极大平面图理论

（上册：结构-构造-着色）

许 进 著

科 学 出 版 社

极大平面图理论

(上册：结构-构造-着色)

许 进 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

图论作为数学的一个重要分支，已广泛应用于计算机科学、信息科学、生命科学、管理科学等领域。平面图是图论的主体内容。由于诸如四色猜想、唯一 4-色平面图猜想和九色猜想等的研究对象均为极大平面图，故从 1879 年至今，学者们从各种角度展开了对极大平面图的研究。本书系统地介绍极大平面图的结构、构造及着色等相关理论，内容包括：基于放电变换的极大平面图乃至一般平面图的结构特征研究；四色猜想的计算机证明；极大平面图的几种构造方法；极大平面图生成运算系统；极大平面图色多项式递推公式；唯一 4-色极大平面图猜想的研究；极大平面图中 Kempe 变换与σ-特征图理论等。

本书可供图论相关专业的研究人员阅读及参考，也可供计算机科学、信息科学、人工智能、通信工程、生命与医学工程、电路与系统工程等专业的研究人员及学生参考。

图书在版编目（CIP）数据

极大平面图理论．上册，结构-构造-着色 / 许进著．—北京：科学出版社，2019.1

ISBN 978-7-03-060377-7

Ⅰ．①极… Ⅱ．①许… Ⅲ．①平面图 Ⅳ．①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 006148 号

责任编辑：牛宇锋 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：师艳茹 / 封面设计：刘可红

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京通州皇家印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2019 年 1 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2019 年 1 月第一次印刷　印张：23 1/2
字数：456 000

定价：150.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

(一)

数学中的猜想与难题众多，但没有统一标准来衡量其难易程度。一个通常的衡量标准是：从提出到解决，或尚待解决的年限。至于这些猜想与难题的价值，则在于有助解决数学与其他学科中的重要问题，以及现实生活中的实际问题。例如，ABC 猜想可用于丢番图分析，黎曼猜想与哥德巴赫猜想、孪生素数猜想等息息相关，其成果可极大促进对素数特性与分布的研究，进而应用于密码分析与破译之中。四色猜想极大地促进了诸如最大团与最大独立集问题、最小覆盖问题、图的着色理论等的发展，且与唯一 4-色极大平面图猜想、九色猜想等息息相关，其成果可直接应用于如各种调度问题、蛋白质结构预测等 NP-完全问题的研究。

1975 年，在美国伊利诺伊大学召开的一次国际数学会议上，数学家们回顾了七十多年来希尔伯特 23 个问题的研究进展。当时约有一半问题已经解决，另一半中大多数问题也都有重大进展。1976 年，在美国数学家评选的自 1940 年以来美国数学的十大成就中，有三项就是希尔伯特第一、第五、第十问题的解决。由此可见，能解决希尔伯特问题，是当代数学家的无上光荣。希尔伯特问题在过去百年中激发数学家的智慧，指引数学前进的方向，其对数学发展的影响和推动是无法估量的。

在 20 世纪，一些重大数学难题得到完满解决，如费马大定理的证明，有限单群分类工作的完成，从而使数学的基本理论得到空前发展。2000 年克雷数学研究所选定的“千年大奖问题”，其中包括 P-NP 问题、霍奇猜想、庞加莱猜想、黎曼假设、杨-米尔斯理论、纳维-斯托克方程、BSD 猜想。这七大难题的共同特点是具有很强的应用背景。

(二)

在猜想或难题中，有些涉及的知识较深，需要相当的数学功底方能理解。如黎曼猜想，它不仅涉及复变函数的一些知识，还体现了素数分布与复平面上解析变换的深刻联系。

人们常说的数学领域内的三大著名猜想，即费马猜想(费马大定理)、哥德巴赫猜想和四色猜想都属于一说就懂之列。费马猜想和哥德巴赫猜想，即使只具有小学数学基础都不难知其题意。而四色猜想，无数学基础也能明白。这三个猜想

