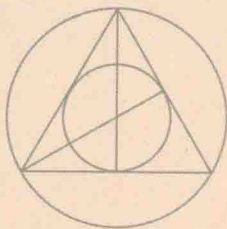
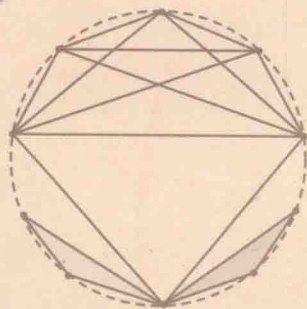
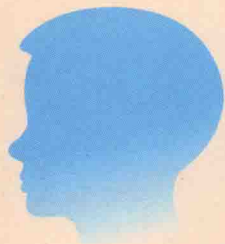


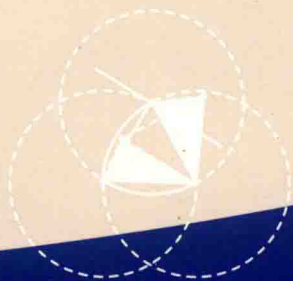
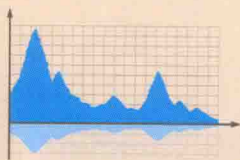
中学生数学思维方法丛书



冯跃峰 著

2

考察极端



中国科学技术大学出版社

中学生数学思维方法丛书

2

考察极端

冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了数学思维方法的一种形式:考察极端.其中许多内容都是本书首次提出的.比如,取极端破坏反面性质、取极端改进“拟对象”、分界极端、二色链、相关元、累次极端、“多维”极端等,这是本书的特点之一.本书首次用“考察极端”来代替“极端性原理”的表述,旨在强调如何对极端情形进行考察,进而获得解决一般问题的途径.书中选用了一些数学原创题,这些问题难度适中而又生动有趣,有些问题还是第一次公开发表,这是本书的另一特点.此外,书中对每一个问题,并不是直接给出解答,而是详细分析如何发现其解法,这是本书的又一特点.

本书适合高等院校数学系师生、中学数学教师、中学生和数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

考察极端/冯跃峰著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2015.11
(中学生数学思维方法丛书)

ISBN 978-7-312-03795-5

I. 考… II. 冯… III. 中学数学课—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 257879 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
<http://shop109383220.taobao.com>

印刷 合肥市宏基印刷有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 880 mm×1230 mm 1/32

印张 9.5

字数 246 千

版次 2015 年 11 月第 1 版

印次 2015 年 11 月第 1 次印刷

定价 28.00 元

序

问题是数学的心脏,学数学离不开解题.我国著名数学家华罗庚教授曾说过:如果你读一本数学书,却不做书中的习题,那就犹如入宝山而空手归.因此,如何解题,也就成为了一个千古话题.

国外曾流传着这样一则有趣的故事,说的是当时数学在欧几里得的推动下,逐渐成为人们生活中的一个时髦话题(这与当今社会截然相反),以至于托勒密一世也想赶这一时髦,学点数学.虽然托勒密一世见多识广,但在学数学上却很吃力.一天,他向欧几里得请教数学问题,听了半天,还是云里雾里不知所云,便忍不住向欧几里得要求道:“你能不能把问题讲得简单点呢?”欧几里得笑着回答:“很抱歉,数学无王者之路.”欧几里得的意思是说,要想学好数学,就必须扎扎实实打好基础,没有捷径可走.后来人们常用这一故事讥讽那些凡事都想投机取巧之人.但从另一个角度想,托勒密一世的要求也未必过分,难道数学就只能是“神来之笔”,不能让其思路来得更自然一些吗?

记得我少年时期上学,每逢学期初发新书的那个时刻是最令我兴奋的,书一到手,总是迫不及待地看看书中有哪些新的内容,一方面是受好奇心的驱使,另一方面也是想测试一下自己,看能不能不用老师教也能读懂书中的内容.但每每都是失望而终:尽管书中介绍的知识都弄明白了,书中的例题也读懂了,但一做书中的练习题,却还





是不会.为此,我曾非常苦恼,却又万思不得其解.后来上了大学,更是对课堂中老师那些“神来之笔”惊叹不已,严密的逻辑推理常常令我折服.但我未能理解的是,为什么会想到这么做呢?

