普通高等教育土木工程研究生“十三五”规划教材

Engineering Continuum Mechanics

工程连续介质力学

郭少华　蒋树农　编著

中南大学出版社
www.csupress.com.cn

工程研究生“十三五”规划教材

工程连续介质力学

郭少华　蒋树农　编著

中南大學出版社
www.csupress.com.cn
·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

工程连续介质力学/郭少华，蒋树农编著. --长沙：中南大学出版社，2018.12

ISBN 978-7-5487-3528-1

Ⅰ.①工… Ⅱ.①郭… ②蒋… Ⅲ.①工程材料—连续介质力学—研究 Ⅳ.①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 286331 号

工程连续介质力学

GONGCHENG LIANXU JIEZHI LIXUE

郭少华　蒋树农　编著

□责任编辑　刘锦伟
□责任印制　易建国
□出版发行　中南大学出版社
　　　　　　社址：长沙市麓山南路　　　　邮编：410083
　　　　　　发行科电话：0731-88876770　　传真：0731-88710482
□印　　装　长沙印通印刷有限公司

□开　　本　787×1092　1/16　□印张 14.25　□字数 363 千字
□版　　次　2018 年 12 月第 1 版　□印次　2018 年 12 月第 1 次印刷
□书　　号　ISBN 978-7-5487-3528-1
□定　　价　68.00 元

内容简介

本书简洁、系统地叙述了张量分析、连续介质力学的基本概念和基本原理。在此基础上，分别介绍了各向同性与各向异性的弹性本构理论、塑性本构理论、黏性本构理论、损伤本构理论以及不可逆热力学内变量理论等，并且给出了这些本构理论在混凝土、岩石和土等工程材料上的具体应用。书中内容既传承连续介质力学经典的描述，也介绍了一些编著者提出的新理论，同时还在该领域著作中首次介绍了连续介质失稳的内容。

本书可作为高等院校土木工程、工程力学等学科博士研究生专业基础课教材或参考用书，也可供相关领域科技人员、教师阅读参考。

前 言

连续介质力学被誉为工程科学的“大统一理论(grand unified theory)”，是工程科学的理论基础和基本框架。连续介质力学涵盖了固体力学、流体力学和流变力学。连续介质力学对工程学科，尤其是土木工程学科研究生和科研人员而言，是非常重要而又十分深奥的一门专业基础课程。编著者十余年来一直在给土木工程、交通运输工程和工程力学博士生开授这门课程，更是从中体会到该门课程对奠定研究生科研基础、开拓研究生科研思路以及了解工程科学前沿动态起到了十分重要的积极作用，同时也认识到迫切需要一本能够适应相关学科领域的“连续介质力学”教材，正是这一动机促使编著者决心编著这本具有工程化背景的“连续介质力学”教材。

该教材课程内容的组织和编排，充分考虑了工程学科研究生的数理基础及研究需求，内容安排如下：第 1 章介绍了连续介质力学的研究方法和方程结构；第 2 章介绍了连续介质力学的数学表征——张量分析；第 3 章介绍了连续介质变形场分析，给出了不同构形下应变张量的定义；第 4 章介绍了连续介质应力场分析，给出了不同构形下应力张量的定义；第 5 章介绍了连续介质力学的基本定律以及哈密顿原理；第 6 章介绍了弹性本构理论，给出了线弹性、次弹性及超弹性本构方程；第 7 章介绍了塑性本构理论，给出了经典塑性本构方程及非经典塑性本构方程；第 8 章介绍了黏性本构理论，给出了牛顿黏性、黏弹性及黏塑性本构方程；第 9 章介绍了损伤本构理论，给出了弹性损伤、塑性损伤及黏性损伤本构方程及损伤演化方程；第 10 章介绍了不可逆热力学内变量理论，给出了现代本构理论的基本框架和若干应用；第 11 章介绍了混凝土材料本构建模的基本特点和若干经典模型；第 12 章介绍了岩石材料本构建模的基本特点和若干经典模型；第 13 章介绍了土壤材料本构建模的基本特点和若干经典模型；第 14 章介绍了连续介质力学几个重要的表观失稳理论。本教材在系统总结了几何表象下经典连续介质力学的基础上，还在主要章节加入了编著者在这一领域新的研究成果，即物理表象下的连续介质力学基本方程的模态化分析。