以其通俗易懂的题设，优雅精妙的结论挑战着人类的智慧，成为“家喻户晓”的世界难题。

法国数学家费马在 1637 年提出猜想：当自然数 $n>2$ 时，基于变量 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 无正整数解。费马猜想如此简单易懂，给人以很容易的假象，从此开启了可歌可泣的探寻历程。数学家欧拉、勒让德、狄利克雷、高斯等前赴后继，直到 1995 年终于被维尔斯彻底证明。

哥德巴赫猜想：任一大于 2 的偶数 n 可分解为两个素数之和。该问题的题设只涉及整数分解和四则运算，但是在将近三个世纪的时间里，人们依旧无法找到解决它的有效途径。数学家们不断探索追寻着：维诺格拉多夫证明了三素数定理，陈景润给出了 1+2 的陈氏定理，丰富了数论的内容，推动了数论的发展。

四色猜想：任意地图均可用四种颜色进行着色，使得有共同边界的区域着不同颜色。这个貌似简单的数学猜想却难倒了不少著名的数学家。虽然在 1976 年 Appel 与 Haken 宣布用计算机了给出四色猜想的“证明”，但在数学界，该成果仍不能令人信服。寻求四色猜想的数学证明，仍是一个尚待解决的难题。

(三)

四色猜想的研究对象可归结为极大平面图，极大平面图是所含边数最多的一类平面图，许多著名的猜想和问题都可以归结为对极大平面图的研究，如唯一 4-色平面图猜想、九色猜想以及平面图分解与覆盖等问题。正因为如此，从 1879 年至今，众多学者从各种不同的角度展开了对极大平面图的研究，包括度序列、构造、着色、可遍历性、Hamilton 性、计数、色多项式、生成运算系统、翻转运算、分解与覆盖、生成树和算法等方面。这些问题旨在探索极大平面图的结构与着色之间的关系，有助于探索四色猜想的数学证明。

(四)

许进教授在图论领域造诣深厚，在许多分支有重要贡献，在平面图与着色领域有许多创新成果。《极大平面图理论(上册：结构-构造-着色)》一书将国内外学者在极大平面图的结构、构造及着色等相关理论给予系统介绍与研究，主要包括：研究基于放电变换的平面图的结构特征，完整地介绍四色猜想的计算机证明，给出极大平面图的几种构造方法等，特别是介绍作者在极大平面图理论中四个亮点成果：

第一，给出了不同于已有的极大平面图的构造方法，称为极大平面图的生成运算系统，其优势是可有机地将构造与着色融为一体。

第二，给出了色多项式递推公式，并由此将证明四色猜想的问题转化成对一类特殊的 **4-色漏斗型伪唯—4-色极大平面图**特性的研究，为四色猜想的数学证明

指出了一种新的思路。

第三，唯一 4-色极大平面图猜想是至今没有解决的具有 45 年历史的数学难题，作者将此猜想转化成纯树着色问题的研究，并提出了一个猜想。

第四，对 Kempe 证明四色猜想所用到的核心工具 Kempe 变换进行了更为深入的研究，在此基础上提出了σ-特征图等理论。这些成果揭示了 Kempe 不能证明四色猜想的根本原因——Kempe 变换不能从一个 4-着色导出所有 4-着色。这些成果为四色猜想、唯一 4-色极大平面图猜想等的最终数学证明铺平了道路。

最后，借此机会祝许进教授在此领域取得更大成果，并盼望该书下册尽快完成。

张景中

2018 年 12 月

前　言

1985 年 7 月的一天午休，作为硕士研究生的我，突然想到可以证明四色猜想的一种方法，于是，手心冒汗，无法入睡。下午给导师王自果教授汇报，王老师说，这是百年数学难题，至今没有找到数学证明的思路，不是那么简单，你再好好考虑考虑。到了晚上，我就将自己的想法否定了。但通过这次“冲动”，激发了我对图论的热爱，更激发了一个 20 多岁年轻人“初生牛犊不怕虎”的天性——试图给出四色猜想的数学证明。