20世纪中叶,美国数学教育家 G. Polya 的数学名著《怎样解题》风靡全球,该书使我受益匪浅.这并不是说,我从书中学到了“怎样解题”,而是它引发了我对数学思维方法的思考.

实际上,数学解题是一项系统工程,有许许多多的因素影响着它的成败.本质的因素有知识、方法(指狭义的方法,即解决问题所使用的具体方法)、能力(指基本能力,即计算能力、推理能力、抽象能力、概括能力等)、经验等,由此构成解题基础;非本质的因素有兴趣、爱好、态度、习惯、情绪、意志、体质等,由此构成解题的主观状态;此外,还受时空、环境、工具的约束,这些构成了解题的客观条件.但是,具有扎实的解题基础,且有较好的客观条件,主观上也做了相应的努力,解题也不一定能获得成功.这是因为,数学中真正标准的、可以程序化的问题(像解一元二次方程)是很少的.解题中,要想把问题中的条件与结论沟通起来,光有雄厚的知识、灵活的方法和成功的解题经验是不够的.为了判断利用什么知识,选用什么方法,就必须对问题进行解剖、识别,对各种信息进行筛选、加工和组装,以创造利用知识、方法和经验的条件.这种复杂的、创造性的分析过程就是数学思维过程.这一过程能否顺利进行,取决于思维方法是否正确.因此,正确的思维方法亦是影响解题成败的重要因素之一.

经验不止一次地告诉我们:知识不足还可以补充,方法不够也可以积累,但若不善思考,即使再有知识和方法,不懂得如何运用它们解决问题,也是枉然.与此相反,掌握了正确的思维方法,知识就不再是孤立的,方法也不再是呆板的,它们都建立了有血有肉的联系,组成了生机勃勃的知识方法体系,数学思维活动也就充满了活力,得到了更完美的发挥与体现.



G. Polya 曾指出,解题的价值不是答案本身,而在于弄清“是怎样想到这个解法的”,“是什么促使你这样想、这样做的”.这实际上都属于数学思维方法的范畴.所谓数学思维方法,就是在基本数学观念系统作用下进行思维活动的心理过程.简单地说,数学思维方法就是找出已有的数学知识和新遇的数学问题之间联系的一种分析、探索方法.在一般情况下,问题与知识的联系并非是显然的,即使有时能在问题中看到某些知识的“影子”,但毕竟不是知识的原形,或是披上了“外衣”,或是减少了条件,或是改变了结构,从而没有现成的知识、方法可用,这就是我在学生时代“为什么知识都明白了,例题也看懂了,还是不会做习题”的原因.为了利用有关的知识和方法解题,就必须创造一定的“条件”,这种创造条件的认识、探索过程,就是数学思维方法作用的过程.

但是,在当前数学解题教学中,由于“高考”指挥棒的影响,教师往往只注重学生对知识方法掌握的熟练程度,不少教师片面地强调基本知识和解决问题的具体方法的重要性,忽视思维方法方面的训练,造成学生解决一般问题的困难.为了克服这一困难,各种各样的、非本质的、庞杂零乱的具体解题技巧统统被视为规律,成为教师谆谆告诫的教学重点,学生解题也就试图通过记忆、模仿来补偿思维能力的不足,利用胡猜乱碰代替有根据、有目的的探索.这不仅不能提高学生的解题能力,而且对于系统数学知识的学习,对于数学思维结构的健康发展都是不利的.

数学思维方法通常又表现为一种解题的思维模式.例如,G. Polya就在《怎样解题》中列出了一张著名的解题表.容许我们大胆断言,任何一种解题模式均不可能囊括人们在解题过程中表现出来的各种思维特征,诸如观察、识别、猜想、尝试、回忆、比较、直觉、顿悟、联想、类比、归纳、演绎、想象、反例、一般化、特殊化等.这些思维特征充满解题过程中的各个环节,要想用一个模式来概括,那就像用

数以千计的思维元件来构造一个复杂而庞大的解题机器.这在理论上也许是可行的,但在实际应用中却很不方便,难以被人们接受.更何况数学问题形形色色,任何一个模式都未必能适用所有的数学问题.因此,究竟如何解题,其核心内容还是学会如何思考.有鉴于此,笔者想到写这样一套关于数学思维方法的丛书.

