

 学府考研

十年专注·只做考研

高等数学

同步辅导

同济·第七版


◎ 赵见军 主编

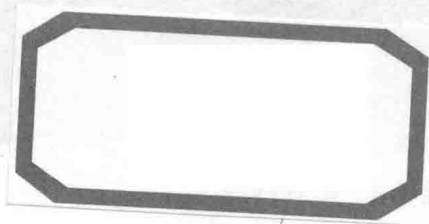
数学全程答疑



下载答疑APP

教材习题详解 · 配套同步辅导
考研真题精讲 · 思路方法归纳

 中国政法大学出版社



高等数学

同步辅导

同济·第七版

◎ 赵见军 主编

- 声 明
1. 版权所有，侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题，由出版社负责退换。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导/赵见军主编. —北京: 中国政法大学出版社, 2018. 5
ISBN 978-7-5620-8251-4

I. ①高… II. ①赵… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第089286号

- 出版者** 中国政法大学出版社
地 址 北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址 北京100088 信箱8034分箱 邮编100088
网 址 <http://www.cuplpress.com> (网络实名: 中国政法大学出版社)
电 话 010-58908285(总编室) 58908433(编辑部) 58908334(邮购部)
承 印 西安新华印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 37.5
字 数 625千字
版 次 2018年5月第1版
印 次 2018年5月第1次印刷
定 价 68.80元

学府图书在手 · 考研复习无忧

考研数学命题研究组 倾力打造

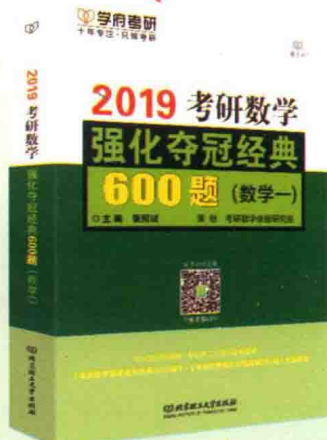
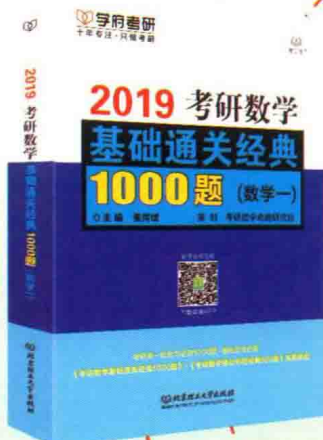


教材全方位解读 + 配套习题精讲精练 = 考研数学高分



张同斌老师主编
《2019 考研数学复习指导全书》(《2019 考研数学真题分类详解》) 张同斌

张同斌老师主编
《2019 考研数学真题分类详解》(《2019 考研数学复习指导全书》) 张同斌



2019 学府考研数学书系
资深考研辅导专家 **张同斌老师**
集 27 载辅导经验倾情奉献



风雨考研路 学府伴你行

“学府考研”是学府教育旗下专业从事考研辅导的品牌！

“学府考研”是一个为实现人生价值和理想而欢聚一堂的团队。2006年从30平方米的办公室起步，历经十年，打造了一个考研培训行业的领军品牌。如今学府考研已发展成为集考研培训、图书编辑、在线教育为一体的综合性教育机构，扎根陕西，服务全国。

学府考研的辅导体系满足了考研学子不同层面的需求，主要以小班面授教学、全日制考研辅导、网络小班课为核心，兼顾大班教学、专业课一对一辅导等多层次辅导。学府考研在教学中的“讲、练、测、评、答”辅导体系，解决了考研辅导“只管教，不管学”的问题，保证学员在课堂上听得懂，课下会做题。通过定期测试，掌握学员的学习进度，安排专职教师答疑，保证学习效果。总结多年教学实践经验，学府考研逐渐形成了稳定的辅导教学体系，尽量做到一个学员一套学习计划、一套辅导方案，大大降低了学员考取目标院校的难度。在公共课教学方面，实现零基础教学；在专业课方面，建立了遍及全国各大高校的研究生专业信息资源库，解决考生跨院校、跨专业造成的信息不对称、复习资料缺乏等难题。