本教材的出版得到了中南大学土木工程学科“双一流”建设基金的支持，在此表示衷心的感谢，还要特别感谢杜金龙博士在本书撰写过程中给予的热情帮助。

由于作者知识、水平有限，书中难免有不足之处，敬请读者批评指正。

郭少华　蒋树农

2018.10.8 于岳麓山下

目 录

第1章 绪 论

1.1 连续介质力学基本假定

连续介质力学(continuum mechanics)是物理学(特别是力学)中的一个分支，是研究包括固体和流体在内的所谓“连续介质”宏观力学性质和规律的一门科学，例如，应力、应变、质量守恒、动量和角动量定理、热力学定律等。

连续介质力学的最基本假设是“连续介质假设”，即认为真实流体或固体所占的空间可以近似地看作连续地无空隙地充满着“质点”。质点所具有的宏观物理量(如质量、速度、压力、温度等)满足一切应该遵循的物理定律，例如质量守恒定律、牛顿运动定律、能量守恒定律、热力学定律以及扩散、黏性及热传导等输运性质。这一假设忽略物质的具体微观结构(对固体和液体微观结构研究属于凝聚态物理学的范畴)，而用一组偏微分方程来表达宏观物理量(如质量、速度、力等)。所谓质点指的是微观上充分大、宏观上充分小的分子团(也叫微元)。一方面，分子团的尺度和分子运动的尺度相比应足够大，使分子团中包含大量的分子，对分子团进行统计平均后能得到确定的值；另一方面，又要求分子团的尺度和所研究问题的特征尺度相比要充分地小，使一个分子团的平均物理量可看成是均匀不变的，因而可以把分子团近似地看成是几何上的一个点。对于进行统计平均的时间，还要求它是微观充分长、宏观充分短的。即进行统计平均的时间应选得足够长，使在这段时间内，微观的性质，例如分子间的碰撞已进行多次，在这段时间内进行统计平均能够得到确定的数值。进行统计平均的宏观时间也应选得比所研究问题的特征时间小得多，以至我们可以把进行平均的时间看成是一个瞬间。

与质点力学不同，由于连续介质力学最基本的假设是“连续介质假设”，其中所用的状态变量都是场的概念，即它们相对于坐标和时间的依存关系都是连续的。连续介质力学是一门唯象的理论，它是实验现象概括的总结和提炼。唯象理论对物理现象有描述与预言功能，但没有解释功能。

工程领域所遇到的物质都是由大量的微观粒子(如原子、分子)组成的，但连续介质力学并不考察单个粒子的运动规律，而是研究这些粒子运动的统计平均效应，即物质的宏观力学行为。因此，我们通常所说的宏观物质单元实际上包含了大量的粒子，并由此引进的宏观物理量，如温度、密度、应力、应变等都是相应的微观量的统计平均。基于这种认识，在连续介质力学中，真实的物质将被抽象为一个连续体。因为，在连续体中的宏观物理量一般要随物质点的改变而改变，所以关于连续介质力学的基本理论是在场论的基础上建立起来的。

连续介质力学的唯象模型要求：

1）在空间尺度上“宏观无限小、微观无限大”。此时存在两个特征尺度，一是外部特征尺度 L（如物体尺度、裂纹长度、载荷作用范围），另一个是材料内部特征尺度 l（如晶格尺度、骨料尺度、微裂纹尺度），只有当 $L/l \gg 1$ 时，连续介质力学的经典场论才成立。

2）在时间尺度上“宏观无限短、微观无限长”。宏观无限短是为了保证足以测量出宏观量随时间的变化，而微观无限长则主要是保证宏观量在统计上的意义。相应地可以定义两个特征时间尺度，也就是外部特征时间 T 和内部特征时间 τ（又称材料的弛豫时间）。同样，只有当 $T/\tau \gg 1$ 时，连续介质力学的经典场论才成立。

采用连续介质力学方法对岩石和混凝土等工程材料变形、强度、应力及本构方程进行探讨时，假设整个物体的体积被组成这个物体的物质微元连续分布占据。在此前提下，物体响应的一些力学量，如位移、应力、应变等，才可能是连续变化的，可用位置坐标的连续函数表示它们的变化规律，以及使用数学分析方法研究这些规律。

