



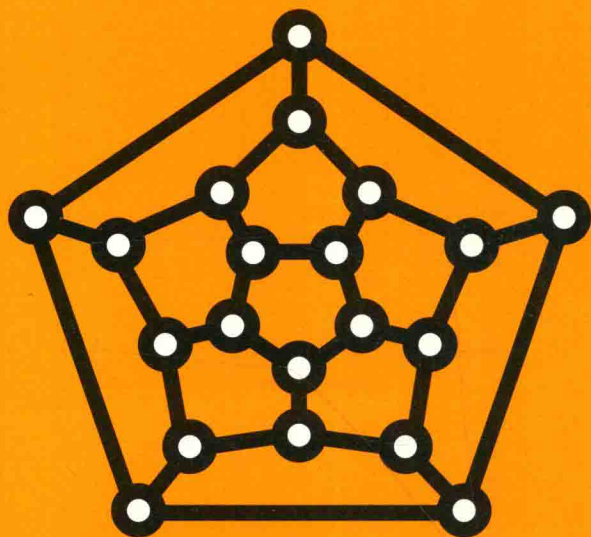
iCourse · 教材
高等学校通识课程系列

数学之旅

——数学的抽象与心智的荣耀

Mathematical
Journey

王维克 编著



非外借

高等教育出版社



iCourse · 教材
高等学校通识课程系列

数学之旅

——数学的抽象与心智的荣耀

王维克 编著

Mathematical
Journey

图书在版编目（CIP）数据

数学之旅：数学的抽象与心智的荣耀 / 王维克编著 .

-- 北京：高等教育出版社，2019.4

iCourse · 教材

ISBN 978-7-04-045976-0

I . ①数… II . ①王… III . ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV . ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 170813 号

数学之旅

——数学的抽象与心智的荣耀

SHUXUEZHILV

SHUXUE DE CHOUXIANG YU XINZHI DE RONGYAO

策划编辑	于丽娜
责任编辑	于丽娜
书籍设计	张志奇
插图绘制	杜晓丹
责任校对	陈 杨
责任印制	赵义民
出版发行	高等教育出版社
社 址	北京市西城区德外大街4号
邮政编码	100120
印 刷	北京中科印刷有限公司
开 本	787mm×1092mm 1/16
印 张	15
字 数	320 千字
购书热线	010-58581118
咨询电话	400-810-0598
网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
网上订购	http://www.hepmall.com.cn http://www.hepmall.com http://www.hepmall.cn
版 次	2019 年 4 月第 1 版
印 次	2019 年 4 月第 1 次印刷
定 价	33.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，
请到所购图书销售部门联系调换
版权所有，侵权必究
物 料 号 45976-00

本书在“数学之旅”MOOC的基础上编写而成，共分九章，每章围绕一个主题，通过一些具体的例子娓娓道来，让读者慢慢体会数学的来龙去脉。对于初涉高等数学的读者而言，它更像一门数学导论课，会告诉你现代数学思维的一些特点，读者能感觉到这本书很“给力”，对数学学习有事半功倍之效；对喜欢数学的非专业人士而言，它是数学大餐前的“开胃酒”，会吸引你到数学的蓝海稍作探究；对于深受“数学之苦”的过来者，阅读本书会有“原来是这么回事”的顿悟。总之，本书的阅读将是一次轻松的数学之旅，对读者的数学课程学习和数学思维的形成，在心智和心理上都将有所帮助。

数学的重要特征是它的抽象性，这一特征是令人生畏的。但也正是有了这一特征，人们可以在繁杂的世界中用数学逐步理解宇宙深处隐藏着的伟大设计图的语言，可以用理性的思维达到超出人类感官所及的宇宙的根本。而这一切正是数学的魅力所在，也是数学在人类历史上起着其他科学不可替代作用的重要原因。但这也是很多学生畏惧数学或学习数学的困难所在。

