

“十二五”国家重点图书出版规划项目
现代声学科学与技术丛书

声学原理

(第二版·上卷)

程建春 著



科学出版社

现代声学科学与技术丛书

声学原理

(第二版·上卷)

程建春 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统介绍了流体介质中声波的激发、传播、接收和调控的基本原理和分析方法。主要内容包括：理想流体中声波的基本性质；声波的辐射、散射和衍射；管道和腔体中的声场；非理想介质中的声波；层状和运动介质中的声传播以及有限振幅声波的传播及其物理效应。

本书分上下两卷，上卷第1~4章，下卷第5~10章。

本书可作为理工科高年级学生和研究生教材，也可作为声学研究人员和技术人员的参考书，希望本书能够对读者的科研工作提供帮助。

图书在版编目(CIP)数据

声学原理. 上卷/程建春著.—2版.—北京：科学出版社，2019.5
(现代声学科学与技术丛书)

ISBN 978-7-03-061213-7

I. ①声… II. ①程… III. ①声学 IV. ①O42

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第090010号

责任编辑：刘凤娟 / 责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019年5月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2019年5月第一次印刷 印张：37 1/4
字数：710 000

定价：199.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

与第一版相比,第二版主要有三个方面的变化:错误修改,小节的名称变化,增加内容.增加的内容大致分两部分:融入近年来新的科研工作,相关章节的延伸和扩展.详细说明如下(括号内的数字为出现的小节数).

新增加的科研工作包括:人工结构表面及广义 Snell 定律(1.4.5),周期分层结构与能带特性(1.5.6),声束的聚焦和声棱镜聚焦(2.2.3),任意弯曲声束的形成(2.2.4),Airy 声束和能量有限的 Airy 束(2.2.5),螺旋波模式及其相控阵生成方法(2.3.6),表面散射和声景的设计(3.2.6),刚性地面上的有限屏及数值计算(3.4.5),低频有效声速和各向异性(3.5.2),二维固体周期结构中的弹性波(3.5.3),一维均质化近似的多尺度展开理论(3.5.4),高维均质化近似和各向异性(3.5.5),周期旁支结构的管道和能带结构(4.4.5),扩散体和 Schroeder 扩散体(5.3.5),长房间的声场分布问题(5.3.6),阻抗型边界的层状波导(7.1.5),径向连续分布介质中的声线方程(7.5.1),幂次分布结构中的声线和声黑洞(7.5.2),基于波动方程的严格解(7.5.3),Gauss 声束入射时空间声场的分布(7.5.4),球坐标中径向分布的折射率(7.5.5)等.

延伸和扩展的内容包括:曲线坐标系中的声波方程(1.1.6), N 层结构的传递矩阵法(1.5.4), N 层结构的阻抗率传递法(1.5.5),声学中的随机信号和相关函数(1.6.5),圆锥区域内波动方程的解(2.4.5),平面上非相干源的辐射(2.5.7),散射的积分方程方法(3.2.2),有限长管道中的驻波和非均匀阻抗的反射(4.2.6),简正模式的微扰近似方法(5.2.5),障板上的 Helmholtz 共振腔阵列(5.4.4),微穿孔板的共振吸声及共振频率(6.3.3),能量守恒、流反转定理和修正的互易原理(8.1.6),径向分布的轴向流介质中的波动方程(8.3.3),非稳定流动介质中的近似波动方程(8.3.4),运动界面的声散射和 FW-H 方程(8.4.3),广义 Lighthill 理论及其积分解(8.4.4),微扰的重整化解和多尺度微扰展开(9.2.6),非生物介质中的温度场方程(10.4.1),温度场的 Green 函数解(10.4.2),生物介质中的温度场方程(10.4.3),生物传热的 Pennes 方程及其解析解(10.4.4)等.

总之,第二版继续保持第一版的基本结构,新增加的内容自然嵌入各个章节.本书分上下两卷:上卷为第 1~4 章,下卷为第 5~10 章.下卷的页码与章节顺接上卷,上卷的封底二维码内有全书的参考文献、附录、索引等内容.

本书第二版的出版得到南京大学物理学院和中国科学院噪声与振动重点实验室的资助.