本丛书也不可能穷尽所有的数学思维方法,只是选用一些典型的思维方法为代表做些介绍.这些方法,或是作者原创发现,或是作者从一个全新的角度对其进行了较为深入的分析与阐述.

囿于水平,书中观点可能片面武断,错误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2015年1月

目 录

序	(i)
1 目标极端	(001)
1.1 原始元极端	(001)
1.2 复合元极端	(017)
1.3 特征值极端	(026)
习题 1	(035)
习题 1 解答	(037)
2 相关极端	(044)
2.1 条件相关极端元	(044)
2.2 目标相关极端元	(060)
2.3 整体相关极端元	(073)
习题 2	(090)
习题 2 解答	(094)
3 分界极端	(119)
3.1 序列分界	(119)
3.2 状态分界	(127)
3.3 划分序列	(132)



3.4 二色链	(139)
习题 3	(151)
习题 3 解答	(152)
4 优化假设	(160)
4.1 取极端元破坏反面性质	(160)
4.2 取极端元满足目标要求	(173)
4.3 取极端元改进“拟对象”	(183)
习题 4	(188)
习题 4 解答	(191)
5 累次极端	(206)
5.1 依次取极端	(206)
5.2 “多维”极端	(217)
习题 5	(233)
习题 5 解答	(234)
6 极端构造与否定	(244)
6.1 极端构造	(244)
6.2 极端否定	(274)
习题 6	(283)
习题 6 解答	(285)

1 目标极端

某些数学现象或结论“常常”是研究对象处于一种“极端状态”，比如最大、最小、最长、最短、最远、最近、最迟、最早、位于边界等的情况下发生，这一规律常被称为极端性原理。

显然，极端性原理可以用于解决某些存在性问题，但有以下两点需要注意：一是如何找到“极端状态”，它是运用极端性原理的关键之一。二是由极端性原理得到的结论并不是必然结果，它往往是一个“猜想”，我们还需要对猜想进行证明，其手段通常都是采用反证法，即找到一个新的对象，与极端对象矛盾。但如何找到新对象与极端对象矛盾，这便是运用极端性原理的另一关键所在。

因此，我们这里着重介绍的就是如何找到极端状态，以及如何找到新对象与极端对象矛盾这两个关键环节上的一些思考方法。

本章介绍其思考方法之一：根据目标的特征，直接找极端元，我们称之为目标极端，它是运用极端性原理的最简单情形。一般地说，如果根据问题的直观，容易发现所求的对象就是处于某种极端状态的对象，则可直接取出极端元，然后证明其合乎条件。

1.1

原始元极端

如果题给对象本身具有某种数量指标，则可在题给的所有原始



对象中,直接取出指标最大或最小的对象,然后证明它就是所求的对象.

例 1 一个矩形被分割为有限个(至少两个)互不相等的小正方形,则称为矩形的完美分割.求证:对矩形的任何完美分割,必定存在一个小正方形,它的边不与原矩形的边重合.

分析与解 本题比较简单,因为题目给出的对象本身具有数量指标:正方形的面积.凭直观,我们应找最大的还是最小的正方形?

注意所找的正方形在原矩形的内部,正方形越大,越有可能与原矩形的边界有重叠,从而应找最小的正方形.

那么,最小的正方形是否存在?由于矩形被分割为有限个小正方形,所以其中必有一个最小的正方形,记为 A ,我们证明正方形 A 合乎条件.

实际上,反设正方形 A 的一条边与原矩形的某条边重合,则 A 与原矩形的相对位置本质上只有如下两种情形(所谓“本质上”是指其中任何一种情形都不能通过另一种情形旋转、翻转而得到):一是同时与原矩形的两边重叠(位于角落);二是仅与原矩形的一边重叠(不位于角落).