本书针对这一情况，试图和读者一起从思想上重走一遍前辈先哲们走过的路，作一次轻松的数学之旅。在旅途中我们不断揭示一些数学概念和数学思想形成的过程和历史，从一些典型的例子中理解数学抽象的必要性和魅力，从点点滴滴的顿悟中培养数学抽象的能力，真实体会数学抽象所表现出的人类心智的荣耀。同时，本书试图在这一抽象思维的旅行中，就学习数学时如何克服抽象带来的困难谈一些个人的体会。

好的旅行不是旅游点的累积，而是心与自然、心与心的交流。我们的“数学之旅”不仅仅期待你知道一些数学概念、了解一些数学知识，更期待你开始对数学的抽象有了体会，意识到“数学的抽象”其实并不抽象，理解数学抽象的必要性和它在人们认识世界的过程中的重要性，感受到数学思维所表现出的神奇魅力。我们希望这本书的阅读是一次轻松的数学之旅，可以帮助读者克服数学学习中对抽象的畏难情绪，潜移默化地培养出数学抽象的能力，对读者的数学课程的学习和数学思维的形成，在心理和心智上都有所帮助。如果初涉现代数学领域的读者通过这本书的阅读，可以从对数学的畏难情绪中解脱出来，开始喜欢数学，甚至更进一步学会驾驭一些数学概念来理解或者解决实际问题，那么这本书的目的就达到了！我们有信心使这本书的阅读成为一次轻松的“抽象”旅行。

阅读本书的读者需要学习过微积分和线性代数（或者高等代数）的最基本知识，很多学校的文科数学课程就有这两方面的内容。当然，学习过大学一年级数学课程的理工科学生完全没有问题，一些对数学有兴趣的高中生也可以比较顺畅地阅读大部分内容。

王维克

2017年3月

第一章	数学抽象，为了人类心智的荣耀	2
	003 1.1 开头的话	
	004 1.2 数学是什么	
	009 1.3 数学思维的特点	
	019 1.4 数学学习	
第二章	无穷是个新世界——无穷集合	28
	029 2.1 梵塔之谜	
	032 2.2 希尔伯特旅馆	
	036 2.3 有理数的“空隙”	
	041 2.4 无穷集合的基数	
	044 2.5 集合的长度	
第三章	从圆的面积谈起——微积分学	52
	053 3.1 古典的微积分	
	058 3.2 牛顿 - 莱布尼茨的微积分	
	068 3.3 微积分的发展	
第四章	走出平面国——线性空间	80
	081 4.1 走出平面国	
	085 4.2 鸡兔同笼问题	
	090 4.3 向量组的秩与方程组的解	
	095 4.4 向量的空间——线性空间	
第五章	距离和测地线——泛函分析	106
	107 5.1 从距离说起	
	114 5.2 度量空间和赋范空间	
	120 5.3 希尔伯特空间	
	124 5.4 拓扑空间	

第六章	落在城隍庙的地图——不动点定理	134
	135 6.1 落在城隍庙的地图	
	138 6.2 搅动的咖啡	
	144 6.3 无穷维的赋范空间	
	147 6.4 不动点定理在经济学中的应用	
第七章	声音的本质——傅里叶分析	158
	159 7.1 声音的本质是什么	
	164 7.2 傅里叶定理	
	167 7.3 音乐与数学	
	171 7.4 傅里叶定理的启示	
	174 7.5 傅里叶分析的发展	
第八章	海岸线的长度——混沌与分形	184
	185 8.1 混沌带来新思维	
	193 8.2 分形	
	200 8.3 混沌游戏	
第九章	哥德尔不完全定理	210
	211 9.1 第一次数学危机	
	213 9.2 第二次数学危机	
	216 9.3 第三次数学危机	
	219 9.4 科学巨匠哥德尔	
	221 9.5 哥德尔不完全定理	
后记		228
参考文献		230

Chapter

1

第一章

数学抽象，为了人类心智的荣耀

本章首先通过对超弦理论等科学成就非常粗浅的介绍，讲述数学的目的是为了理解和揭示自然，同时也是科学研究的基本语言。接着，用一些公众熟悉的例子（例如哥尼斯堡的七桥问题）介绍数学抽象的必要性和魅力，并就一些简单的数学例子介绍数学抽象的一些特点。

