

大师之作 醍醐灌顶 学好高数的必读经典

高等数学 **新生** 突破

一元函数微分学

邵 剑 著



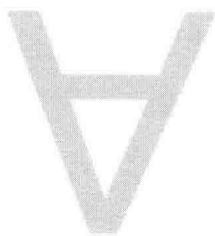
40多年教学经验积淀，潜心笔耕几经修订历时20多年著述而成
聚焦教学和复习中的疑难问题、不易展开的问题
聚焦需要思维剖析和思路总结与解读的问题

被众多数学教师大力推荐，被推崇为顶尖高数辅导书

 上海远东出版社

高等数学 突破 一元函数微分学

邵 剑 著



 上海远东出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学新生突破. 一元函数微分学 / 邵剑著. —
上海: 上海远东出版社, 2019

ISBN 978-7-5476-1513-3

I. ①高… II. ①邵… III. ①微积分—高等学校—题
解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 134074 号

责任编辑 曹 建

责任校对 祁东城

装帧设计 李 廉

责任印制 晏恒全

高等数学新生突破:一元函数微分学

邵 剑 著

出 版 **上海远东出版社**

(200235 中国上海市钦州南路 81 号)

发 行 上海人民出版社发行中心

印 刷 上海锦佳印刷有限公司

开 本 890×1240 1/32

印 张 11.25

字 数 313,000

版 次 2019 年 8 月第 1 版

印 次 2019 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5476-1513-3/G·966

定 价 65.00 元



邵 剑

浙江大学教授

浙江大学教书育人十大标兵

浙江大学学生心目中最喜爱的老师

浙江大学新生入学通知书“名师寄语”者之一

网红，以“邵爷爷语录”走红网络

邵剑，男，1943年生，浙江人。从事教学工作40多年，长期讲授博士生、硕士生和本科生的多门数学课程及考研数学的辅导课程。先后承担国家和省部级多项自然科学基金研究项目。1981年创立的浙江大学数学系“控制与运筹学”博士点、硕士点的核心创建人之一。著述甚丰，尤其有关高等数学辅导和考研数学辅导的著作，因思想深刻、见解独到、方法典型、讲解深入浅出而广受学生欢迎、好评和推崇。诗词歌赋及文史功底深厚，在数学课程的教学总能旁征博引、纵横捭阖、情思汪洋而又缕析深刻，连珠妙语被浙江大学学生记录为“邵爷爷语录”而广为流传。连续数年作为名师代表之一，为浙江大学新生入学通知书撰写“名师寄语”。作为一名以工匠精神坚守讲台的教授，教学成绩突出，多次被评为浙江省、浙江大学“教书育人标兵”，浙江大学“学生心目中最喜爱的老师”等称号。



他是一位温情儒雅的教授,我们是他的学生. 他的理工思维与人文气息交融的课堂教学,以及富有诗意的语言,给我们留下深刻的印象. 品味其内容,践行其寄托是极有意义的.

(摘自浙江大学学生对邵剑教授的评价.)

前言

朋友！你我不曾相识，但高兴的是我们有幸相聚于本书之中。这是一种缘分，更是一种信任与情感的交流，愿通过本书我们能成为好朋友——真正的好朋友！因为一切的美，数情最美。

你的可爱让我陶醉，你的优秀使我感动。

你的青春令我羡慕，你的现在由我陪同。

创新，是人类社会活动永恒的主题。创新活动和科学研究需要具有一定的基础与专业知识的积累，需要具有相当的创新思维，需要具有终身学习的能力。这些都是高等教育的基本任务，希望你们先从本书的学习中得以培养和提升。

笔者一辈子坚守并实践着的教和学的理念是：创新思维的教和学，情与爱的教和学，愉悦而轻松的教和学。

非初等数学的数学皆为高等数学。二者的根本区别在于：初等数学研究的是**有限的**，又是**静态的**；高等数学研究的是**无限的**，又是**动态的**。显然，高等数学比初等数学研究的范围更广、难度更大、探索的未知更多。人们俗称的高等数学课程，仅仅涉及整个高等数学中最基础的极少部分。

按创新思维与方法，专题梳理与解悟高等数学课程中各个知识点是一种较高的思想境界，可以让你掌握创新活动中一些常规的思维和方法，会让你觉得这种学习挺好玩儿的，能提高你的终身学习能力。本书就是强调创新思维与数学知识的贯通，突出用

撰写科学研究论文的路线加以阐述. 本书具有个性的“注记”就是对有关专题的剖析与延拓及其思想的最好解悟.