作者

2018年10月

第一版前言

声学是研究声波的产生、传播、接收及其效应的科学，属于物理学的一个分支。声学具有极强的交叉性与延伸性，它与现代科学技术的大部分学科发生交叉，形成了若干丰富多彩的分支。近年来，声学的研究与新材料、新能源、医学、通信、电子、环境以及海洋等学科紧密结合，取得了巨大的进展。可以说声学在现代科学技术中起着举足轻重的作用，对当代科学技术的发展、社会经济的进步、国防事业的现代化，以及人民物质精神生活的改善与提高，发挥着极其重要甚至不可替代的作用。因此，声学学科已经大大超越了物理学的经典范畴，而成为包括信息、电子、机械、海洋、生命、能源等学科在内的充满活力的多学科交叉科学。

声音是人类最早研究的物理现象之一，声学是经典物理学中历史最悠久，并且当前仍处于前沿地位的物理学分支学科。现代声学可以追溯到 1877 年瑞利出版的《声学原理》，该书总结了 19 世纪及以前三百年的大量声学研究成果，集经典声学的大成，开创了现代声学的先河。20 世纪，由于电子学的发展，使用电声换能器和电子仪器设备可以产生、接收和利用各种频率、波形、强度的声波，大大拓展了声学研究的范围。

现代声学中最初发展的分支是建筑声学和电声学以及相应的电声测量；随着频率范围的扩展，又发展了超声学和次声学；由于手段的改善，进一步研究了听觉，发展了生理声学和心理声学；由于对语言和通信广播的研究，发展了语言声学；在第二次世界大战中，开始把超声广泛用于水下探测，促使水声学得到很大的发展；20 世纪初以来，特别是 20 世纪 50 年代以来，由于工业、交通等事业的巨大发展，出现了噪声环境污染问题，从而促进了噪声、噪声控制、机械振动和冲击研究的发展。随着高速大功率机械的广泛应用，非线性声学受到普遍重视。此外还有音乐声学、生物声学。这样，逐渐形成了完整的现代声学体系。现代声学是科学、技术，也是艺术的基础。

今天，人们研究的声波频率范围已从 10^{-4}Hz 到 10^{13}Hz ，覆盖 17 个数量级。根据人耳对声波的响应不同，把声波划分为次声（频率低于可听声频率范围，大致为 $10^{-4} \sim 20\text{Hz}$ ）、可听声（频率在 $20\text{Hz} \sim 20\text{kHz}$ ，即人耳能感觉到的声）和超声（频率在 20kHz 以上的声）。根据声学与不同学科的交叉，声学又可分为若干个不同的分支，如水声学和海洋声学（与海洋科学的交叉）、生物医学超声学（与医学的交叉）、超声电子学（与电子科学的交叉）、超声检测和成像技术（与多学科的交叉）、通信声学和心理声学（与生命科学、通信学科的交叉）、生物声学（与生物学的交叉）、环

境声学(与环境科学的交叉)、地球声学(与地球科学的交叉)、语言声学(与语言学、生命科学的交叉),等等。

总之,声学的内容十分广博,各个学科分支也有其独特的研究方法和手段,以及研究对象.因而本书写作的关键是内容的选择,通过分析现有“声学基础”和“理论声学”教材,作者仍然循着“传播—辐射—散射—接收”这个基本思路来选择内容.但与传统的声学教材不同,本书忽略了振动部分的内容(这部分的内容往往占到“理论声学”的三分之一),而把所有的篇幅都用在讲述声学理论和方法上.另外值得一提的是,本书完全没有涉及固体介质中的声场与波.

本书是为南京大学物理学院声学专业研究生开设“理论声学”课程而编写的,为了达到提高的目的,选择内容有一定深度.此外,为了方便阅读,数学推导尽量详细.主要内容叙述如下.