1.1 开头的话

数学很抽象，这是大多数学习过数学的人的体会。特别进入大学的数学课程学习，或者研究生阶段的数学课程学习，这种体会会更加深刻。为什么数学会这样抽象呢？这是很多学习数学的人苦恼的问题。有时我们甚至感觉是数学把原来简单的事情搞得很抽象。譬如举个最简单的例子——距离，这是我们中学就接触过的概念，大家可能想，按中学课本定义，距离就是联结两点的直线段的长度。但事情不那么简单，两个点的距离是这样，但两条曲线之间的距离怎么办，怎么联结呢？还有两个人之间的距离，张三和李四之间的距离是他们各自重心的距离，还是两人鼻尖到鼻尖的距离？再玄妙一点，可否给出两个人之间心灵的距离？这里的问题是，需要给一个可以涵盖所有对象之间的距离定义，要有普适性。这是一个令人着迷又令人烦恼的问题，解决这一问题的办法

► 我们不妨从这里就开始思考如何给出一个可以涵盖本段描述的几种情形的距离。

就是抽象。◀ 如何抽象呢？本书后面章节会涉及这一问题，但肯定是一个具有普适性的抽象定义，那么你阅读了相关章节，你会发现：“哦，距离变成这个样子了。”你就觉得，距离非要这个样子，而且你如果自己去做一个定义，也会做成这个样子，只有如此它才能涵盖一

般。所以，数学最重要的特点之一就在一般性，要通过繁杂的表象直面问题本质，这个特点决定了数学就是要依赖于抽象。

另外，数学要解决实际问题，本质上也是抽象，这是我和工程界交流时得到的体会。有一次我乘坐飞机时，碰到一个计算机领域的工程师，他说每天他面对的事情，就是老板给一堆数据，给一个目标，然后他的工作就是怎么通过这些数据实现这个目标。这个目标的实现需要一种抽象的能力，就是要找到和目标相关的因素和属性，而忽略一些和目标不相关的因素，其实就是找到问题的本质，这些就是数学学习过程中培养出的抽象能力。

这本书的一个重要的目的，就是通过到各个“数学景点”的旅行和探究，不断揭示什么是数学的抽象，如何进行抽象，体会抽象在解决问题过程中让人陶醉的魅力。这些揭示有的会就一个数学分支的发展从历史的角度来品味；有的会就一个专题从问题的提出、到理论的形成和不可思议的应用来把玩；有的“景点”小学生也都知道，但我们可以发掘出不同寻常的启示；有的“景点”

可能要用到数学专业研究生学习的概念，但我们也可以用通俗的讲法让中学生恍然大悟。总之，“数学之旅”这个题目让我们无拘无束，我们不需要像数学

► 希望通而不俗，让感兴趣的中学生看后可以理解不少章节，让数学系的研究生看后也有收获。

史那样，从古埃及的象形数字讲起；也不需要顾及内容的联系和完整性，去讲授一些未必有趣的内容；也不像一些中国式的旅游去追求到过多少旅游点，满足于到此一游。我们只需要选择一些有代表性的“数学景点”（这点非常重要），准备一些通俗和有趣的导游词，和读者一起，在阅读的过程中不断品味数学的魅力，在持续进行的心与心的交流中不断提升对数学的理解。◀

好，我们可以出发了！我有信心使得您的这次阅读是一次轻松有趣的“旅行”。

1.2 数学是什么

首先看一看数学是什么。在中学、小学，我们有一个说法，说数学是“数与形的科学”。这个说法不够完全和深刻，其实数学的疆界已经远远超出这一范畴。我们所处的世界并不是随意构成的，在它里面处处充满了规则。也就是说冥冥之中宇宙深处是有一个设计图的，这个设计图的语言是用数学语言写成的。科学发展的很多例子都说明这一点，可以说宇宙的伟大“设计师”是一个数学家。物理学、生命科学等自然科学会揭示世界是什么样子，但数学要告诉你，世界只能是什么样的。譬如说我们现在的地球是这个样子的，还有另外一个星球它可以用另外一个模式，不同于地球的模式，如果它逻辑上是可行的；当然，如果有人想象还有一个世界是其他样子，我们用数学予以证明，说这样一个模式不可能，因为逻辑上行不通。也可借用文献[1]中平行宇宙的说法，有着不同物理规律的不同宇宙，但它遵循的数学逻辑是通用的。科学史上有不少这样的例子，数学按照自己的逻辑独立地生成一套理论，物理发现正好借助这种数学的语言形成理论体系。其中，最著名的例子是1915年爱因斯坦提出相对论时用到黎曼几何，而黎曼几何是早于相对论在十九世纪中期诞生和发展的。黎曼几何及其运算方法成为广义相对论研究的有效数学工具，而相对论后