好人的充分必要条件是考虑到他人. 爱与情的核心也就在于尊重对方、考虑对方. 教师为学生着想, 作者为读者考虑, 均体现着爱与情. 学生接受这种被爱是对教师的敬重, 读者喜爱并接受书中的见解和字里行间的情是对作者的肯定. 这说明双方都是好人, 大家都持有“待贤者谦, 待善者恭”的精神.

正是笔者考虑着你们, 才把本书写成一部具有可读易懂、内容全面、方法多样、综合性强等特点的大全; 又具有概念清晰、叙述严谨、思想丰富、思维活跃等特色; 还在许多“注记”中提供了相关的练习题. 本书的写作风格是以朋友交流的谈话形式, 是没有声音的讨论式课堂教学.

好人考虑着他人, 就是让他人有收益、有快乐. 学生喜爱的好教师是这样, 读者喜爱的好作者也是如此. 笔者怀着为了学生和读者有收益有快乐的理念, 坦诚用心写成了本书. 当然也期望你们用心、静心研读本书, 诚如是, 则你一定会在系统梳理数学知识的同时, 在学业上、思维上都有收益和提高, 进入更高的境界, 并愉悦又轻松着.

本书(一套四册)适用于工学、理学、经济学、管理学等各学科、各专业的如下几类读者:

(1) 正在学习“高等数学”(含“微积分”、“常微分方程”等)课程的读者. 本书各章节的编排是与“高等数学”(含“微积分”、“常微分方程”等)课程的常用教材及其教学顺序相一致的, 故对初学者, 尤其是大学新生来说它是一部极好的高等数学同步辅导用书.

另外,请读者根据自己报考研究生的专业要求,按照教育部当年颁布的数学考试大纲选用本书中有关章节的相关内容.

(2) 正在选学“数学分析”课程的读者. 本书覆盖了“数学分析”课程中纯分析理论以外的全部内容,且达到了相应的高度. 所以本书也是正在学习“数学分析”课程读者的很好的辅导用书.

(3) 从事“高等数学”课程和“数学分析”课程教学工作的教师. 本书可以作为这些教师朋友的教学参考用书,愿对大家有一定的帮助.

这里,特别感谢本书责任编辑、上海远东出版社曹建编审! 感谢他的关注,使笔者长期创立的教学理念与教学风格在本书中得以部分展示. 他在每个细节中处处体现出来的考虑读者、关心作者的好人品质让我感动.

本书的不当甚至差错之处,唯望从各位同仁与朋友中多获教言以增益,谢谢!

邵 剑

2019年7月于杭州

目 录

前言

第 0 章 数学思想与创新思维 / 3

§ 0.1 特殊与一般 / 3

0.1.1 特殊与一般 / 3

0.1.2 两种常用的化归思维方法 / 6

0.1.3 关系映射反演方法 / 7

0.1.4 函数构造 / 11

§ 0.2 分解与组合 / 12

0.2.1 分解 / 12

0.2.2 组合 / 16

§ 0.3 联想、类比、归纳与演绎 / 18

0.3.1 联想与类比 / 18

0.3.2 归纳与演绎 / 22

§ 0.4 思维 / 25

0.4.1 思维 / 25

0.4.2 同向思维与逆向思维 / 27

0.4.3 对偶结构思维 / 29

0.4.4 非逻辑思维 / 31

§ 0.5 抽象 / 37

0.5.1 抽象与数学抽象 / 37

0.5.2 弱抽象与强抽象 / 39

§ 0.6 数学中的美学 / 42

0.6.1 美学 / 42

- 0.6.2 数学美 / 44
- 0.6.3 数学美的内容 / 48
- 0.6.4 数学美的特征 / 51

第1章 极限与连续 / 61

- § 1.1 极限的概念与性质 / 62
 - 1.1.1 极限的基本概念 / 62
 - 1.1.2 极限的性质与法则 / 73
 - 1.1.3 函数、数列、子数列之间的关系 / 80
- § 1.2 函数的连续性 / 86
 - 1.2.1 函数连续的概念与性质 / 86
 - 1.2.2 函数间断的概念 / 91
 - 1.2.3 闭区间上连续函数的性质及其应用 / 99
- § 1.3 极限存在的准则 / 109
- § 1.4 极限的计算 / 123
 - 1.4.1 基本型不定式极限的计算 / 123
 - 1.4.2 幂指数函数极限的计算 / 134
 - 1.4.3 极限中参数的确定 / 139