第1章讲述理想流体中声波的基本性质,介绍声波方程、声场的基本性质、行波解和平面波展开、平面界面上声波的反射和透射,以及声波的度量和分析方法;第2章讲述无限空间中声波的辐射,介绍多极子展开方法、柱和球状声源的辐射、界面附近的声源辐射、有限束超声场和非衍射波,以及声波与声源的相互作用;第3章讲述声波的散射和衍射,介绍柱体和球的散射、非均匀区域的散射、屏和楔的声衍射,以及逆散射和衍射CT理论;第4和第5章讲述管道和腔体中的声场,介绍等截面波导中声波的传播和激发、突变截面波导及平面波近似、缓变截面管道中平面波的传播、腔体中的模式展开理论、扩散声场、Helmholtz共振腔,以及二个腔的耦合;第6章讲述非理想介质中的声波,介绍非理想流体中的声波方程、耗散介质中的声波、管道和狭缝中的平面波、黏滞对声辐射的影响,以及流体和生物介质中声吸收;第7章讲述层状介质中的声波,介绍平面层状波导、连续变化层状波导、WKB近似方法,以及几何声学;第8章讲述运动介质中的声波,介绍匀速流动介质中的声波、运动声源激发的声波、缓变非均匀流动介质中的声波,以及不稳定流产生的声;第9和第10章讲述有限振幅声波的传播及其产生的物理效应,介绍理想介质中的有限振幅平面波、黏滞和热传导介质中的有限振幅波、色散介质中的有限振幅声波,有限振幅声束的传播.物理效应主要介绍声辐射压力和声悬浮、声流理论以及声空化效应.

本书的出版得到南京大学985(III)工程、国家自然科学基金委员会和江苏高校优势学科建设工程资助项目的资助.

作者

2011年12月

目 录

(上 卷)

第 1 章 理想流体中声波的基本性质	1
1.1 理想流体中的声波方程	1
1.1.1 Lagrange 坐标下的波动方程	1
1.1.2 Euler 坐标下的守恒定律	6
1.1.3 小振幅声波方程和线性化条件	11
1.1.4 速度势和二阶非线性方程	15
1.1.5 Lagrange 坐标与 Euler 坐标的关系	18
1.1.6 曲线坐标系中的声波方程	20
1.2 声场的基本性质	24
1.2.1 声场的能量关系和 Lagrange 密度	24
1.2.2 初始条件、边界条件以及局部反应界面	28
1.2.3 时域和频域声场的唯一性	34
1.2.4 叠加原理和反演对称性	39
1.2.5 声学中的互易原理	40
1.3 行波解和平面波展开	42
1.3.1 直角坐标中的平面行波和驻波场	43
1.3.2 角谱展开、倏逝波和能量关系	50
1.3.3 有源问题的平面波展开法和三维 Green 函数	53
1.3.4 球面行波、平面波展开和 Weyl 公式	55
1.3.5 柱面行波、二维 Green 函数及其平面波展开	59
1.4 平面界面上声波的反射和透射	66
1.4.1 介质界面上的反射、透射及零折射率	67
1.4.2 阻抗界面上的反射和吸声系数以及蠕行波	74
1.4.3 瞬态平面波的反射和透射	78
1.4.4 有限宽波束的反射和透射	83

1.4.5	人工结构表面及广义 Snell 定律	89
1.5	隔声和离散分层介质	92
1.5.1	隔声的基本规律和质量作用定律	93
1.5.2	薄板的隔声和“吻合”效应	97
1.5.3	薄板对瞬态波和球面波的透射	99
1.5.4	N 层结构的传递矩阵法	102
1.5.5	N 层结构的阻抗率传递法	105
1.5.6	周期分层结构与能带特性	107
1.6	声波的度量、测量和分析	112
1.6.1	声压级、加权声压级和倍频程带	112
1.6.2	声波的相干性和拍的概念	121
1.6.3	声波接收的基本原理和声强计	125
1.6.4	时频分析和声学中的不确定关系	130
1.6.5	声学中的随机信号和相关函数	134
第 2 章	无限和半无限空间中声波的辐射	139
2.1	多极子展开和 Sommerfeld 辐射条件	139
2.1.1	单极子和自由空间的 Green 函数	139
2.1.2	偶极子声辐射和点力源的辐射	145
2.1.3	纵向和横向四极子声辐射	151
2.1.4	小区域体源辐射和湍流声辐射	154
2.1.5	小区域面源辐射以及 Sommerfeld 辐射条件	157
2.2	组合声源和相控阵理论	160
2.2.1	两个同相脉动球源的组合辐射	161
2.2.2	线阵的辐射和相控阵	166
2.2.3	声束的聚焦和声棱镜聚焦	169
2.2.4	任意弯曲声束的形成	172
2.2.5	Airy 声束和能量有限的 Airy 束	176
2.3	圆柱状声源的辐射	183
2.3.1	柱坐标中分离变量法和 Hankel 变换	183
2.3.2	振动圆柱体向无限空间中的辐射	194
2.3.3	圆柱体上的活塞振动和稳相法	200
2.3.4	点源声场的柱函数展开	208