来的发展则受到整体微分几何的强烈影响。

这里，我们通过另外一个例子来简单地说明数学在人类认识世界时的伟大作用。有一本很好的科普书《宇宙的琴弦》（见文献[2]），跟我们这本书的名字一样的轻松，但实际的内容是很深刻的。◀这本书是介绍超弦理论的，说

的是自爱因斯坦以来，时间、空间和基本粒子的故事，是一本十分精彩的介绍超弦理论的科普读物。从这本书的内容可以看到，超弦理论实际上是数学认识世界又一个伟大的尝试。自爱因斯坦以来，人们一直追求对宇宙世界的大一统的一个理论。近代的物理学有两大支柱，

一个是前面提到的相对论，它为我们从大尺度认识世界提供一个崭新的看法；一个是量子力学，它可以使我们在原子和比原子更小尺度的世界畅通无阻。这两大理论使得我们从原子到星系的各个尺度对物理世界有很多深刻的认识，它们无疑是人们在不同尺度认识世界的伟大发现。但熟悉这两个领域的读者知道，在大多数情形下，这两大理论适用不同尺度的物理领域，一些情形下我们用相对论，另一些情形下我们用量子力学，一般不会同时需要它们。但在一些极端情形下，小尺度但大质量，例如黑洞的中心，这里面需要两个理论，当我们同时用到这两个理论的时候，还是有些不协调，甚至存在严重冲突的地方。正如《宇宙的琴弦》一书指出：

> 宇宙就可能是极端情形。在黑洞的中央，大量物质被挤压到一个极小的空间里：在大爆炸的时刻，整个宇宙从比沙粒还小的微尘中爆发出来。这些“小而重”的领域，体积很小，而质量大得惊人，所以量子力学和广义相对论应该一起走进来。以后我们会明白，当广义相对论和量子力学方程结合时，会像一辆破车，摇晃、颠簸、叮当哐啷，喷出一路废气。

从这里我们可以看到相对论和量子力学还没有达到我们对世界最深层的认识，还需要有一种更深刻的思想来协调。很多物理学家认为，超弦理论和 M - 理论是一个能够协调这些理论的崭新理论框架。

超弦理论可以借用文献[1]和[2]的描述作最粗略的介绍。我们想象有一个苹果，它是由原子构成的，原子又由电子、质子和中子等组成，质子、中子又

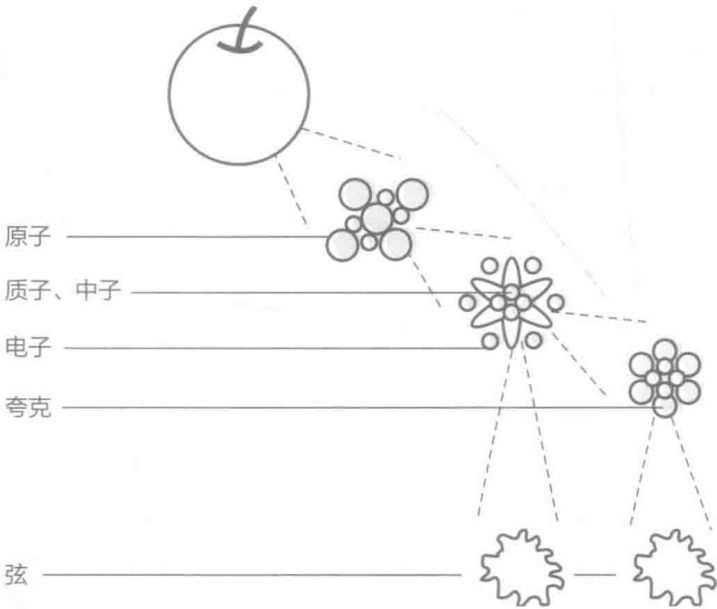
►《宇宙的琴弦》的中文译名要感谢译者找到一个好书名，原书的书名为
The Elegant Universe.