岩石和混凝土在细观的晶粒尺寸范围会出现不连续性，因而需要进一步认识连续介质假设的适用性，这需要讨论组成物体的微元尺度。确定连续体的微元尺度应考虑以下两个条件：(1)微元尺度与物体的尺度相比要足够小，使之在数学处理时可以近似作为数学点看待，以保证各力学量从一点到另一点的连续变化；(2)微元尺度与其所含的空隙、颗粒尺度相比要足够大，以至包含足够数量的空隙和颗粒，从而保证各力学量有稳定的统计平均值可作为单个微元的力学量。上述两个条件用数学语言来说，就是微元尺度相对物体尺度为无限小，相对于细观的空隙和颗粒尺度则为无限大。满足上述两个条件的微元的线性尺度记为 δ_c，具有这种尺度的微元也称为代表体元（representative element volume，REV）。显然，所研究的工程对象不同，其相应的 REV 的尺度也不相同。例如，金属和合金材料 $\delta_c = 0.5$ mm，木材 $\delta_c = 10$ mm，混凝土 $\delta_c = 100$ mm。有了微元或代表体元的概念，就保证了连续介质力学和无限小分析得到的数学结果在实际工程应用中具有可靠性和合理性。

连续介质是一个抽象的概念，它不具体针对某一变形物质而又包含了所有可变形的物质。同时我们习惯上又把变形物质分为固体和流体，把材料分成弹性体和塑性体等，实际上这些概念都是相对的、有条件的，它们同物质的结构、荷载特性和环境因素等有关。例如，在一定温度下缓缓拉伸沥青，它的变形近似于流体的流动，但如果在高速拉伸下，其试样则呈现出脆性固体断裂时那种光滑断口；又如在人类通常的活动时间内考察各类岩体的变化是难以看出它们变形的，但如果从地质构造的长远周期来考察，则会发现岩体本身也在蠕变。因此，介质的定义存在这样一个特征时间，以便与外界的作用时间或观察时间作相对的比较。例如流变学中的松弛时间就是特征时间的一个例子。如果有两个地质层构造，一个特征（松弛）时间长而另一个短，则在相同的地质力作用下，一个可能不会造成损害而另一个可能在较短时间内引起较大的蠕变而塌方。

连续介质力学的广泛应用，要求作为其分析基础的概念更加清晰。连续介质力学属于唯象学理论，它不采用物质的宏观行为由粒子理论推导的本质论的观点，而采用连续介质的假设，这使与连续场论有关的数学分析都可以方便地进行。由于这种方法远比本质论方法简单实用，并且由于它所依据的是宏观实验，而且所得到的结论仍然用于宏观世界，因此又是合理的。正因为此，它在工程领域应用极为广泛。但是，由于连续介质的概念是一种数学上的抽象，因而当将它用到真实的物理世界时必须十分谨慎，应当注意将连续介质的观点与粒子

论的观点很好地协调起来。解决这一“实际粒子离散”与“模型介质连续”概念上困难的办法是宏观无限小和微观无限大的模型。这一模型认为在连续介质中所使用的微元体(也称代表单元)不是一个点，它应包含大量的粒子，以便从物理的观点来看，它使温度、熵、质量和能量密度等具有确定的物理内涵；另一方面，它又足够小，以至从场的分析观点来看，它在无穷小的尺度范围内，均匀性的假定对场论中数学分析引起的误差可以忽略不计。这种宏观无限小和微观无限大的模型表面上看有些奇怪，实际上是一种很有用的研究连续介质的力学模型。当然，这种唯象学的模型也有一定的使用条件，如果考察的范围小到与材料的特征尺度密切相关的某种尺度以下，该模型的误差就可能是很大的。例如混凝土的特征尺寸为 $1\times10 \sim 1\times10^{3}$ mm，因此如果考虑混凝土弹性、塑性及其他非线性响应，我们可以考虑混凝土是连续介质；而对混凝土骨料及微裂纹来说，其特征尺寸为 $1\times10^{-3} \sim 1\times10$ mm，如果我们考虑的问题中的尺寸小于 10 mm，则由此模型引入的误差就会很大。

1.2 连续介质力学研究内容

连续介质力学大致上可以分为固体力学、流体力学和流变力学。连续介质力学关注的是连续体的宏观性质，也就是在三维 Euclid 空间和均匀流逝时间下受牛顿力学支配的物质行为。

具体研究内容包括：

1)固体。当固体不受外力时，具有确定的形状。固体包括不可变形的刚体和可变形固体。刚体在一般力学中通常用刚体力学来研究；连续介质力学中的固体力学则研究可变形固体在应力、应变等外界因素作用下的变化规律，主要包括弹性和塑性问题。

