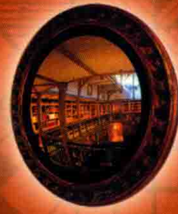
INTERESTING ELEMENTARY FUNCTION STUDY AND APPRECIATION (II)



趣味初等函数研究与欣赏（下）

邓寿才　编著

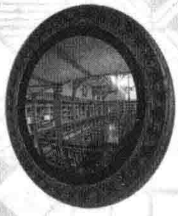
$\sum_{1}^{5} k^5 x_k = a^3$

$\sum_{1}^{5} k^3 x_k = a^2$

$\sum_{1}^{5} k x_k = a$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

INTERESTING ELEMENTARY FUNCTION STUDY AND APPRECIATION (II)



趣味初等函数研究与欣赏（下）

● 邓寿才　编著

$$\sum_1^5 kx_k = a$$

$$\sum_1^5 k^3x_k = a^2$$

$$\sum_1^5 k^5x_k = a^3$$

HITP 哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分五章,详细地介绍了三角函数与迭代函数的相关概念、研究方法,并介绍了三角函数及复数,多项式与因式分解,迭代函数与函数方程的一些函数趣题的一题多解,供读者参考.

本书可作为大、中学生及初等数学爱好者学习初等函数时的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

趣味初等函数研究与欣赏. 下/邓寿才编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018. 10

ISBN 978-7-5603-7223-5

Ⅰ. ①趣… Ⅱ. ①邓… Ⅲ. ①初等函数-研究 Ⅳ. ①O171

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 330262 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷 黑龙江艺德印刷有限责任公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 20.25 字数 364 千字
版　　次 2018 年 10 月第 1 版 2018 年 10 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-7223-5
定　　价 48.00 元

◎ 目录

三角函数及复数

第四章

众所周知,三角函数是函数的一个重要分支,它的内容丰富(定义多、性质多、公式多),运算规律变化多端,其应用更是重要而又广泛,限于篇幅,本章先重点介绍三角函数的主要内容,然后再依次精讲关于三角函数的证明、方程、求极值及三角不等式.

4.1 三角函数的主要内容

1. 三角函数涉及的名词

先查阅高中数学教材中的如下各名词定义:

任意角,正角、负角、零角,周内角,终边相同的角,象限角,角度制,弧度制,三角函数的定义与三角函数值的符号和特殊三角函数值,单位圆,诱导公式,五点法,图像变换法,相位与初相位,三角函数的定义域和值域,奇偶性,对称性,有界性,对称中心与对称轴,单调性,最值.

2. 三角函数公式

(1)两角和与差的三角函数公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad (S_{\alpha\pm\beta})$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \qquad (C_{\alpha\pm\beta})$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \qquad (T_{\alpha\pm\beta})$$

说明 两角和的余弦公式是上述公式的基础,它是利用"坐标法"推导出来的,两角的和与差、正弦与余弦是相对而言的. 例如,$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$,$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$,$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]$等.

上述公式 $S_{\alpha+\beta}$,$C_{\alpha+\beta}$,$T_{\alpha+\beta}$都是各自定义域内的恒等式,要注意公式的适用范围. 例如,正切的和角公式

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

只有在 $\alpha,\beta,\alpha+\beta$ 都不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$的条件下成立.

要熟悉公式的一些常用变形,学会"逆用"和"变用",如

$$\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\beta]=\cos\alpha$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$$

等

(2)倍角公式

在公式 $S_{\alpha+\beta}$,$C_{\alpha+\beta}$,$T_{\alpha+\beta}$中,当 $\alpha=\beta$ 时,就可以得到相应的二倍角的三角函数公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (S_{2\alpha})$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \qquad (C_{2\alpha})\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad (T_{2\alpha})$$

(3)三倍角公式

在解答有关三角函数问题时,有时还需要利用如下的三倍角公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

$$\cot 3\alpha = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1}$$

(4)半角公式

由公式

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

可推得如下半角公式

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \qquad (C_{\frac{\alpha}{2}})$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \qquad (T_{\frac{\alpha}{2}})$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \qquad (T_{\frac{\alpha}{2}})$$

说明　上述三个公式中根号前的“+”“-”号,由角$\frac{\alpha}{2}$所在的象限确定,如果没有给出限定符号的条件,根号前应保持正、负两个符号.

(5)万能公式

用 $\tan \frac{\alpha}{2}$表示 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 的公式

$$\sin \alpha = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \tan \alpha = \frac{2\tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

通常叫作万能公式,这是因为不论角 α 的哪一种三角函数,都可以用这几个公式把它化为含 $\tan \frac{\alpha}{2}$的有理式,这样就可把问题转化为以 $\tan \frac{\alpha}{2} = t$ 为变量的一元有理数,从而有助于解决问题.