可能是由夸克这些东西组成（见图 1.1），正如《平行空间》（见文献 [1]）一书中指出的：

- > 自古希腊以来，哲学家就已推测：最终组成大块物质的可能是微小的叫做原子的粒子。今天，用我们强大的原子对撞机和粒子加速器，我们已经能够将原子分裂为电子和原子核，原子核又可分裂为更小的亚原子粒子。但我们找不到一个优雅的、简单的框架，从加速器发现的是几百个亚原子粒子，名字也很奇怪，如：中微子、夸克、介子、轻子、强子、胶子、W-玻色子，等等，很难相信，大自然在它最基本的层次上会产生这么多令人糊涂的奇异亚原子粒子群。
- > 弦理论和 M-理论是根据一个简单和美妙的思想，即构成宇宙的让人困惑的各种亚原子粒子，类似于可以在小提琴上演奏的音调，或在鼓膜上演奏的鼓点。

也就是说，所有这些亚原子的小粒子都是一个弦。通过这个弦的振动，造成了这样一些基本的粒子。这有点像我们看到一个电风扇，电风扇扇起来是一个圆盘，其实电风扇只有三根扇面，它一转起来就是一个圆盘。所以，所有的粒子实际上本质上不是个粒子，是一个弦在振动。它利用不同的频率和不同方法在振动，形成不同的基本粒子。这就是超弦理论。

图 1.1



超弦理论说：“一个弦，用不同的振荡模式，产生不同的质量和力荷，生成了不同的基本粒子。”当然，这个弦的尺度是非常非常小的，大约是原子核的一千亿亿分之一（是小数点后 18 个 0，如此之小是难以想象的）。用超弦来代替粒子可以解决相对论和量子力学之间的矛盾。这是超弦理论的最最简单的几个要点。那这里边涉及什么数学呢？超弦理论认为宇宙是 11 维的，除了我们通常的 3 维以外，还有 6 个蜷缩的空间维，1 个丢失的空间维和 1 个时间维。那么多余的维数的几何，决定着我们所观察到的这样一些物质的物理属性，比如说质量和电荷。这个蜷缩的空间，它是用在超弦理论形成之前已经存在的 Calabi-Yau 空间来描述的。这一空间是以宾夕法尼亚大学的数学家卡拉比（Eugenio Calabi）和哈佛大学的华裔数学家丘成桐（Shing-Tung Yau）两人的名字命名的。这又是一次伟大的“巧合”。数学家做的一些数学模型和数学理论放在那里，后来发现世界有一个地方跟它是吻合的，用它来描述还非常贴切，而且使得问题的描述更明了、更本质。这里再重复前面提到的一句话，数学告诉你世界只能是什么样。



二维码 1 - 1
蜷缩的维度

下面解释为什么说世界是 11 维的，这里用的是文献 [2] 的一个说明。设想一个小房，一个工人跨过几百米的峡谷拉着一根水管去浇花。这根水管远远看是一维的，但当我们把其中一小段拉近看，就不是一维的。我们想象一只小蚂蚁在这里爬动，那么对于这只小蚂蚁，这个空间是几维的呢？远远看水管是一维的，对这只小蚂蚁而言，它在这根水管上爬的时候，水管是二维的。如果它把这根水管咬穿了，它还可以进去，那这根水管就是三维的。所以另外的两个维度是蜷缩到里面的。这里是用一个通俗的道理来讲蜷缩空间。