2)流体。流体包括液体和气体，无确定形状，可流动。流体最重要的性质是黏性，它是流体对由剪切力引起的形变的抵抗力。无黏性的理想气体，不属于流体力学的研究范围。从理论研究的角度，流体常被分为牛顿流体和非牛顿流体。

3)流变体。流变体又称非牛顿流体，它是不满足牛顿黏性定律的物体，是介于固体和牛顿流体之间的物质形态，主要包括黏弹性和黏塑性等。

连续介质力学不是将上述问题的理论简单地加起来，而是进行一般性的理论概括，在高度概括的基础上，形成理论，反过来又具体指导各门具体力学理论。

早期连续介质力学侧重于研究两种典型的理想物质，即线性弹性物质和线性黏性物质。弹性物质是指应力只由应变来决定的物质。当变形微小时，应力可以表示为应变张量的线性函数，这种物质称为线性弹性固体。本构方程中的系数称为弹性常数。对各向异性弹性固体最多可有 21 个弹性常数，而各向同性弹性固体则只有 2 个弹性常数。黏性物质是指应力与变形速率有关的物质。对流体来说，如果这个关系是线性的，就称为线性黏性流体或牛顿流体。对线性黏性流体只有 2 个黏性系数。这两种典型物质能很好地表示出工程技术上所处理的大部分物质的特性。

近现代连续介质力学是 1945 年以后逐渐发展起来的，它在下列几个方面对古典连续介质力学进行了推广和扩充：(1)物体不必只看作是点的集合体，它可能是由具有微结构的物质点组成；(2)运动不必总是光滑的，激波以及其他间断性物理现象、扩散等，都是容许的；(3)物体不必只承受力的作用，它也可以承受体力偶、力偶应力以及电磁场所引起的效应等；

(4) 对本构关系进行更加概括的研究；(5) 重点研究非线性问题，研究非线性连续介质问题的理论称为非线性连续介质力学。

近现代连续介质力学在深度和广度方面都已取得很大的进展，并出现下列三个发展方向：(1) 按照理性力学的观点和方法研究连续介质理论，从而发展成为理性连续介质力学；(2) 把近代连续介质力学和电子计算机结合起来，从而发展成为计算连续介质力学；(3) 把近代连续介质力学的研究对象扩大，从而发展成为连续统物理学。

连续介质力学是研究连续介质宏观力学性状的分支学科。宏观力学性状是指在三维欧氏空间和均匀流逝时间下受牛顿力学支配的物质性状。连续介质力学对物质的结构不作任何假设，它与物质结构理论并不矛盾，而是相辅相成的。物质结构理论研究特殊结构的物质性状，而连续介质力学则研究具有不同结构的许多物质的共同性状。连续介质力学的主要目的在于建立各种物质的力学模型和把各种物质的本构关系用数学形式确定下来，并在给定的初始条件和边界条件下求出问题的解答。它通常包括下述基本内容：(1) 变形几何学，研究连续介质变形的几何性质，确定变形所引起物体各部分空间位置和方向的变化以及各邻近点相互距离的变化，这里包括运动、构形、变形梯度、应变张量、变形的基本定理、极分解定理等重要概念；(2) 运动学，主要研究连续介质力学中各种量的时间率，这里包括速度梯度、变形速率和旋转速率、里夫林 - 埃里克森张量等重要概念；(3) 基本方程，根据适用于所有物质的守恒定律建立的方程，例如，连续性方程、运动方程、能量方程、熵不等式等；(4) 本构关系，包括弹性理论、黏性流体理论、塑性理论、黏弹性理论、热弹性固体理论、热黏性流体理论等。

由于新型材料的不断出现以及传统材料使用环境的日益极端化，本构方程的研究已经成为工程力学最重要内容之一。连续介质力学所建立起来的共性的基本原理，为具体材料本构关系的构造提供了相应的理论基础。因此，学习连续介质力学不仅对于更深刻地了解力学各个分支学科(如弹性力学、塑性力学、流体力学以及流变力学等)的内容有根本的帮助，而且对于深入研究材料本构方程也是必不可少的。

工程科学和连续介质力学之间的关系可用“鱼”和“水”、“树”和“根”来形容。根深方能叶茂，本固方能枝荣。从20世纪中叶以来，应用力学学科受到了科学与技术若干个发展的强烈影响：理性力学的复兴，计算机的发明和计算力学的兴起，航空航天的巨大成就，信息技术、生物医学工程及微纳米技术的广泛应用等。后续新兴学科的发展为连续介质力学的发展注入了新的巨大的活力。