研究生毕业后回到母校陕西师范大学数学系任教，成立了一个图论讨论组，每星期讨论一次。我们教研室有 5 位老师参加。在 1991 年的一次讨论班上，我开玩笑式地在黑板上用图的色多项式方法来证明四色猜想。推导着推导着，一个令人惊奇的结果出现了，该结果不仅把四色猜想的证明转化成对可色坐标系图类特性的研究，而且给出了一种将着色与构造融为一体的极大平面图构造方法——极大平面图的扩缩运算系统。这些工作将分别在本书第 6、7 章给予详细介绍。

当时以为可色坐标系的图有两类：唯一 4-色极大平面图与拟唯一 4-色极大平面图。易证后者是可分极大平面图，故不予考虑。而对唯一 4-色极大平面图，很快猜想：只有递归极大平面图，且递归极大平面图是 4-色的。于是，乐观地认为，四色猜想就要被数学证明了。事实并非如此：第一，可色坐标系的图中，还存在当时未被发现的一类，后来我将其命名为伪唯一 4-色极大平面图，而要弄清楚此类图的特征，比唯一 4-色极大平面图还困难；第二，唯一 4-色极大平面图是递归极大平面图并非我先发现，是一个至今尚待解决的猜想！

从 1991 年到 2009 年，整整 18 年，我“转战东南西北”，先后工作于陕西师范大学、西安电子科技大学、华中科技大学、北京大学，致力于唯一 4-色极大平面图猜想的证明，遗憾的是，颗粒无收。我几乎放弃对它的证明，但还是不甘心地默默期盼奇迹发生。

2009 年 5 月 4 日上午，我又在燕北园家里琢磨唯一 4-色极大平面图猜想的证明，恩师余道衡教授突然来到我家，躲闪不及，我只能如实交代研究四色猜想的秘密。他惊奇地发现我 1991 年给出四色猜想“证明”的 43 页手稿，并殷切希望我能继续坚持。余教授的鼓励又激发了我证明四色猜想的勇气和胆量。

经过几个月的系统整理与思考，我认识到欲解决百年数学难题，无捷径，必须摸清它的对象特征。哥德巴赫猜想、孪生数猜想为什么至今没有解决，原因很

简单，就是数学界至今对素数家族没有弄清楚，四色猜想至今没有给出数学证明，同样的道理，是没有对极大平面图的家族搞清楚！欲给出四色猜想的数学证明，必须弄清楚极大平面图的“五脏六腑”。

2009 年至今，我对极大平面图从三个方面展开研究：结构与构造、着色运算、色坐标系。构造的目的是从不同的角度知道每个极大平面图是从何处来，它的“祖先”是谁？它能产生多少个“孩子”，特别是应该与着色紧密关联；着色运算，意在从一个着色出发，导出该图的所有着色；色坐标系理论，意在刻画可色坐标系图的基本特征。换言之，即解决唯一 4-色极大平面图猜想，并给出伪唯一 4-色极大平面图的特征。本书上、下两册围绕着这三个方面展开，其中上册的具体章节内容简介如下：第 1 章主要给出书中所用的一些最基本的定义、记号与理论，特别给出平面图的一些相关的基本理论，如著名的 Kuratowski 定理、平面测试算法等。第 2 章以放电变换为工具研究平面图的结构特征。第 3 章介绍用计算机证明四色猜想的原理，主要包括 Heesch、Haken 及 Simon 等的工作。第 4 章主要给出同阶极大平面图的一种构造方法——边翻转运算，证明任意两个同阶极大平面图可通过有限次边翻转运算相互转化，并给出了所需边翻转次数的界。第 5 章给出异阶极大平面图的构造方法——递归生成运算，即基于小阶数的极大平面图，通过一组算子，来构造所需的极大平面图。第 6 章给出一种将结构与着色融为一体的构造方法——生成运算系统，有助于四色猜想的数学证明。第 7 章给出求解极大平面图色多项式的一种递推公式，基于该公式，得到证明四色猜想的两种思路。第 8 章相继深入研究哑铃极大平面图与递归极大平面图的结构与特性，结合第 6 章的扩缩运算，给出证明唯一 4-色极大平面图猜想的一种思路。第 9 章重点介绍 Kempe 变换、刻画所有着色之间关联关系的σ-特征图、非 Kempe 图的 3 种类型等。Kempe 变换是 Kempe “证明”四色猜想的精髓。其功能是：从极大平面图中的一个 4-着色导出另一个 4-着色。Kempe 用该变换未能证明四色猜想的根本原因是：存在大量的不能从一个 4-着色导出所有 4-着色的极大平面图。虽然如此，由于图顶点着色问题是一个困难的 NP-完全问题，故从 1879 年至今的 130 多年来，Kempe 变换一直是平面图、非平面图着色理论、算法与应用研究中的基本工具。