(6)辅助角公式

$$a\sin \alpha \pm b\cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin \left(\alpha \pm \arctan \frac{b}{a}\right) \quad (a > 0, b > 0)$$

$$a\cos \alpha \pm b\sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\cos \left(\alpha \mp \arctan \frac{b}{a}\right) \quad (a > 0, b > 0)$$

由此得

$$|a\sin \alpha \pm b\cos \alpha| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$$

说明　(1)凡使公式中某个式子无意义的角,都不适合该公式;

(2)要熟悉一些公式的几个重要的变形:

①降幂

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

②正切和

$$\tan\alpha+\tan\beta=\tan(\alpha+\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)$$

$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

③正切分解

$$\tan\alpha=\cot\alpha-2\cot 2\alpha$$

④正弦平方差

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

⑤三倍角公式的另一种形式

$$\sin 3\alpha=4\sin\alpha\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)$$

$$\cos 3\alpha=4\cos\alpha\cos(60°+\alpha)\cos(60°-\alpha)$$

$$\tan 3\alpha=\tan\alpha\tan(60°+\alpha)\tan(60°-\alpha)$$

⑥任意角是其半角的两倍,因此

$$\sin 2^k\alpha=2\sin 2^{k-1}\alpha\cdot\cos 2^{k-1}\alpha$$

$$\cos 2^k\alpha=2(\cos 2^{k-1}\alpha)^2-1=1-2(\sin 2^{k-1}\alpha)^2\quad(k\in\mathbf{N}^*)$$

⑦对于两个以上角的和或差的三角函数公式,可以归纳为两角和或差的问题来解决,如

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]$$

(7)三角函数的积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

(8)三角函数的和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

说明　每一组公式都有明确的意义及其适用范围，如角的“和、差、倍、半”公式是对“角”而言的，而“和积互化”公式是对“函数”而言的. 在三角函数公式的恒等变形过程中，一般采用一看角，二看三角函数，三看式子特征的原则，以达到化繁为简，变异为同的目的.

余弦定理：三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍，即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

利用余弦定理可以解决以下两类解三角形的问题：

(1)已知三边求各角. 即

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

(2)已知两边和它们的夹角，求第三边(从而进一步求出其他的角).

正弦定理：在一个三角形($\triangle ABC$)中，各边(a,b,c)和它所对角(A,B,C)的正弦的比相等，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

其中 R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径.

利用正弦定理与三角形内角和定理，可以解决以下两类解三角形的问题：

(1)已知两角和任一边，可求其他两边和一角；

(2)已知两边和其中一边的对角，可求另一边(从而进一步求出其他的边和角).

任意三角形的面积定理：三角形的面积等于任意两边与它们的夹角的正弦

的积的一半,即

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

3. 反三角函数

定义:反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数都叫作反三角函数.

反三角函数有反函数的条件:三角函数在其定义域内存在反函数;三角函数在它的各个单调区间内存在反函数.

(1)三角函数与反三角函数的性质如下简表1.

表1　函数及其反函数性质

函数 \ 性质	函数		反函数	
解析式	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$
图像	略	略	略	略
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$[-1,1]$	$[-1,1]$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\pi]$
奇偶性	奇	偶	奇	非奇非偶
对称性	关于原点对称	关于 y 轴对称	关于原点对称	
有界性	有界	有界		
对称轴	$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$		
周期性	$T_{\min}=2\pi$	$T_{\min}=2\pi$		
单调性	略	略	增函数	减函数
最值	$-1\leqslant y\leqslant 1$	$-1\leqslant y\leqslant 1$		

限于篇幅,上表中的单调性及图像略去,且单调性和最值不详尽,所以正切函数与余切函数的列表略去.

(2)三角函数在各个单调区间的反函数.

正弦函数 $y=\sin x$,在区间 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$ 上的反函数是 $y=2k\pi+\arcsin x(|x|\leqslant 1,k\in\mathbf{Z})$;在区间 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上的反函数是 $y=(2k+1)\pi-\arcsin x(|x|\leqslant 1,k\in\mathbf{Z})$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上的反函数是 $y=2k\pi+\arccos x(|x|\leqslant 1,b\in\mathbf{Z})$；在区间 $[2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上的反函数是 $y=2k\pi-\arccos x(|x|\leqslant 1,k\in\mathbf{Z})$.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上的反函数是 $y=k\pi+\arctan x(k\in\mathbf{Z})$.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(k\pi,k\pi+\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上的反函数是 $y=k\pi+\mathrm{arccot}\ x(k\in\mathbf{Z})$.