1.3 连续介质力学方程架构

连续介质力学的基本方程有三类：

1) 关于物体变形和运动的几何学描述，它具有任意要求的精度。

2) 适用于一切连续介质的物理基本定律，如质量守恒定律、动量守恒定律、热力学定律。由于未考虑量子效应和相对论效应，它仅在一定的尺度范围内和较小的运动速度下近似成立。

3) 描述材料的力学性质的本构方程。由于材料力学性能的多样性和复杂性，以及现有实验条件的限制，通常所建立的本构关系方程不可能达到以上两类方程的精度。

以上三类方程是基本方程，连同相应的初始条件和边界条件，将构成所研究问题的数学物理方程的初、边值问题的完整提法。因此，连续介质力学的任务首先是讨论基本方程的建立，其次是关于初、边值问题的求解(由日益成熟的有限元方法取代)，并由此揭示物体在变形和运动过程中的基本特性。

材料本构方程是指材料在某一类物理量(力、电、磁、热等)作用下产生相关的响应量随材料性能而变化的关系，并受到服役状态和工作环境影响。它刻画的是材料的物质属性，反映了材料特有的物质规律。显然，材料的物性不同，其本构行为也不同，相应的数学方程(即本构方程)也不一样。

本构方程是构筑连续介质力学理论体系的三大基石之一。连续介质力学为了求解变形体在外部作用下的全部响应(含 3 个位移、6 个应变和 6 个应力，共 15 个未知量)，必须同时满足三大基本方程(即力学的应力平衡方程、几何学的变形协调方程以及物理学的本构方程)，缺一不可。

然而，力学中的应力平衡方程是基于牛顿力学建立起来的，在三维几何空间中可以列出三个微分方程；几何学中的变形协调方程是基于连续性公理推出的，共有 6 个微分方程；物理学中的本构方程是反映材料物性的特有规律，有 6 个线性或非线性的代数方程。同时满足这三大方程的变形体正好提供了 15 个方程，可以完备地求解待求的 15 个响应量。学习连续介质力学更要了解的是，应力平衡方程和变形协调方程是普适的，是所有连续介质共同满足的基本方程，由理论推导可以完全确定。而本构方程是所研究的具体材料所特有的，不同的材料在不同的载荷环境下会有不同的响应特征。因此，本构方程的研究是一个不断探索、不断进步、没有止境的内容。在这一过程中理论和实验同等重要，理论可以指导实验方案，反过来实验现象可以推进本构建模的发展和进步。

材料本构建模研究包含应力状态、应变状态、应力－应变关系以及破坏机理等方面的内容。应力状态研究包含不同构形下应力的定义，一点应力状态的各种表述(例如应力张量、正应力与剪应力、球应力与偏应力、主应力与应力不变量、八面体应力以及工程应力等)，各种应力率，以及不同构形下应力场平衡律的方程。应变状态研究包含不同构形下应变的定义，一点应变状态的各种表述(例如应变张量、正应变与剪应变、球应变与偏应变、主应变与应变不变量、八面体应变以及工程应变等)，各种应变率以及应变场协调律的微分表述方程。

如前所述，本构关系方程和运动方程与几何方程一起构成了连续介质力学三大基本方程结构。后两者是普适的，即满足连续介质基本假定的所有材料都遵循的方程；前者是特定的，不同的材料、不同的加载路径、不同的受载阶段，都展现出不同的本构特性。尽管材料本构方程的研究非常复杂，影响因素很多，但本构关系也必须遵循若干公理约束。它可以帮助我们认清本构方程的本质。Eringen 将本构公理归纳为八个，有兴趣的读者可以参考他的著作。

第 2 章　张量分析初步

2.1　张量的概念

自然界的物理性质与自然规律一样是一种客观的存在，它不受描述它的方法的影响。为了对物质的物理性质及物理规律进行数学描述，通常需要某种方便描述的坐标系当参照物。但是往往同一物理规律或物理属性采用不同坐标系描述时常呈现出不同的形式，这里必然夹杂了由具体坐标系的选择所带来的与物理规律与物理属性无关的东西，引起问题不必要的复杂化，甚至由此模糊了现象的物理本质，而这种物理本质应该是同具体坐标系的选择、坐标系的变换无关的。因此，人们很早就试图寻找某些数学量，用这些量来描述物理现象时可以摆脱具体坐标系的影响，其中人们熟知的标量和矢量就是这样的量。标量可以描述诸如密度、温度、能量等物理性质，在任何坐标系里标量都具有相同的值；矢量可以描述诸如力、位移、速度、加速度等力学量，用矢量形式写出的物理定律(如平衡方程等)是与具体坐标系无关的，虽然其在不同坐标系中的形式不同，但当它从一个坐标系变换到另一个坐标系时其分量是按一定的变换规律变换的。