2.3.5	存在刚性圆柱时空间的 Green 函数	212
2.3.6	螺旋波模式及其相控阵生成方法	215
2.4	球状声源的辐射	220
2.4.1	球坐标中的分离变量法	220
2.4.2	球面振动向无限空间的辐射	229
2.4.3	点源声场的球函数展开	239
2.4.4	存在刚性球时空间的 Green 函数	242
2.4.5	圆锥区域内波动方程的解	245
2.5	平面界面附近的声辐射	251
2.5.1	声场的 Green 函数表示以及刚性平面	251
2.5.2	阻抗平面前点声源的辐射	256
2.5.3	分层平面前点声源的辐射和侧面波	260
2.5.4	无限大刚性或阻抗障板上的活塞辐射	271
2.5.5	圆形刚性活塞辐射的瞬态解	284
2.5.6	自由空间的圆盘辐射	287
2.5.7	平面上非相干源的辐射	289
2.6	有限束超声场和非衍射波	293
2.6.1	有限束超声场和抛物近似	293
2.6.2	Gauss 和 Bessel 函数型声场以及非衍射声场	297
2.6.3	非衍射波束的广义谱展开和经典 X 波	299
2.6.4	等声速非衍射波束和能量有限的波	305
2.6.5	超声速非衍射波束和高阶 X 波	305
2.7	声波与声源的相互作用	308
2.7.1	无限大膜横向自由振动的声辐射	308
2.7.2	膜横向振动与声辐射的耦合	310
2.7.3	刚性障板上圆膜振动的耦合声辐射	316
2.7.4	无限大薄板中行波的声辐射	321
2.7.5	薄板振动与声辐射的耦合	325
2.7.6	刚性障板上薄板振动的耦合声辐射	329
第 3 章	声波的散射和衍射	333
3.1	柱体和球体的散射	333
3.1.1	无限长圆柱体对平面波的散射	333

3.1.2	球体对平面波的散射和 Rayleigh 散射	341
3.1.3	水中气泡的散射和共振散射	351
3.1.4	刚性和阻抗型球体对球面波的散射	353
3.1.5	椭圆柱体的散射和修正 Mathieu 函数	356
3.2	任意形状散射体的散射	361
3.2.1	Kirchhoff 积分公式	361
3.2.2	散射的积分方程方法	365
3.2.3	可穿透散射体的散射	368
3.2.4	存在多个散射体情况以及多重散射	372
3.2.5	散射体附近的声辐射	374
3.2.6	表面散射和声景的设计	375
3.3	非均匀区域的散射	384
3.3.1	非均匀区域的声波方程及其散射形式	384
3.3.2	Lippmann-Schwinger 积分方程	389
3.3.3	Born 级数和 Born 近似	392
3.3.4	非稳态不均匀区对声波的散射	394
3.3.5	随机分布散射体的散射和相干散射	400
3.4	刚性屏和楔的声衍射	405
3.4.1	刚性半无限大屏对平面波的衍射	405
3.4.2	刚性屏对二维柱面波的衍射	412
3.4.3	刚性楔对二维和三维声波的衍射	413
3.4.4	楔形区内的声场和镜像法	418
3.4.5	刚性地面上的有限屏及数值计算	421
3.5	周期结构中声波的散射和低频近似	427
3.5.1	周期介质和能带结构	427
3.5.2	低频有效声速和各向异性	434
3.5.3	二维固体周期结构中的弹性波	437
3.5.4	一维均质化近似的多尺度展开理论	446
3.5.5	高维均质化近似和各向异性	450
3.6	逆散射和衍射 CT 理论	453
3.6.1	边界反演的 Kirchhoff 近似和背向散射	454
3.6.2	非均匀介质反演的 Born 和 Rytov 近似	457