附录 A 具体给出了 6～12-阶 $\delta \geqslant 4$ 的极大平面图的结构。附录 B 给出了 6～12-阶 $\delta \geqslant 4$ 的非可分极大平面图的全部着色，以及部分非可分极大平面图的σ-特征图，以进一步明确该极大平面图是纯圈型、纯树型还是混合型，是否具有 2-色不变圈。作者以为，两个附录是深入研究极大平面图很有用的工具。

本书在完成过程中，与北京大学余道衡教授、中国科学院的王建方研究员、西北师范大学姚兵教授和陈祥恩教授、山东大学吴建良教授等进行了多次有益的

讨论，在此一并表示感谢。

此外，我的几位学生付出了辛勤劳动，使得本书按时交稿，他们是朱恩强、李泽鹏、刘小青、王宏宇、周洋洋、赵栋杨、马明远、苏静等，在此一并表示感谢。

在本书完成过程中，北京大学信息科学技术学院诸多领导、专家、同事均给予大力鼓励与支持，包括杨芙清院士、王阳元院士、何新贵院士、梅宏院士、黄如院士、屈婉玲教授、王捍贫教授、曹永知教授、刘田副教授、边凯归副教授等。在此对他们表示衷心的感谢！衷心感谢我的几位恩师对我多年的培养，他们是保铮院士、汪应洛院士、陈开国教授、王国俊教授、王自果教授、魏显荪教授、王朝瑞教授、王建方研究员、张福基教授、张忠辅教授等。

本书出版得到国家自然科学基金(项目批准号：61672050、61672051)的资助。

限于作者水平，书中难免存在不妥之处，敬请广大读者批评指正。

目　　录

第1章 图论基础

本章主要给出书中所用的一些最基本的定义、记号与理论；特别给出平面图的一些相关的基本理论，如著名的Kuratowski定理、平面测试算法等。

1.1 图的定义与类型

我们用$X^{(k)}$表示非空集X的所有k-元子集构成的集族，$k\geqslant 2$。基于此，给出图的定义：设V是一个非空子集，$E\subseteq V^{(2)}$，则把2-元有序对(V,E)称为一个**图**，记作G，并把V称为图G的**顶点集**，E称为图G**边集**；V中的每个元素称为图G的**顶点**，E中的每个元素称为图G的**边**。设$\{u,v\}\in E$，通常用$uv\triangleq e$来代替$\{u,v\}$，称顶点u与顶点v**相邻**；并称顶点u(或v)与边e(相互)**关联**。

设$v\in V(G)$，用$N_G(v)$或$N(v)$表示在图G中所有与顶点v相邻的顶点构成的集合，称为v的**邻域集**。图G中的两条边e_1,e_2称为**相邻的**，如果它们关联于同一个顶点，设$V'\subseteq V$，如果V'中的任意一对顶点均不相邻，则称V'是G的一个**独立集**。类似地，设$E'\subseteq E$，若E'中的任意一对边均不相邻，则称E'是G的**匹配集**，或称为G的**边独立集**。

注1 在集合的定义中，元素不允许重复，因此，V与E中均无重复的元素，且$V^{(2)}$为无序2-元子集构成的集族。这就意味着：①E中没有重复的边；②E中的每一条边$e=uv$中的两个关联顶点不同；③$e=uv=vu$。故把上述所定义的图也称为**简单无向图**。

若V与E中的元素均为有限的，则G称为**有限图**；否则，称为**无限图**。本书所言之图皆指有限图。通常定义$|V|=n$，称为图G的**阶**，$|E|=m$称为图G的**规模**，并把具有n个顶点，m条边的图称为(n,m)-**图**。