第2章 一元函数导数的概念与计算 / 149

- § 2.1 导数与微分的概念 / 150
 - 2.1.1 一元函数导数的定义 / 150
 - 2.1.2 一元函数导数的基本性质 / 161
 - 2.1.3 分段函数的可导性讨论 / 166
 - 2.1.4 微分的定义 / 171
- § 2.2 一元函数导数的计算 / 176
 - 2.2.1 基本类型函数的导数计算与应用 / 176
 - 2.2.2 高阶导数的计算 / 194

第3章 微分中值定理及其应用 / 205

§ 3.1 微分中值定理 / 206

3.1.1 微分中值定理的分析 / 206

3.1.2 泰勒定理与泰勒公式的建立 / 212

§ 3.2 微分中值定理的若干应用 / 219

3.2.1 函数与其导数之间的关系 / 219

3.2.2 微分中值定理的中值的若干问题 / 226

3.2.3 利用微分中值定理证明不等式 / 234

3.2.4 利用洛必达法则求极限 / 238

3.2.5 泰勒公式的若干应用 / 247

§ 3.3 利用微分中值定理讨论方程的实根 / 261

第4章 一元函数及性态分析 / 289

§ 4.1 函数 / 290

4.1.1 函数的概念 / 290

4.1.2 函数的构造 / 297

§ 4.2 一元函数性态的分析 / 302

4.2.1 函数的单调性与极值 / 303

4.2.2 曲线的凹向性 / 310

4.2.3 函数性态的综合分析 / 314

4.2.4 函数的最优值问题 / 327

§ 4.3 函数性态分析的应用 / 332

4.3.1 结合函数性态分析讨论方程的实根 / 332

4.3.2 利用函数性态分析证明不等式 / 336

祝贺你进入大学读书！

首先，请牢记：体是基础，德是根本，勤是前提，悟是关键。

其次，你应该有一个平静而健康的心理状态。真实地认识自我，冷静地看待自己，懂得“山外有山天外天，人外自有强我人”是至关重要的。因为系统论的“无后效性原理”告诉我们：系统的过去只能影响现在，而不能直接影响未来。或者说，强者的你只是过去，将来不一定强。

再次，良好的生活与学习的习惯犹如钢索不会轻易折断，它将陪伴你终身。它或许能体现着差距，或许就是成败之关键。因为懒惰与浮躁乃是人生的大敌。

“心静书自香，书香乃至乐。”读书似乎是单调而辛苦的，但是读书又是一种磨炼与积累，更是一种享受。这种享受无时不在、无处不在。学理工的同学应注意加深自身的文化底蕴，学人文的同学则要加强自己数理知识的学习与思维训练。如果你能在相应法则约束下胜出，那么更能显示出你的实力与素养。

最后，学做能善待与宽容他人、尊重与关心他人的好人。对家长、对师长、对同学以及对知识的追求，你都应该有情的付出。情会给你愉悦，给你执著，给你伟业与幸福。

你热烈的青春需要用激情、用有情为善的人格燃烧出来；你美好的未来需要用你的信心、你的勤奋、你的悟性镶嵌出来；你远大的理想需要以你强健的体魄、坚实的基础知识以及良好的生活学习习惯为基础，需要你优秀的人品与丰富活跃的思维能力。

年轻的朋友们！请相信你自己，相信你自己的每一颗晶莹的汗珠！成功一定是属于有远见、有充分准备的你。幸福一定是属于有情为善且敢对自己、对他人、对社会负责任的好人——你，你们。

同学，给你们一个拥抱，轻轻而紧紧的；给你们一个微笑，轻松而愉悦的；给你们一个祝福，深深而永久的。

愿我们能成为好朋友！

（摘自浙江大学新生入学通知书中的邵剑“名师寄语”，有删改。）

第 0 章

数学思想与创新思维

§ 0.1 特殊与一般

0.1.1 特殊与一般

1. 规律与范畴

事物的诸规律与范畴从各个方面揭示着事物的联系和发展的内容. 因此, 我们应该充分把握规律与范畴这两个概念的内涵.

规律是事物发展中其本身固有的、本质的、必然的与稳定的联系, 也是事物运动、变化和发展的必然趋势与确定的秩序. 规律是客观的, 它是反复起作用的. 任何事物都有其自己的规律.

范畴是指人的思维对客观事物的普遍本质的概括与反映. 范畴是人们在实践基础上概括起来的成果, 反过来又使人们进一步认识世界与指导实践. 范畴是人类认识发展的历史的产物, 一定的范畴标志着人类对客观世界的认识一定阶段, 它必然随着社会实践与科学研究的发展而逐步丰富与更加精确.