3.6.3	二维近场衍射 CT 理论和滤波反传播方法	460
3.6.4	反射模式的衍射 CT 和谱估计技术	465
3.6.5	声源反演和 Tikhonov 正则化方法	469
第 4 章	管道中的声传播和激发	473
4.1	等截面波导中声波的传播	473
4.1.1	刚性壁面的等截面波导和截止频率	473
4.1.2	阻抗壁面的等截面波导和模式衰减	479
4.1.3	刚性和阻抗壁面的矩形波导以及平面波条件	482
4.1.4	刚性和阻抗壁面的圆形波导	489
4.1.5	刚性壁面的椭圆柱体波导和 Mathieu 方程	493
4.2	等截面波导中声波的激发	501
4.2.1	波导中单频声波的振动面激发	501
4.2.2	振动面激发的瞬态波形及其特征	506
4.2.3	频率域 Green 函数和脉动球的辐射阻抗	508
4.2.4	波导中的时间域 Green 函数	513
4.2.5	管道壁面振动激发的声场	515
4.2.6	有限长管道中的驻波和非均匀阻抗的反射	517
4.3	突变截面波导及平面波近似	522
4.3.1	模式展开法和积分方程方法	523
4.3.2	平面波近似和体积速度连续	529
4.3.3	常见的管道系统和声阻抗转移公式	534
4.3.4	驻波管及吸声材料法向系数的测量	541
4.3.5	具有 N 节扩张/收缩管 (或周期截面) 的管道	544
4.4	集中参数模型	547
4.4.1	典型子结构的集中参数模型和 Helmholtz 共振腔	548
4.4.2	具有子结构的管道系统和声滤波器	550
4.4.3	声学二端口网路和集中参数系统	554
4.4.4	具有 N 个旁支结构的管道	558
4.4.5	周期旁支结构的管道和能带结构	560
4.5	缓变截面管道中的平面波	564
4.5.1	Webster 方程和 Salmon 号筒	564
4.5.2	指数曲线形号筒和出声口的声阻抗	567

4.5.3 其他 Salmon 号筒和一般 Salmon 号筒	569
4.5.4 Webster 方程的 WKB 近似	572
4.5.5 一般管道的 WKB 近似以及转折点	574

《现代声学科学与技术丛书》书目

(下 卷)

第 5 章 腔体中的声场
第 6 章 非理想流体中声波的传播和激发
第 7 章 层状介质中的声波和几何声学
第 8 章 运动介质中的声传播和激发
第 9 章 有限振幅声波的传播
第 10 章 有限振幅声波的物理效应
主要参考书目
附录
索引 (上下卷)

第 1 章 理想流体中声波的基本性质

理想流体是指可以忽略诸如黏滞、热传导和弛豫等不可逆过程的流体. 与黏滞流体或者固体不同, 理想流体内任意一个曲面上的作用力 (邻近流体质点的压力) 平行于这个曲面的法向, 而与流体的运动无关. 在声波频率不太高或者远离边界处 (见第 6 章讨论), 大部分流体 (例如纯净的水和干燥的空气) 可看作理想流体. 本书主要围绕理想流体中声波的激发、传播和接收展开. 因此, 我们在本章中首先介绍理想流体中声波的基本性质, 主要包括: 声波方程, 导出理想流体中小振幅声波传播的方程; 声场的基本性质, 介绍声场的能量关系、叠加原理和互易原理; 行波解和平面波展开, 初步介绍声波方程的行波解, 重点在平面波展开方法; 声波在平面界面上的反射和透射, 关注的重点是瞬态或者有限宽波束声波的反射和透射; 隔声和离散分层介质, 重点介绍分层介质的传递矩阵法和阻抗传率递法, 并简单介绍分层周期介质中的能带特性. 最后一节介绍声波的度量和分析方法.

1.1 理想流体中的声波方程

当流体中某个流体元 Q 受到外界的扰动 (如受到周期性外力的作用) 而压缩和膨胀时 (引起流体元的压力、密度或者温度的变化), 由于流体的压缩性, 与 Q 毗邻的流体元 W 必定作相反的运动 (膨胀和压缩), W 的膨胀和压缩又引起与其毗邻的点 H 的压缩和膨胀, 等等. 这样, 流体元 Q 受到的扰动 (压力、密度或者温度的变化) 就以波动的形式向外传播, 形成所谓**声波**. 因此, 声传播过程是流体运动的特殊形式, 其运动方程完全由流体力学方程简化而来. 值得指出的是, 流体元在数学上是一个几何点, 可以用空间坐标表示, 但在物理上仍然包含 10^{23} 个分子, 以至宏观的热力学关系在流体元 Q 中成立. 这样的近似称为**连续介质近似**. 本节我们首先讨论流体运动的二种基本的描述方法, 然后导出声波传播和激发所满足的方程. 最后, 给出曲线坐标中的波动方程, 特别是关注声波方程的坐标变换不变性.

