列 $\{x_n\}$ 的**广义下极限** $h=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=\inf E=-\infty$. 特别地, 若 $\xi=+\infty$ 是唯一的极限点, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 则 $H=h=+\infty$. 同样, $\xi=-\infty$ 是唯一的极限点, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, 则 $H=h=-\infty$.

定理 7.2.2′(广义)　上极限与下极限有如下关系:

(1) 极限存在 (可为有限, 或 $+\infty$ 或 $-\infty$) 当且仅当上极限与下极限相等.

(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$.

稍微改变定理 7.2.2 的证明即可证得 (1); 而 (2) 的证明留作习题.

例 7.2.2　求下列数列的上极限和下极限:

(1) $\{x_n=n^{(-1)^n}\}$;　　(2) $\{x_n=-n\}$.