“学府考研”的使命是帮助每一个信任学府的学员都能考上理想院校。

学府文化的核心是“专注文化”。

“十年专注，只做考研。”因为专业，所以深受万千考研学子信赖！

“让每一个来这里的考研学子都成为成功者。”正是这种责任，让学府考研快速成为考生心目中当仁不让的必选品牌。

人生能有几回搏，30年太长，只争朝夕！

同学们，春华秋实，为了实现理想，努力吧！

学府考研 | 全国统一客服电话 | 400-090-8961 |
总 部 | 陕西·西安市长安区韦郭路智慧国际12层

学府官方微博



学府官方微信



致学府图书用户函

亲爱的学府图书用户：

您好！欢迎您选择学府图书，感谢您信任学府！

“学府图书”是学府考研旗下专业从事考研教辅图书研发的图书公司！

为了更好地为您提供“优质教学、始终如一”的服务，对于您所提出的宝贵意见与建议，我们向您深表感谢！

若我们的图书质量或服务未达到您的期望，敬请您通过以下联系方式告知我们。我们珍视并诚挚地感谢您的反馈，谢谢您！

在此祝您学习愉快！

学府图书全国统一客服电话：400-090-8961

学府图书质量及服务监督电话：15829918816

学府图书总经理投诉电话：张城 18681885291 投诉必复！

您也可将信件投入此邮箱：34456215@qq.com 来信必回！

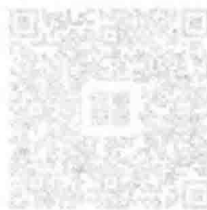
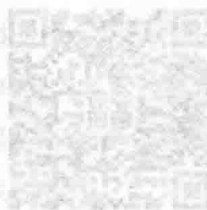
图书微博



图书微信



图书微店



前 言

《高等数学》是理、工科专业必修的基础学科,在研究生入学考试数学试卷中占有重要地位,高等数学部分的得分情况很大程度上决定了考生的数学成绩.本书旨在帮助考生快速、高效、精准的复习高等数学这门课程.

本书共十二章内容,涵盖函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、重积分、曲线、曲面积分、无穷级数,每章均由考情分析、考点精要、经典例题、习题选解及好题精练等五部分组成,立足基础知识点的讲解,通过例题详细阐述解题思路与方法,以期达到解题方法的总结与技巧的提炼.本书内容覆盖考试大纲,对各知识点的要求方向明确,重点突出.本书着重突出以下特色:

1. 考情分析.紧扣考试要求和考研数学最新大纲,明确考试内容,详细说明了考试内容需要掌握的程度,以掌握、理解、了解等用词准确定位,以便考生有的放矢.

2. 知识结构图和考点精要.知识结构图宏观概括了本章的内容,以便考生整体把握本章知识,而考点精要则详细归纳了本章知识点.知识结构图可比喻成大树的枝干,而考点精要就是枝干上的树叶,只有将它们有机结合,才能成为“健壮的大树”,即一个完整详尽的知识体系,以达到知识的融会贯通和解题方法的灵活应用.

3. 经典例题.本书中的每一道例题都具有代表性、启发性和概括性,经典例题不仅给出了所考查的知识点,还做了详细解答,总结了同种题型的做题方法,力求使考生掌握一类题目的解法,以达到举一反三、触类旁通的效果.

4. 习题选解和好题精练.本书对同济大学第六版《高等数学》中的重要课后习题进行了选解,以供学生参考.在此基础上补充了历年考研真题和经典习题,以帮助考生更好的提高解题能

力,该部分习题值得考生精做。

言 情

建议考生在使用本书时,不要就题论题,而是通过对题目的作答、比较、思考和总结,发现题目的设置和解答规律,特别要弄清命题意图,真正掌握应试技能,以取得满意的成绩。

编者在多年的考研辅导教学中,借鉴和参阅了大量国内同类优异辅导资料,得到了有益的启迪和教益,谨向有关作者表示感谢!