若将一个图G在平面上用一几何图形来表示：其顶点用一个小圆点(以后简称为点)表示，若在G中顶点u与v相邻，则在u与v之间连接一条线。这种将一个图画在平面上的方法称为G的**图解**。用图解表示一个图的这种图形表示法，使人们更能直观、清晰地认识到图的结构，有助于理解图的许多性质。这也是图论魅力所在。

设$G=(V,E)$是一个n-阶图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$。若$E=V^{(2)}$，则称G为**n-阶**

完全图，记作 K_n，如图 1.1(a)和(b)给出了 K_4 的两种不同的图解。完全图的特征是：每对顶点均相邻。与完全图恰恰相反的是：每对顶点均不相邻，称为空图。确切定义如下：

设 G 是一个 n-阶简单图。如果 $E(G)=\varnothing$ (空集)，则称 G 为 **n-阶空图**，也称 **n-阶零图**，记作 N_n，在不考虑顶点数时，通常称为**空图**或**零图**。

若 $E=\{v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n, v_nv_{n+1}\}$，则称 G 为 **n-长路**或 **n-路**，记作 P_{n+1}，P_{n+1} 可记为 $v_1v_2\cdots v_{n+1}$，如图 1.1(c)给出了 P_4 的一个图解；若 $E=\{v_1v_2, v_2v_3, \cdots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$，则称 G 为 **n-圈**，记作 C_n，C_n 可表示为 $v_1v_2\cdots v_n$，如图 1.1(d)给出了 C_4 的一个图解。一个图 G 称为**二部图**，如果它的顶点集可以分解为两个非空子集 X 和 Y，使得每条边都有一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中，记为 $G[X,Y]$。

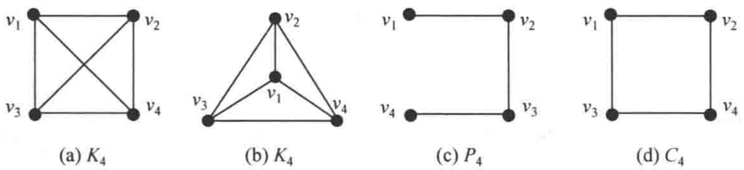


图 1.1 K_4、P_4 和 C_4 的图解

注 2 一个图的图解，其顶点不论大小、圆扁、空心还是实心，边不论长短、粗细、曲直。但在图解中，尽可能让两条边在平面上不相交。

例 1.1 设 $G=(V,E)$ 是一简单图，顶点集为 $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$，$E=\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1, v_6v_8, v_8v_{10}, v_{10}v_7, v_7v_9, v_9v_6, v_1v_6, v_2v_7, v_3v_8, v_4v_9, v_5v_{10}\}$，此图是著名的**彼得松**(Peterson)**图**。图 1.2(b)和(c)分别给出了该图的两种不同的图解。

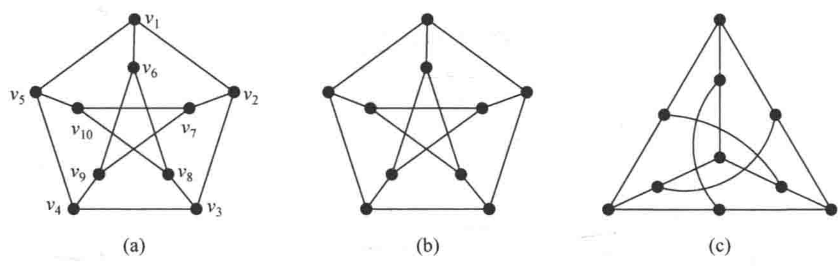


图 1.2 彼得松图

若对 V 中每个顶点标名称，则称 G 为**标定图**；否则，称为**非标定图**。图 1.2(a)所示的图为标定图，图 1.2(b)和(c)所示的图均为非标定图。