规律与范畴是互相联系、互相包含、互相贯通的. 一方面, 规律包含了范畴. 从逻辑形式上看, 规律以判断来表达, 范畴以概念来表达. 判断离不开概念, 规律离不开范畴. 另一方面, 范畴体现了规律. 范畴及其关系加以展开就构成规律, 如原因引起结果、内容决定形式、现象表现本质等都是事物的客观规律. 离开范畴, 规律

就无法揭示,也无法表达;离开规律,范畴就变成一个个孤立的凝固的概念.

通过质和量、对立和统一、肯定和否定等范畴所揭示的质与量互变、对立统一和否定之否定规律是哲学的三个基本规律.

范畴是反映客观事物的本质联系在各自学科中的一种具有普遍意义的基本概念.如生物学中的同化、异化;经济学中的商品、价值、货币;力学中的力、质量、速度、功等范畴.

哲学的范畴具有最大的广泛性与普遍的适用性,它们是对事物、现象间最普遍的联系或关系的概括与反映,是思维的一种逻辑形式.如有对立与统一、质与量、肯定与否定、原因与结果、必然与偶然、形式与内容、现象与本质等范畴.

数学中的范畴有常量与变量、静止与运动、连续与离散、有限与无限、有序与无序、简单与复杂、充分与必要、整体与局部、内部与边界、随机与非随机、线性与非线性、光滑与非光滑、优与非优、稳定与非稳定、逻辑与非逻辑等.另外,还有特殊与一般、分解与组合、归纳与演绎、类比与联想、分析与综合、真理与谬误等范畴.

由上面分析可见,在数学学习与研究中应该充分地分析数学中的各个范畴,并通过这些范畴的联系与转化揭示它们的规律,概括出其相应的专题及其思维方式.由于知识的广度最主要的是体现在知识之间的本质上的联系,所以应尽力把隐藏在教材与研究素材中的各种思想方式提炼出来,使之表面化,并实现对对立双方的相互之间的化归,以期发现新的事物、规律与命题,或使数学学习变得融会贯通、事半功倍、得心应手.

2. 特殊与一般

人们对现实世界的认识总是先从认识个别的与特殊的事物开始.只有认识了许多事物的特殊的本质,才能从中概括出它们共同的本质.然后又以这种共同的认识为指导,对于尚未研究过的或者尚未深入研究过的各种具体事物进行研究,找出其特殊的本质,并补充、丰富和发展其共同本质的认识.数学中构造的一个基本思想就是基于特殊与一般对立双

方的转化. 在数学研究中关注事物的特殊与一般, 即个性与共性的辩证关系显得十分必要.

特殊与一般是相对而言的, 在某种意义下, 事物 P 相对于事物 Q 是特殊的, 事物 Q 相对于事物 P 是一般的; 如果事物 Q 相对于事物 R 又具有其特殊性, 那么事物 R 相对于事物 Q 与 P 具有一般性.

特殊与一般, 即个性与共性, 是既对立又统一的两个范畴. 任何事物都是共性与个性的有机统一, 既具有个性又具有共性, 但是共性比个性深刻, 个性比共性丰富. 个性是共性的基础. 就是说, 事物的特殊性中蕴含着一般性, 即共性存在于个性之中. 同时, 共性又是个性的共同本质, 共性统摄个性; 个性体现共性, 个性与共性相联系但又不能脱离共性. 或者说, 一般性概括了特殊性. 数学中处处体现着这种辩证关系.

例如, 基于一般概括了特殊的思想, 特殊与一般还存在着如下关系:

- (i) 若命题 P 在一般情况下为真, 则其在特殊情况下也真;
- (ii) 若命题 P 在特殊情况下为假, 则其在一般情况下也为假.

正是由于这些关系, 人们常常在判定某一命题正确时要作严格的数学证明; 而判断某一命题为假时, 只要举出一个反例即可. 其中后者是利用由特殊否定一般的思想, 它在数学的发展中曾发挥过许多重要的作用; 它在是非、选择题中的现实作用也是显而易见的; 人们经常使用的反证法的思想也是关系(ii)的否定作用.

3. 特殊情况的特殊处理

我们应该特别强调的是: 对待处理的问题作了一般性研究之后, 还需要对该问题的某种特殊情况单独进行讨论, 因为或许这种特殊的情况往往不一定包含在原问题的一般性研究之中, 或者它具有很特殊的个性. 例如, 人们在关心大众利益的同时, 更应该关爱一些特殊的弱势群体. 有些人常常忽略了这一步, 而不加注意地认为一般情形已蕴含着全部的特殊情形, 这是不全面的, 也是不科学的.

譬如, 在定义 n 阶乘的一般运算后, 注意到 0 是整数中一个特殊