本书虽经过作者深思熟虑和反复推敲,但疏漏及不妥之处在所难免,恳请读者和广大同仁批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编者

2018年3月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 映射与函数	2
第二节 数列的极限	12
第三节 函数的极限	15
第四节 无穷大与无穷小	19
第五节 极限运算法则	21
第六节 极限存在准则、两个重要极限	25
第七节 无穷小的比较	30
第八节 函数的连续性与间断点	35
第九节 连续函数的运算与初等函数的连续性	39
第十节 闭区间上连续函数的性质	43
第二章 导数与微分	55
第一节 导数概念	56
第二节 函数的求导法则	63
第三节 高阶导数	71
第四节 隐函数及由参数方程确定的函数的求导	76
第五节 函数的微分	81
第三章 微分中值定理与导数的应用	93
第一节 微分中值定理	94
第二节 洛必达法则	99
第三节 泰勒公式	106
第四节 函数的单调性和曲线的凹凸性	112
第五节 函数的极值与最大值最小值	121
第六节 函数图形的描绘	129
第七节 曲率	133
第四章 不定积分	143
第一节 不定积分的概念	143
第二节 换元积分法	150
第三节 分部积分法	160
第四节 有理函数的积分	168
第五章 定积分	190
第一节 定积分的概念与性质	191
第二节 微积分基本公式	198
第三节 定积分的换元法和分部积分法	204
第四节 反常积分	217
第六章 定积分的应用	233
第一节 定积分的元素法	233
第二节 定积分在几何学上的应用	234
第三节 定积分在物理学上的应用	246
第七章 常微分方程	255
第一节 常微分方程的基本概念	256

第二节	可分离变量的微分方程	260
第三节	齐次方程	267
第四节	一阶线性微分方程	271
第五节	可降阶的高阶微分方程	277
第六节	高阶线性微分方程	284
第七节	常系数齐次线性微分方程	289
第八节	常系数非齐次线性微分方程	293
第九节	欧拉方程	305
第八章	空间解析几何与向量代数	316
第一节	向量及其线性运算	317
第二节	数量积、向量积、混合积	321
第三节	平面及其方程	326
第四节	空间直线及其方程	331
第五节	曲面及其方程	338
第六节	空间曲线及其方程	343
第九章	多元函数微分学	352
第一节	多元函数的基本概念	353
第二节	偏导数	361
第三节	全微分	369
第四节	多元复合函数的求导法则	373
第五节	隐函数的求导公式	381
第六节	多元函数微分学的几何应用	388
第七节	方向导数与梯度	394
第八节	多元函数极值及其求法	398
第十章	重积分	419
第一节	二重积分的概念与性质	420
第二节	二重积分计算法	425
第三节	三重积分	440
第四节	重积分的应用	452
第十一章	曲线、曲面积分	474
第一节	对弧长的曲线积分	475
第二节	对坐标的曲线积分	481
第三节	格林公式及其应用	487
第四节	对面积的曲面积分	498
第五节	对坐标的曲面积分	504
第六节	高斯公式、通量与散度	511
第七节	斯托克斯公式、环流量与旋度	516
第十二章	无穷级数	532
第一节	常数项级数的概念和性质	534
第二节	常数项级数的审敛法	539
第三节	幂级数	549
第四节	函数展开成幂级数	562
第五节	傅里叶级数	568
第六节	一般周期函数的傅里叶级数	576
参考文献		589

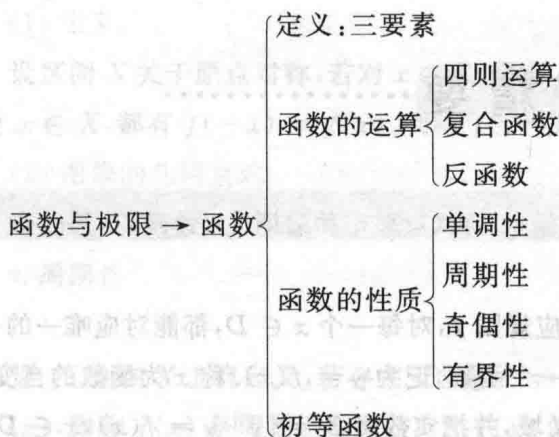
第一章

函数与极限

考情分析

考试内容	考试要求
1. 函数的概念及表示法.	1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.	2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 复合函数、反函数、分段函数和隐函数.	3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 基本初等函数的性质及其图形.	4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 初等函数.	5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左极限、右极限之间的关系.
6. 函数关系的建立.	6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 数列极限与函数极限的定义及其性质.	7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 函数的左极限与右极限.	8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 无穷小量和无穷大量的概念及其关系.	9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 无穷小量的性质及无穷小量的比较.	10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质
11. 极限的四则运算.	
12. 极限存在的两个准则.	
13. 单调有界准则和夹逼准则.	
14. 两个重要极限.	
15. 函数连续的概念.	
16. 函数间断点的类型.	
17. 初等函数的连续性.	
18. 闭区间上连续函数的性质	