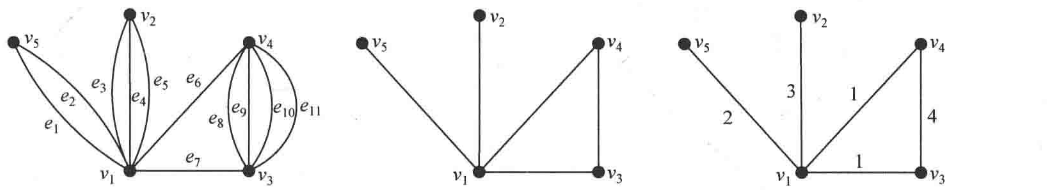
在简单图的定义中，边集 E 中的元素是互不相同的，即**边互不相同**。如果删去这个限制，即**允许有相同元素**，这样导致图 $G=(V,E)$ 中一对顶点之间可能有

$i(>1)$ 条边，称为 i **-重边**。我们把具有重边的图称为**重图**。更详细的论述如下。

将 $V^{(2)}$ 扩展成一个新的集合：允许其含重复元素，所形成的集族，记作 $V_{=}^{(2)}$。把 2-元有序对 $(V,E_{=})$ 称为一个**重图**，记作 $G_{=}$，其中 $E_{=}\subseteq V_{=}^{(2)}$，并把重复出现的元素称为**重边**。

例 1.2　设 $G_{=}=(V,E_{=})$ 是一重图，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E_{=}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11}\}$，$e_1=e_2=v_1v_5$，$e_3=e_4=e_5=v_1v_2$，$e_6=v_1v_4$，$e_7=v_1v_3$，$e_8=e_9=e_{10}=e_{11}=v_3v_4$。重图 $G_{=}$ 的一个图解如图 1.3(a)所示。

重图 $G_{=}$ 的**基础图**，记作 $M(G)$，是一个基于 $G_{=}$ 的简单图：顶点集 $V(M(G))=V(G_{=})$，且 $V(M(G))$ 中任意一对顶点相邻当且仅当该对顶点在 $G_{=}$ 中至少有一条边相连。如图 1.3(a)所给出的重图 $G_{=}$ 的基础图是 $M(G)=(V',E')$，$V'=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$，$E'=\{v_1v_5,v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_3v_4\}$，它的图解如图 1.3(b)所示。



(a) $G_{=}$　(b) $M(G)$　(c) 边赋权图

图 1.3　一个重图 $G_{=}$、基础图 $M(G)$ 及它的边赋权图

在简单图与重图的定义中，任意边 $e=uv$ 所关联的两个顶点不同，即 $u\neq v$。如果去掉这个限制，即一条边可以关联同一个顶点，把这种边称为图的**自环**，并把含有自环的图称为**伪图**。确切地讲，在简单图或重图中，将 $V^{(2)}$ 或 $V_{=}^{(2)}$ 扩展成一个新的集合：允许含 $\{\{v_1,v_1\},\{v_2,v_2\},\cdots,\{v_n,v_n\}\}$ 中的一个或多个元素，所形成的集族记作 $V_{\mathrm{O}}^{(2)}$，并把 2-元有序对 (V,E_{O}) 称为一个**伪图**，记作 G_{O}，其中 $E_{\mathrm{O}}\subseteq V_{\mathrm{O}}^{(2)}$，元素 $\{v_i,v_i\}$，$1\leqslant i\leqslant n$ 称为**自环**。

例 1.3　图 $G_{\mathrm{O}}=(V,E_{\mathrm{O}})$ 是一个伪图，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$E_{\mathrm{O}}=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$，在 E_{O} 中 $e_5=v_3v_3$ 与 $e_6=v_4v_4$ 均为自环，如图 1.4 所示。

注 3　在重图中，边集 $E_{=}$ 中必含重边；在伪图中，边集 E_{O} 中必含自环。

在重图中，如果把关联同一对顶点的边的数目，在它对应基础图的边上标出来，则相当于给边赋权值，如图 1.3(a)所示的重图 $G_{=}$，在其基础图 $M(G)$ 上对应的边赋权后所得图为边赋权图，其中边 e 的赋权记作 $w(e)$。如图 1.3(c)所示赋权图，其中