1.1.1 Lagrange 坐标下的波动方程

理想流体的宏观运动状态由流体元的密度、速度矢量 (或者位移矢量)、所受到的压力 (或者压强) 和所具有的温度 (或者熵) 完全确定. 寻找这些物理量随时间和空间的变化规律是流体力学的基本任务. 为了寻找这些变化规律, 首先介绍流体

运动的二种描述方法, 即 Lagrange 方法和 Euler 方法.

Lagrange 方法 如图 1.1.1, 以流体元的初始坐标 $\mathbf{R}_0 = (a, b, c)$ 来识别一个特定流体元 Q , 在时刻 t , 该流体元 Q (注意: 同一个流体元) 运动到位置 $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$, 其中 (X, Y, Z) 是建立在空间的坐标系 (注意: 坐标系 (X, Y, Z) 可以完全不同于坐标系 (a, b, c)). 显然, $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ 应该是 (a, b, c) 和 t 的连续函数, 即

$$X = X(a, b, c, t); Y = Y(a, b, c, t); Z = Z(a, b, c, t) \quad (1.1.1a)$$

因此, 该流体元不管什么时候、运动到哪里, 它的 Lagrange 坐标 (a, b, c) 是不变的, 故该流体元的速度矢量为

$$\mathbf{v}(a, b, c, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(a, b, c, t + \Delta t) - \mathbf{R}(a, b, c, t)}{\Delta t} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \quad (1.1.1b)$$

同样, 其他物理量也是 (a, b, c) 和 t 的函数, 如流体元的密度可表示为

$$\rho = \rho(a, b, c, t) \quad (1.1.2)$$

其意义为: 初始时刻 ($t = 0$) 位于 (a, b, c) 的流体元, 经 $t > 0$ 时间, 当它运动到 $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ 时的密度. 如果 $d\rho/dt > 0$, 表明流体元受到压缩; 反之, 如果 $d\rho/dt < 0$, 表明流体元膨胀. 因此, 在 Lagrange 坐标下, 独立变量可取为坐标 (a, b, c) 和时间 t .

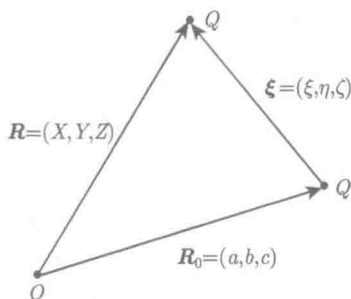


图 1.1.1 Lagrange 方法

质量守恒方程 设流体元 Q 偏离平衡位置的矢量为 $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ (如图 1.1.1), 则

$$X = a + \xi; Y = b + \eta; Z = c + \zeta \quad (1.1.3a)$$

(ξ, η, ζ) 也是 (a, b, c) 的函数. 设初始时刻, Q 点的流体元占据的小体积为平行于坐标轴的长方体, 边长分别为 da, db 和 dc , 体积为 $\Delta_0 \equiv dadbdc$, 长方体中心坐标为 (a, b, c) ; 当 $t > 0$ 时, 由于流体的运动, 原来平行于坐标轴的长方体变成平行六面

体, 中心坐标为 (X, Y, Z) , 三条边在坐标轴上的投影分别为

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial a} da, \quad \frac{\partial Y}{\partial a} da, \quad \frac{\partial Z}{\partial a} da \\ \frac{\partial X}{\partial b} db, \quad \frac{\partial Y}{\partial b} db, \quad \frac{\partial Z}{\partial b} db \\ \frac{\partial X}{\partial c} dc, \quad \frac{\partial Y}{\partial c} dc, \quad \frac{\partial Z}{\partial c} dc \end{aligned} \quad (1.1.3b)$$