我们需要在这两种情形中分别找到比 A 更小的分割正方形.对于第一种情形(图 1.1),因为 A 右侧的正方形都比 A 大,所以 A 上方的小正方形比 A 小,与 A 的最小性矛盾;

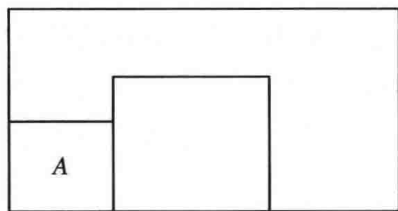


图 1.1

对于第二种情形(图 1.2),因为 A 两侧的正方形都比 A 大,所以 A 上方的正方形比 A 小,与 A 的最小性矛盾.

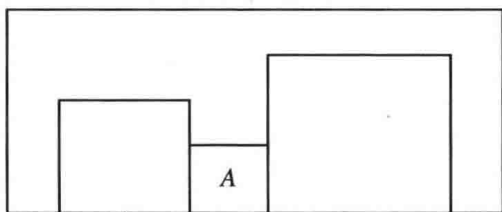


图 1.2

例 2 请构造一个矩形的完美分割的例子.

分析与解 本题有相当的难度.首先,我们不知道应分割为多少个正方形,但我们还是可以从极端的情形入手,先探索分割出的正方形个数最少的情形.

注 我们可利用上题的信息,原矩形内部至少有一个小正方形(图 1.3),我们考虑在此基础上如何进行分割.

因为内部的最小正方形的每条边都必须引出一条新的分割线(否则该边是两个正方形的公共边,其边长相等),考察最小正方形的每条边引出的分割线,即可发现矩形的分割方案.

容易想到分割中不能含有如图 1.4 所示的与原矩形两边都相交的分割线,否则去掉该分割线右边的一个矩形(称为边缘矩形),便得到一个新的正方形个数更少的矩形的完美分割,矛盾.于是,我们应将过最小正方形一边的分割线修改为只与原矩形的一边相交(图 1.5).

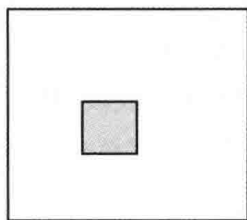


图 1.3

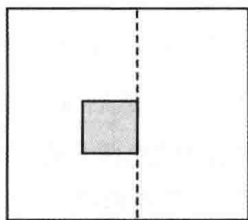


图 1.4

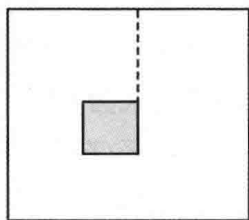


图 1.5



类似考察最小正方形的其他各条边引出的分割线,便得到如图1.6所示的分割.但此时,设各正方形的边长分别为 a, b, c, d, e , 则有

$$b = a + c, \quad c = a + d, \quad d = a + e, \quad e = a + b.$$

各式相加,得

$$b + c + d + e = 4a + b + c + d + e,$$

所以 $a = 0$, 矛盾!

这表明,这种极端情形(分割为5个正方形)并不合乎要求,但不要全盘否定,可在此基础上进行改进.

将其中一条分割线(图1.6中的细线)不封口,即不与边缘相交,再考察右下角顶点所在的正方形,至少添加两条分割线才能与前面“开口”的分割线封闭,否则产生边缘矩形(图1.7),但此时仍无解(类似得到矛盾方程组).

进而又将其中一条分割线(图1.7中的竖的虚线)不封口,添加两条分割线得到图1.8,然后适当选择正方形边长,便可得到一个矩形的完美分割.

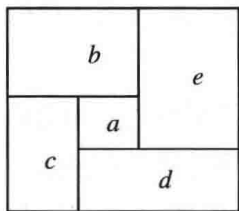


图 1.6

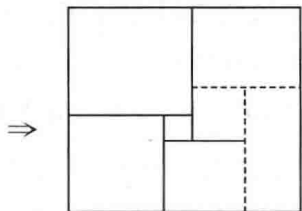


图 1.7

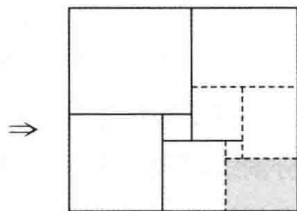


图 1.8

我们还可以采用“同构叠合”的方法(相同结构的图形叠合在同一个图形中)来改造图1.6的分割:在边长为 d 的矩形的右上角分割出一个边长为 f 的矩形(图1.9),然后在外围添加若干条线段封闭成一个大矩形(图1.10),此时的图由两个形如图1.6的“块”叠合而成.最后确定各正方形边长,便可得到矩形的完美分割(图1.11).有趣的是,它与图1.8的分割是完全一致的.