(3)反三角函数的基本关系公式.

①正负值关系

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x\quad(|x|\leqslant 1)$$
$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x\quad(|x|\leqslant 1)$$
$$\arctan(-x)=-\arctan x\quad(x\in\mathbf{R})$$
$$\mathrm{arccot}(-x)=\pi-\mathrm{arccot}\ x\quad(x\in\mathbf{R})$$

②互余关系

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\quad(|x|\leqslant 1)$$
$$\arctan x+\mathrm{arccot}\ x=\frac{\pi}{2}$$

③同名三角函数关系

$$\sin(\arcsin x)=x\quad(x\in[-1,1])$$
$$\cos(\arccos x)=x\quad(x\in[-1,1])$$
$$\tan(\arctan x)=x\quad(x\in\mathbf{R})$$
$$\cot(\mathrm{arccot}\ x)=x\quad(x\in\mathbf{R})$$
$$\arcsin(\sin x)=x\quad\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$$
$$\arccos(\cos x)=x\quad(x\in[0,\pi])$$
$$\arctan(\tan x)=x\quad\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$$
$$\mathrm{arccot}(\cot x)=x\quad(x\in(0,\pi))$$

④倒数关系

$$\arctan x=\mathrm{arccot}\frac{1}{x}\quad(x>0)$$
$$\mathrm{arccot}\ x=\arctan\frac{1}{x}\quad(x>0)$$

⑤若$(\arctan x+\arctan y)\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,则

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$$

特别地,若$x=y$,则$2\arctan x=\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

(4)用一个反三角函数表示其余各反三角函数的公式

①$\arcsin x$:若$0<x<1$,则

$$\begin{aligned}\arcsin x&=\arccos\sqrt{1-x^2}\\&=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\&=\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\end{aligned}$$

若$-1<x<0$,则

$$\begin{aligned}\arcsin x&=-\arccos\sqrt{1-x^2}\\&=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\&=\operatorname{arccot}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)-\pi\end{aligned}$$

②$\arccos x$:若$0<x<1$,则

$$\begin{aligned}\arccos x&=\arcsin\sqrt{1-x^2}\\&=\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\\&=\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\end{aligned}$$

若$-1<x<0$,则

$$\begin{aligned}\arccos x&=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}\\&=\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\\&=\operatorname{arccot}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\end{aligned}$$

③$\arctan x$:若$x>0$,则

$$\arctan x=\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$$

$$= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

若 $x<0$,则

$$\arctan x = \operatorname{arccot}\frac{1}{x} - \pi$$

$$= -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

④$\operatorname{arccot} x$:若 $x>0$,则

$$\operatorname{arccot} x = \arctan\frac{1}{x}$$

$$= \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

若 $x<0$,则

$$\operatorname{arccot} x = \pi + \arctan\frac{1}{x}$$

$$= \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

(5)反三角函数的三角运算公式

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad (|x| \leqslant 1)$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\sin(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\operatorname{arccot} x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|\leqslant 1)$$

$$\tan(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\quad(|x|\leqslant 1)$$

$$\tan(\operatorname{arccot} x)=\frac{1}{x}$$

$$\cot(\arctan x)=\frac{1}{x}$$

$$\cot(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\quad(|x|\leqslant 1)$$

$$\cot(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(|x|\leqslant 1)$$

(6)一组反三角恒等式的推广.

①$x\in\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$时,$\arcsin(\sin x)=x-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$;$x\in\left[(2k+1)\pi-\frac{\pi}{2},(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}\right]$时,$\arcsin(\sin x)=(2k+1)\pi-x(k\in\mathbf{Z})$.

②$x\in[2k\pi,(2k+1)\pi]$时,$\arccos(\cos x)=x-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$;$x\in[(2k-1)\pi,2k\pi]$时,$\arccos(\cos x)=2k\pi-x(k\in\mathbf{Z})$.

③$x\in\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$时,$\arctan(\tan x)=x-k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

④$x\in(k\pi,(k+1)\pi)$时,$\operatorname{arccot}(\cot x)=x-k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

4.2 复数与向量的主要内容

由于复数与三角函数、向量、方程、数列等的关系错综复杂,并且密不可分,所以本节将介绍复数与向量的主要内容.

1. 复数与向量

先搞清楚下列基本名词的定义:

复数单位,纯虚数,复数,两复数相等,复平面,共轭复数,向量,零向量,相等的向量,自由向量,复数的向量表示,复数的模,复数加法的几何意义(平行

四边形法则与三角形法则),复数减法的几何意义,复数的辐角,复数乘法的几何意义,复数除法的几何意义.