超弦理论中好多东西跟我们原来想象的是不太一样的。威腾（Witten）是得过菲尔兹奖的一位物理学家。他说：“弦理论是 21 世纪的物理学偶然地落到 20 世纪的一个部分。”这个理论目前还没办法用实验来验证，超弦实在是太小了。超弦理论完全是从理论上的推导，一些物理学家认为超弦理论如此的美妙，它不可能不是一个真理。同时，“以往曾置那么多理论于死地的所有那些数学矛盾，在弦理论中全部不存在”（见文献 [1]）。上面的这个例子让我们的脑海中浮现出这样一幅美妙的图画，科学家们，包括物理学家和数学家，在用理性的手指去触摸天上的星辰，探索这个宇宙的各种秘密。科学就是用这样的理性

思维去思考、去探索世界最深最远的秘密。

数学的目的是为了理解和揭示自然，数学是我们了解和理解世界的最重要的工具。这里可以复述读者都已经知道的海王星被发现的故事。故事说，天王星被发现以后，人们开始研究它的运行轨道。人们发现它的实际运行轨道与根据太阳引力计算出的轨道有偏离，于是推测在天王星外还有一

颗行星，它产生的引力使天王星的轨道发生了偏离。英国天文学家亚当斯（John Couch Adams）和法国天文学家勒威耶（Urbain-Jean-Joseph Le Verrier）根据万有引力定律分别独立计算出了这颗尚未发现的行星的轨道。1846年，德国柏林天文台的天文学家加勒（Johann Gottfried Galle）对准勒威耶计算出的位置，真的看到了一颗蓝色的星星。发现海王星这个事实被人们认为是19世纪科学的重大胜利。

► 正因为当时发现海王星是算出来的，所以人们称海王星是“笔尖上发现的行星”。

► 可以设想这样一种场景，走进图书馆查找一本工科书籍，一不小心碰到一本书掉在地上，打开一看是一个积分公式，或者“希尔伯特空间”等。

正因为数学有如此重要的作用，数学已经成为科学研究的一个最重要的

工具，是科学研究的不可或缺的语言。我相信本书的很多读者是学工科的，如果你走进图书馆，翻开与你的专业相关的书，就会发现很多章节都是用数学语言写的，或者换句话说书中有不少数学名词和数学公式。我们会发现，很多情形下，在工科的学习或者研究中觉得有些很困难的东西，实际上其本质的障碍是在数学。这里

有两层含义，一层含义指学习过程中对有一些概念和思想不理解，是因为这些概念和思想是用数学描述的，数学功底不够就会产生障碍；第二层含义是研究问题时，对问题的本质的理解必须有一个数学的理解并提出一个数学的模型，你不知如何建立数学模型，或者已经有了数学描述，但数学上找不到解决的方法。一个非常普遍的现象是，从事科学研究或者做工程的人会碰到很多数学困难不得其解，而且很难找到一个合适的数学理论或者数学方法来解决。正因此，工科的研究生会学习不少数学课程。法国的工程师培养一直被认为是一个很好的模式，其中一个重要的举措就是在其培养期间有较多较好的数学课程。

在长期的数学研究中，数学也形成了自己学科的文化，譬如，数学永远

只承认严格的证明，而且是针对很一般的情形的证明。例如，我们证明三角形的内角和是 180 度，不是这个三角形或者那个三角形，而是平面上的所有三

角形内角和都是 180 度。同时，为了抓住问题的本质，我们必须创造一些“思想的自在物”，例如中学平面几何中定义的“点”。这里定义的“点”是没有大小的，这就是人为抽象出来的一个概念，因为天下就没有“没有大小的点”。◀ 正因为这样一些原因，我们的数学有

► 如果本书的读者中有中学生，当老师在平面几何中这样讲时，你不妨尝试和老师讨论如何给出一个没有大小的点。

太多的东西是靠抽象的思维去把握，再譬如说无穷大，它就是人们思维抽象的东西。所以这都是用理性的思维去想象，它是超出了人类的感官所及的宇宙的根本，是任何工具都不可以达到的领地。所以数学要求我们必须用数学的抽象来理解世界。