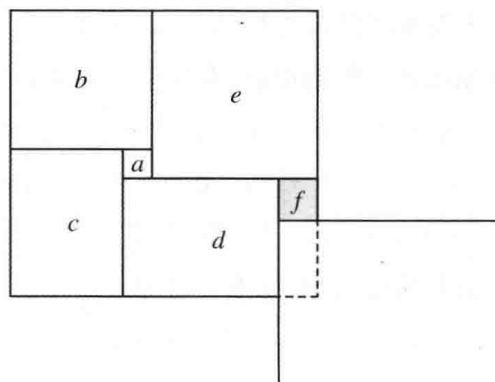


图 1.9

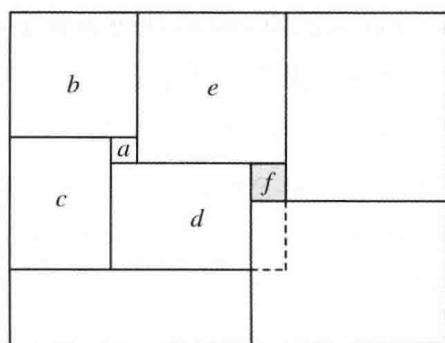


图 1.10

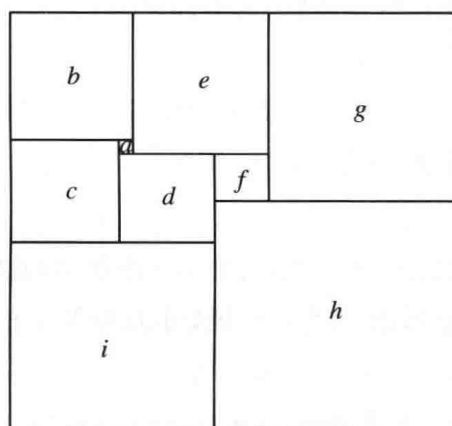


图 1.11



用 a, b, \dots, i 表示所分正方形的边长(图 1.11), 考察内部正方形与其他正方形相接产生的新边长, 有如下三组等式:

$$a + b = e, \quad a + c = b, \quad a + d = c, \quad a + e = d + f,$$

$$d + c = i, \quad d + e = b + c, \quad d + i = h + f,$$

$$f + e = g, \quad f + g = h, \quad f + h = d + i.$$

再考虑矩形两个边长的分割, 有如下组等式:

$$b + e + g = h + i, \quad b + c + i = g + h.$$

又由图 1.11 可知

$$a < d < c < b < e,$$

于是, 由 $d + f = a + e, d < e$, 有 $a < f$, 从而 a 最小.

取 $a = 1, d = x$ (主元), 则第一组等式为

$$1 + b = e, \quad 1 + c = b, \quad 1 + x = c, \quad 1 + e = x + f,$$

解得

$$c = 1 + x, \quad b = 2 + x, \quad e = 3 + x, \quad f = 4.$$

代入后面的等式, 得

$$i = 1 + 2x, \quad h = 3x - 3,$$

$$g = 7 + x, \quad h = 11 + x, \quad i = 15,$$

$$12 + 3x = 11 + x + 15,$$

所以, $x = 4$.

由此得到的一个矩形的完美分割如图 1.12 所示.

如果对正方形进行完美分割, 则难度大大增加! 请读者构造一个正方形的完美分割.

关于正方形进行完美分割, 有如下一个著名的极值问题:

如果一个正方形能分割为 r 个大小互异的小正方形, 求 r 的最小值.

本题已有答案: 最小值为 21, 但须借助计算机完成证明(参见《中等数学》1990 年第 3 期第 15 页), 一个自然的问题是: 能否给出一个

简单的证明?