2. 复数的加法

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i},z_2=a_2+b_2\mathrm{i},\cdots,z_n=a_n+b_n\mathrm{i}$(其中 $n\geqslant 2,a_k,b_k\in\mathbf{R},1\leqslant k\leqslant n$)表示 n 个复数,那么它们的和是 $z_1+z_2+\cdots+z_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\mathrm{i}$ 或简写成

$$\sum_{k=1}^{n}z_k=(\sum_{k=1}^{n}a_k)+(\sum_{k=1}^{n}b_k)\mathrm{i}$$

3. 复数的减法

复数的减法是加法的逆运算,即把满足

$$(c+d\mathrm{i})+(x+y\mathrm{i})=a+b\mathrm{i}$$

的复数 $x+y\mathrm{i}$,叫作复数 $a+b\mathrm{i}$ 减去 $c+d\mathrm{i}$ 的差,记作 $(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})$,且

$$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$$

这表明两个复数的差仍是一个确定的复数.

4. 复平面内两点间的距离公式

设复平面内的任意两点 z_1,z_2 分别表示复数

$$z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$$

$$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$$

那么两点 z_1,z_2 之间的距离为

$$\begin{aligned}d&=|\overrightarrow{z_1z_2}|=|z_2-z_1|\\&=|(x_2+y_2\mathrm{i})-(x_1+y_1\mathrm{i})|\\&=|(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\mathrm{i}|\\&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\end{aligned}$$

5. 复平面内圆的方程

圆心为复数 $p=a+b\mathrm{i}$,半径为 r 的圆的方程为

$$|z-p|=r\tag{1}$$

若设 $z=x+y\mathrm{i}$,则

$$\begin{aligned}|z-p|^2&=|(x+y\mathrm{i})-(a+b\mathrm{i})|^2\\&=|(x-a)+(y-b)\mathrm{i}|^2\\&=(x-a)^2+(y-b)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\tag{2}$$

这和平面解析几何中圆心为 (a,b),半径为 r 的圆的方程是等价的.

6. 复数的乘法

复数的乘法规定按照以下方法进行：

设 $z_1=a+bi, z_2=c+di$ 是任意两个复数,那么它们的积

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= ac+bci+adi+bdi^2 \\ &= (ac-bd)+(bc+ad)i \end{aligned}$$

口诀:分部轮乘,同部合并.

两个复数的积仍是一个复数,复数的乘法满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律.

两个共轭复数 $z, \bar{z}$ 的积是一个实数,这个实数等于每一个复数的模的平方,即

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

若设 $z=a+bi$,则 $\bar{z}=a-bi$,于是

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

7. 复数的乘方

对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$,有

$$i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1$$

$$i^{4n+3}=-i, i^{4n}=1$$

复数乘方的意义与实数乘方的意义相同,即

$$z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z \quad (n\text{ 个 }z\text{ 相乘}, n \in \mathbf{N}^*)$$

实数集中正整数指数幂的运算法则在复数集中仍成立.若设 $z=a+bi$,则当 $n \geqslant 2$ 时,利用二项式定理有

$$\begin{aligned} z^n &= (a+bi)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} [a^{n-k} \cdot C_n^k (bi)^k] \\ &= a^n + C_n^1 a^{n-1}(bi) + C_n^2 a^{n-2}(bi)^2 + \cdots + C_n^{n-1} a (bi)^{n-1} + (bi)^n \end{aligned}$$

8. 复数的除法

复数的除法是乘法的逆运算,即把满足

$$(c+di)(x+yi)=a+bi \quad (c+di \neq 0)$$

的复数 $x+yi$ 叫作复数 $a+bi$ 除以 $c+di$ 的商,记作

$$(a+bi) \div (c+di) \quad \text{或} \quad \frac{a+bi}{c+di}$$

由

$$(c+di)(x+yi)=a+bi$$
$$\Rightarrow(cx-dy)+(dx+cy)i=a+bi$$
$$\Rightarrow\begin{cases}cx-dy=a\\dx+cy=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\\y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

也可以用下列方法

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$
$$\Rightarrow\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

其实,关于复数的除法运算一般采用后一种方法.

9. 共轭复数的运算性质

由共轭复数的定义可得:

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$;

(2) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

(4) $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$.

10. 复数的模的运算性质

(1) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$, $|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant$
$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$;

(2) $|z_1\cdot z_2\cdot\cdots\cdot z_n|=|z_1|\cdot|z_2|\cdot\cdots\cdot|z_n|$;

(3) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$;

(4) $|z^n|=|z|^n$;

(5) $|z|^2=|\overline{z}|^2=z\cdot\overline{z}$.