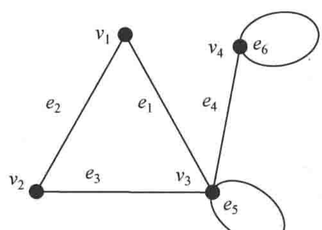


图 1.4　一个含自环的图

$w(v_1v_5)=2$，$w(v_1v_2)=3$，$w(v_1v_3)=w(v_1v_4)=1$，$w(v_3v_4)=4$，这些权值分别表示图1.3(a)所示重图中顶点之间相连边的数目。

更一般地，所谓**边赋权图**，可用一个 3-元有序组来描述，即$(V,E,w(e))$，其中，V 和 E 与简单图中的定义一致，分别表示图的顶点集和边集，$w(e)\triangleq(w(e_1),w(e_2),\cdots,w(e_m))$ 称为**赋权向量**，其中 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，$e_i\in E$，$w(e_i)$ 是 e_i 的边赋值，$1\leqslant i\leqslant m$。按此定义，图 1.3(c)所示的边赋权图 $(V,E,w(e))$ 中 $w(e)=(3,1,1,2,4)$，其中边的次序为 $(v_1v_2,v_1v_3,v_1v_4,v_1v_5,v_3v_4)$。

边赋权图具有良好的应用背景，如交通网络，顶点表示城市，边表示两个城市之间是否有公路、铁路、航线或航海线等，边的权值则表示两个城市之间的距离(包括公路距离、铁路距离、航行距离和航海距离等)。

再如生物神经网络，记作 N_B，$N_B=(V,E,w(e))$。其中 V 表示一个生物体(如人)的全体神经元构成的集合，E 表示两个神经元之间的突触构成的集合，$w(e)$ 表示一个突触的**厚度**，即两个神经元之间连接的强度等。人脑约有 10^{12} 个神经元，以及 $10^{15}\sim10^{16}$ 个突触，但关于突触的厚度研究较少，即权值之间的研究较少。这方面的深入研究对脑科学的研究至关重要。

边赋权图在诸如植物代谢网络、基因网络、电网络、软件漏洞网络等均有直接应用。

类似于边赋权图，下面给出点赋权图的定义：一个 3-元有序组 $(V,E,w(v))$ 称为一个**点赋权图**，其中 $G=(V,E)$ 是一简单图，$w(v)=(w(v_1),w(v_2),\cdots,w(v_n))$ 是 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 的**顶点赋权向量**，$w(v_i)$ 是顶点 v_i 的权值，$i=1,2,\cdots,n$。

图 1.5 所示的图是一个点赋权图，其中 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_{12}\}$，$w(v)=(1,2,3,4,1,3,2,4,1,4,3,2)$。注意到 G 中每个顶点的赋权值为1,2,3,4，且每条边的两端权值不同，因此，这种点赋权可视为对该图的**顶点着色**，其中权值代表颜色，颜色集合为$\{1,2,3,4\}$。

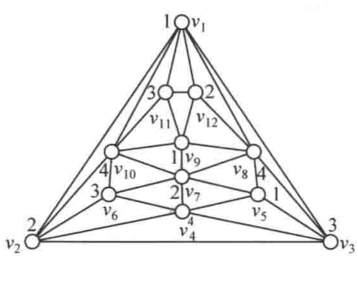


图 1.5　点赋权图

同边赋权图的应用一样，点赋权图也具有良好的应用背景，如交通信号灯的设计问题、各种调度问题、航线规划问题等，其详细应用方法可在一些图论书中找到。

更具有广泛应用背景的赋权图是对一个简单图 $G=(V,E)$ 的顶点与边同时赋权的图，称为**混合型赋权图**，通常简称为**赋权图**，它是一个 4-元组 $(V,E,w(e),w(v))$，其中 $G=(V,E)$ 是一简单图，$w(e)$ 与 $w(v)$ 分别是定义在 E 与 V 上的赋权向量，与前述边赋权图中的 $w(e)$，以及点赋权上的 $w(v)$ 相同，这里不再赘述。