本章知识框架图





第一节 映射与函数

考点精要

一 函数的概念

1. 定义

设 D 是一个非空的实数集,若存在一个对应规则 f ,对每一个 $x \in D$,都能对应唯一的一个实数 y ,则这个对应规则 f 称为定义在 D 上的一个函数,记为 $y = f(x)$.称 x 为函数的自变量, y 为函数的因变量或函数值, D 称为函数的定义域,并把实数集 $Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称

为函数的值域.

2. 表示法

(1) 表格法;

(2) 图像法;

(3) 解析式法:根据函数表达式的不同,又分为显函数、隐函数和分段函数.

3. 图像

平面点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图像,函数 $y = f(x)$ 的图像一般为平面上的曲线.

二 函数的性质

1. 有界性

(1) 定义.

设函数 $y = f(x)$ 在实数集 X 内有定义,若存在正数 M ,使 $x \in X$ 都有 $|f(x)| \leq M$,则称 $f(x)$ 在 X 上是有界的.

(2) 图像的几何直观.

图像介于两直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

2. 单调性

(1) 定义.

设 $f(x)$ 在 X 上有定义,若对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的(单调减少的).

若对任意 $x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 X 上是单调不减(单调不增).

(2) 图像的几何直观.

从左向右来看,单调增加(单调减少)的函数图像是上升(下降)的.

3. 奇偶性

(1) 定义.

设区间 X 关于原点对称,若对 $x \in X$,都有 $f(-x) = -f(x)$,则称 $f(x)$ 在 X 上是奇函数;若对 $x \in X$,都有 $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数.

(2) 图像的几何直观.

奇函数(偶函数)的图像关于原点对称(y 轴对称).

4. 周期性

(1) 定义.

设 $f(x)$ 在 X 上有定义,若存在正常数 $T \neq 0$,使得任意 $x \in X, x + T \in X$,都有 $f(x + T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的周期.

(2) 图像的几何直观.

每隔一个周期的图像形状相同.

三 函数的分类

1. 反函数

若由 $y = f(x)$ 可以解出 $x = \varphi(y)$ 是一个函数(单值), 则称 $x = \varphi(y)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$ (本意反函数), 一般情况下, 用 $y = f^{-1}(x)$ (习惯型反函数) 表示.

2. 复合函数

设 $y = f(u)$, 定义域为 U ; $u = g(x)$, 定义域为 X , 值域为 U^* , 若 $U^* \subset U$, 则 $y = f[g(x)]$ 是定义在 X 上的一个复合函数, 其中 u 称为中间变量.

3. 基本初等函数

(1) 常值函数 $y = c$ (c 为常数).

(2) 幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为常数).

(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$ 常数), $y = e^x$ ($e = 2.718\ 2, \dots$, 无理数).

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$ 常数),

常用对数 $y = \log_{10} x = \lg x$,

自然对数 $y = \log_e x = \ln x$.

(5) 三角函数 $y = \sin x; y = \cos x; y = \tan x; y = \cot x; y = \sec x; y = \csc x$.

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x; y = \arccos x; y = \arctan x$.

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的用一个分析表达式表示的函数称为初等函数.

经典例题

例 1 求 $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域, 并求 $f(2x+3)$ 的定义域.

【考点】函数定义域和复合函数.

【解析】解方程组 $\begin{cases} 2-x > 0 \\ \sqrt{x+1} > 0 \end{cases}$ 得到 $-1 < x < 2$, 故定义域为 $-1 < x < 2$.

由 $f(x)$ 定义域为 $-1 < x < 2$, 知 $f(2x+3)$ 定义域为 $-1 < 2x+3 < 2$, 即 $-2 < x < -\frac{1}{2}$.

名师评注

求函数定义域的原则:

(1) 若 $f(x)$ 为整式, 则其定义域为实数集 \mathbf{R} ;

(2) 分母不能为 0 (例如, 对于 $y = \frac{1}{3x^2 - 2x - 1}$, 有 $3x^2 - 2x - 1 \neq 0$).

(3) 二次根式(偶次根式)被开方数应大于等于 0 (例如, 对于 $y = \sqrt{x+2}$, 有 $x+2 \geq 0$).