因此平行六面体的体积为

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial a} & \frac{\partial Y}{\partial a} & \frac{\partial Z}{\partial a} \\ \frac{\partial X}{\partial b} & \frac{\partial Y}{\partial b} & \frac{\partial Z}{\partial b} \\ \frac{\partial X}{\partial c} & \frac{\partial Y}{\partial c} & \frac{\partial Z}{\partial c} \end{vmatrix} da db dc \quad (1.1.3c)$$

设流体元初始时刻和 t 时刻的密度分别为 ρ_0 和 ρ , 质量守恒要求 $\rho\Delta = \rho_0\Delta_0$, 因此质量守恒定律的 Lagrange 形式为

$$\rho \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} & \frac{\partial \eta}{\partial a} & \frac{\partial \zeta}{\partial a} \\ \frac{\partial \xi}{\partial b} & 1 + \frac{\partial \eta}{\partial b} & \frac{\partial \zeta}{\partial b} \\ \frac{\partial \xi}{\partial c} & \frac{\partial \eta}{\partial c} & 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \end{vmatrix} = \rho_0 \quad (1.1.3d)$$

得到上式, 利用了方程 (1.1.3a) 的关系.

运动方程 根据牛顿第二定律, 位于点 $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ 的流体元 Q 的运动方程为

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= -\frac{\partial P}{\partial X} + \rho F_X \\ \rho \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} + \rho F_Y \\ \rho \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} &= -\frac{\partial P}{\partial Z} + \rho F_Z \end{aligned} \quad (1.1.4a)$$

其中, (F_X, F_Y, F_Z) 是外力密度 (单位质量流体受到的力) 的三个分量, P 为流体元受到的压强, 当流体元位于 (X, Y, Z) 点时, 受到的压力为 $P(X, Y, Z, t)$. 方程 (1.1.4a) 中包含对 (X, Y, Z) 的偏导数, 而我们希望像方程 (1.1.3d) 那样用独立变量 (a, b, c, t) 表示. 注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial a} &= \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial a} \\ \frac{\partial P}{\partial b} &= \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial b} + \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial b} \\ \frac{\partial P}{\partial c} &= \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial c} + \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial c} + \frac{\partial P}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial c}\end{aligned}\quad (1.1.4b)$$

分别用三组系数 $(\partial X/\partial a, \partial Y/\partial a, \partial Z/\partial a)$, $(\partial X/\partial b, \partial Y/\partial b, \partial Z/\partial b)$ 以及 $(\partial X/\partial c, \partial Y/\partial c, \partial Z/\partial c)$ 乘方程 (1.1.4a) 并把所得方程相加得到

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - F_X\right) \frac{\partial X}{\partial \gamma} + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - F_Y\right) \frac{\partial Y}{\partial \gamma} + \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - F_Z\right) \frac{\partial Z}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \gamma} \quad (1.1.5a)$$

其中, 分别取 $\gamma = a, b, c$. 由方程 (1.1.3a), 方程 (1.1.5a) 变成 (为了方便, 假定外力密度为零)

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \frac{\partial \zeta}{\partial a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial a} \quad (1.1.5b)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial b}\right) + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \frac{\partial \zeta}{\partial b} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial b} \quad (1.1.5c)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial c} \quad (1.1.5d)$$

这就是 Lagrange 坐标下的运动方程. 可见, 在 Lagrange 描述中, 我们跟踪每个流体元的运动, 物理意义很明显, 根据牛顿第二定律容易写出流体元的运动方程. 但是, Lagrange 描述最大的缺点是: $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ 随流体元一起运动 (因而是非惯性参考系), 我们无法知道流体中某一特定点 (如点 M)、在特定时刻 (如时刻 t) 的运动状态. 因为, 我们很难知道 M 点的流体在 t 时刻是从哪里流过来的. 而且 Lagrange 坐标下的运动方程 (1.1.5b)~(1.1.5d) 非常复杂.

但在处理一维非线性声学问题时, 方程 (1.1.3d) 和 (1.1.5b) 变得非常简单. 在一维情况下, 方程 (1.1.3d) 和 (1.1.5b) 分别简化为

$$\rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right) = \rho_0 \quad (1.1.6a)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial a} \quad (1.1.6b)$$

即

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial a} \quad (1.1.7a)$$