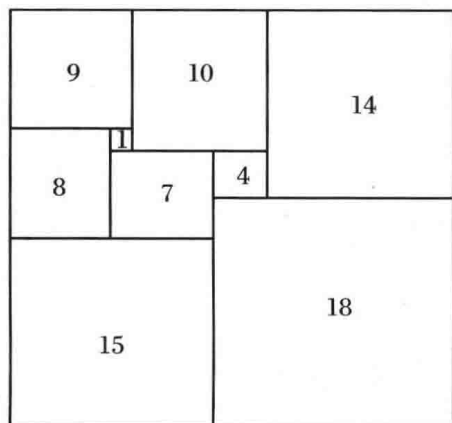


图 1.12

例 3 设 G 是竞赛图, A 是 G 的任意一个顶点. 如果对 G 中任何一个点 $B(A \neq B)$, 要么 $A \rightarrow B$, 要么存在顶点 P , 使 $A \rightarrow P$, 且 $P \rightarrow B$, 则称 A 是 G 的一个优顶点. 试证: 任何竞赛图中都有优顶点.

分析与证明 尽管一般的几何图形中的点没有数量指标, 但图论中“图”的点却有数量指标: 度, 而“竞赛图”中的点则有两个数量指标: 出度与入度.

为了找到优顶点, 由问题的直观, 不难想到出度最大的点 A 是优顶点. 下面证明: 对 G 中任何一个点 B , 要么 $A \rightarrow B$, 要么存在顶点 P , 使 $A \rightarrow P$, 且 $P \rightarrow B$.

对这种分类描述的目标, 可先假定其中一个子项成立, 然后再讨论该子项不成立的情形.

考察 G 中任何一个点 B , 若 $A \rightarrow B$, 则 A 为优顶点, 结论成立.

若 $B \rightarrow A$, 此时要找到点 P , 使 $A \rightarrow P$, 且 $P \rightarrow B$. 如何找点 P ?

先要满足部分条件 $A \rightarrow P$, 即考察 A 占优的所有点, 希望其中有一个点 P , 使 $P \rightarrow B$ (图 1.13).

用反证法, 假设这些点中有没有占优 B 的点, 即被 A 占优的点



都被 B 占优(图 1.14), 但 B 占优 A , 所以 B 至少要比 A 多一个出度, 与 A 的出度最大矛盾.

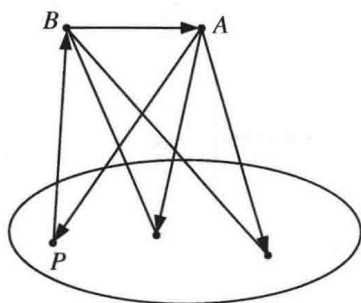


图 1.13

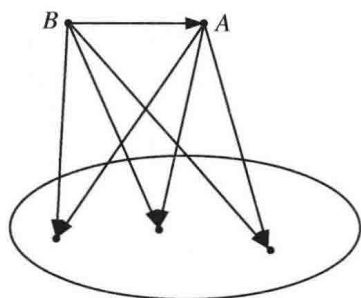


图 1.14

综上所述, 命题获证.

下一个例题需要用到如下一个基本原理, 我们称之为最小数原理:

自然数集的非空子集中有最小数.

证明 设 A 是自然数集的非空子集, 任取 A 中一个元素 a , 如果 A 在区间 $[0, a]$ 没有元素, 那么 a 就是 A 中的最小元素; 如果 A 在区间 $[0, a]$ 有元素, 由于区间 $[0, a]$ 中只有有限个自然数, 所以一定有最小元素 b , 则 b 是 A 中的最小元素, 命题获证.

在直接取极端元时, 有时候不能在全体对象中取极端元, 只能在部分对象中取极端元, 我们称之为局部极端. 看下面一个例子.

例 4 设 S 是 \mathbf{Z} 的非空子集, 且满足:

- (1) 对任意的 $x, y \in S$, 有 $x - y \in S$;
- (2) 对任意的 $x \in S, k \in \mathbf{Z}$, 有 $kx \in S$.

求证: 存在 $d \in S$, 使 $S = \{kd \mid k \in \mathbf{Z}, d \in S\}$.

分析与证明 本题要找的是数集 S 中的一个元素 d , 使 S 中的每一个元素都是 d 的倍数.

因为数本身具有大小, 可直接找 S 中的最小数作为 d . 但 $S \subseteq \mathbf{Z}$,