(4) 对数函数的真数应大于 0 (例如, 对于 $y = \lg x$, 有 $x > 0$).

(5) 幂函数的底数不能为 0 (例如, 对于 $f(x) = x^0$, 有 $x \neq 0$).

(6) 如果函数由以上几个部分的数学式子构成, 定义域为使各个式子都有意义的实数

集合 (例如, 对于 $y = \frac{1}{\lg(x+3)}$, 有 $\begin{cases} \lg(x+3) \neq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$).

例 2 判断 $y = 2\lg x$ 与 $y = \lg x^2$ 是否为同一函数, 并说明理由.

【考点】判定两个函数是否为同一函数.

【解析】因为 $y = 2\lg x$ 的定义域为 $x > 0$, $y = \lg x^2$ 的定义域为 $x \neq 0$, 两函数定义域不相同, 所以 $y = 2\lg x$ 与 $y = \lg x^2$ 不是同一函数.

名师评注

判断两个函数是否为同一函数:

(1) 函数与变量及对应法则与选取的字母无关.

(2) 若两个函数定义域和对应法则都相同, 则这两个函数相同, 否则不是同一函数.

例 3 已知 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, 求 $f(x)$.

【考点】已知复合函数, 求 $f(x)$.

【解析】拼凑法

由题得 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\right]$

故 $f(x) = x(x^2 - 3)$, 即 $f(x) = x^3 - 3x$.

名师评注

求初等函数表达式的常用方法:

(1) 换元法: 已知 $f(g(x))$, 将 $f(x)$ 看成一个整体 t , 进行换元, 从而求出 $f(x)$.

(2) 拼凑法(如例 3): 先拼凑出 $f(x)$ 的相近形式, 再用整体换元法求出 $f(x)$.

(3) 待定系数法: 已知函数解析式的类型, 可设其解析式的形式, 根据已知条件建立关于待定系数的方程, 从而求出函数解析式.

- (4) 利用函数性质法:如奇偶性、单调性、周期性等求函数解析式的方法.
 (5) 赋值法:如 $f(x+y) = x^2 + xy + 4y + 6$, 令 $y = 0$ 得 $f(x) = x^2 + 6$.
 特别地,分段函数要分段求其表达式.

例 4 已知 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} (x \leq 0)$, 求 $f^{-1}(x)$.

【考点】求反函数.

【解析】令 $y = f(x)$, 因为 $x^2 \geq 0$, 所以 $f(x)$ 的值域为 $0 < y \leq 1$.

由 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 解得 $x = -\sqrt{\frac{1-y}{y}}$,

所以

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{x}} (0 < x \leq 1)$$

名师评注

求反函数的步骤:

- (1) 求出 $y = f(x)$ 的值域 $A, y \in A$;
- (2) 由 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$;
- (3) 写成 $y = f^{-1}(x), x \in A$.

例 5 设 $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{当 } |x| < 1 \\ 0, & \text{当 } |x| \geq 1 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } |x| \leq 2 \\ 1, & \text{当 } |x| > 2 \end{cases}$, 求 $f(g(x))$.

【考点】求分段函数的复合函数.

【解析】由 $f(x)$ 的表达式, 有 $f(g(x)) = \begin{cases} 2, & \text{当 } |g(x)| < 1 \\ 0, & \text{当 } |g(x)| \geq 1 \end{cases}$.

再由 $g(x)$ 的表达式, 知 $\begin{cases} |g(x)| < 1 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \\ |g(x)| \geq 1 \Leftrightarrow |x| > 2 \end{cases}$,

从而得到 $f(g(x)) = \begin{cases} 2, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$

名师评注

求分段函数的复合函数:

- (1) 求 $f(g(x))$ 时, 由外层函数 f 写出复合函数的表达式, 并同时写出中间变量(即内层函数的取值范围), 再由内层函数 $(g(x))$ 的分段表达式过渡到自变量的变化范围, 从而得到分段函数表达式; 求 $g(f(x))$ 的方法与上述方法类似.
- (2) 也可结合函数图像, 能更好的求解此类函数.

例 6 已知 $f(x) = x + \sqrt{2-x}, x \in \left(-\infty, \frac{7}{4}\right]$, 判定 $f(x)$ 在定义域上的单调性.