早期的数学与哲学结盟，譬如在数学史上留下名字的阿基米德，他是伟大的古希腊哲学家，同时也是物理学家和数学家。笛卡儿对现代数学的发展做出了重要的贡献，因将几何坐标体系公式化而被认为是解析几何之父，同时他还是西方现代哲学思想的奠基人。牛顿以后，数学和物理学是最好的盟友。21 世纪以后，数学对相对论、量子力学的发展起到至关重要的作用。现在数学已经能和化学、生命科学、经济学和社会科学联手。后面章节会提到，经济学诺贝尔奖的绝大部分得主都跟数学结缘。总之数学极大地影响了人类的生活，它是素质教育的重要工具，是人类文化的重要载体。

1.3 数学思维的特点

数学思维有什么特点呢？有的特点大家都会有共识的，譬如它精确，即指简洁、干净、没有歧义，还有数学的严密性。有的特点大家可能有不同看法，譬如“抽象”，不少人认为这不是数学正面的特点。我们这本《数学之旅》，着重是想通过一些具体的例子，让读者看到数学抽象的必要性和重要性，看到数学抽象不可思议的“正能量”。我们的做法是从思想上重走一遍前辈先哲走过的路，通过一些具体的例子，看如何抓住它的关键属性，使数学概念从繁杂的具体实例中脱颖而出，看如何抓住事物的本质，使问题得以完美的解决。当我



二维码 1 - 2
地球和老鼠

们自觉地以数学抽象为武器，并且实实在在从自己的手上通过数学抽象形成一些具体的数学概念并且解决一些问题的时候，就会从心里喜欢这个东西。在今后学习抽象的数学时，就会有豁然开朗的感觉。这就是这本书的目的。希望读者对数学抽象有一个新的认识，从害怕抽象，变得喜欢抽象，同时学会用数学的抽象来驾驭和解决一些问题。

先讨论数学的第一个特点：精确。我们通过几个简单的例子来说明。

第一个例子是在地球的赤道加一个箍，把地球紧紧地箍住，然后把把这个箍加长 1 米。现在问，一只小老鼠能不能通过去？毛泽东诗词中有一句说的是“坐地日行八万里”，不妨近似认为赤道的长是八万里（设为 L ），八万里（即 40 000 000 米）再加 1 米，这只小老鼠过得去吗？

我上课测试过很多次，很多同学摇头，觉得那么大的一个地球在赤道上只加 1 米，小老鼠应该过不去。到底小老鼠过不过得去，我们来算一下。首先

我们可以列出两个方程：

$$2\pi(R+x) = L+1, 2\pi R = L,$$

R 是地球的半径， x 是增加的高度。下面就考虑 x 的大小看是否可以让小老鼠通过去。上面的方程中所有量的单位都换成米，这两个式子联立，就得到 $2\pi x = 1$ ， x 约等于 0.16 米。0.16 米有多大呢？大概是我们成年男子把拇指和食指展开的长度，我们前面说的是小老鼠，那肯定过去了。所以有的时候，不能凭感觉，要养成一个习惯，算一算。这个小故事的版本很多，例如在文献 [3] 中有

介绍，俄罗斯著名的《数学分析》教材（见文献 [4]）也把它作为口试试题。◀

下面再讲一个例子。这个例子来自一档真实的电视益智节目，这档节目播出将近 27 年，一共 4500 集，留下记忆的就是这个以主持人名字命名的“蒙提霍尔问题”。20 世纪八九十年代，玛丽莲·瓦·莎凡在美国非常出名，她是吉尼斯世界纪录最高智商纪录 (228) 的保持者。她的专栏《请问玛丽莲》专门解答读者的各种问题，250 种报纸同时刊登，总发行量达到 3600 万份。她最有名的问答发生在 1990 年 9 月，就是“蒙提霍尔问题”。问题是这样的，假设某个益智节目的参赛者，可以在三扇门中选择一扇打开，其中一扇门后面是一辆汽车，另外两扇门后面各是一头山羊。在参赛者选了一扇门以后，主持人打开剩下两

► 注意，是地球赤道上加一个箍，真可谓牛气十足，再加微不足道的 1 米长。

► 文献 [5] 中有一个类似但从不同角度叙述的故事，我们把它作为习题留给读者。