通常人们选择在某一特定的坐标系来研究某些物理量及其规律，但这些物理量和所遵循的规律是客观存在的，并不随坐标系的选取而改变。因此，在不同的坐标系中，相应的物理量之间就必然要满足某种不变性关系，张量分析的目的就是寻求不变性的关系。

标量只有一个分量，矢量在笛卡尔坐标系下有三个分量，但是连续介质力学中最基本的状态变量如应力、应变等在笛卡尔坐标系下却有九个分量，因此必须将矢量的概念进一步推广，而引入张量的概念。在 n 维空间中，一个 p 阶张量有 n^p 个分量。矢量可以看成是一阶张量，因此它在三维空间中有三个分量，应力、应变为二阶张量，它在三维空间中有 $3^2=9$ 个分量。

张量是一群分量的集合，用这群分量可以完全确定地表示更为复杂的几何或物理现实。而且当坐标变换时，这种张量还可以按一定的规律进行变换且保持其几何或物理属性不变。尤其是用张量方程写出的物理定律或几何定理在任何坐标系中都具有不变的形式，这一点给理论研究带来很大的方便。例如可以不必针对每一个坐标系推导有关方程的形式，而只需从其中任一坐标系(通常是最简单的笛卡尔坐标系)下推出结果，然后将它转换为张量方程，就可以适用于其他坐标系。不仅如此，张量还是研究不变量的数学工具，使用这一工具可以大大简化复杂物理模型的数学描述。

2.2　张量表征

张量有两种表示方法，一种是绝对表示，另一种是相对表示。绝对表示法类似于矢量，不论阶数多少，均用黑体字母表示，如 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{T}$。

相对张量是用指标符号来描述的，指标符号是带有上标或者下标，或者既有上标又有下标的符号，表示描述该张量所选用的坐标系。例如速度可以用 v^i 表示，i 为上标。在三维空间中，指标 i 取值 1～3。在笛卡尔坐标系中，v^1，v^2，v^3 分别表示沿 x，y，z 轴方向的速度分量，注意此处上标不是乘方。又如应力用 $\boldsymbol{\sigma}^{ij}$ 表示，i，$j=1$，2，3。在笛卡尔坐标系中，$\boldsymbol{\sigma}^{11}$ 表示在垂直于 x 轴的坐标面上沿 x 轴方向的正应力分量 $\boldsymbol{\sigma}_{xx}$，而 $\boldsymbol{\sigma}^{12}$ 表示在垂直于 x 轴的坐标面上沿 y 轴方向的剪应力分量 $\boldsymbol{\sigma}_{xy}$。又如应变也用同样的指标系统表示，即 ε_{ij}，这里 i，j 为下标。以后将了解到，上标与下标具有不同的意义，但在笛卡尔坐标系中，上、下标没有区别，因而统一采用下标。在一般情况下张量既可带有上标也可同时带有下标，例如：$R^{ijk}{}_{\cdots lmn}$，$P^{i}{}_{\cdot jk}$，$Q^{i\cdot k}{}_{\cdot j\cdot l}$，…。在有上、下标的情况下，规定每一列只能写一个指标。对已经有了一个指标的列在相应的上、下指标处加点符号。

张量代表一个物理现实的整体，其指标通常是未被赋值指标符号，例如 σ^{ij}，而当给指标符号赋予确定值后，例如 σ^{12}，则表示此现实中的某一分量。

此外，单指标符号（即一阶张量）可以用列（或行）矩阵来表示，而双指标符号（即二阶张量）可以用方阵来表示，例如：

$$\boldsymbol{v}=\{v^i\}=\begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_{ij}]=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

2.3　指标约定

在指标符号表示的张量中，我们把不重复的指标称为自由指标。但在指标符号表示的张量中也常常会出现两个指标相同的情况，我们将这种重复的指标常称为哑标。Einstein 为此提出了著名的求和约定，即若在一项指标中有两个相同符号，则对该指标从 1 至 n 自动求和，这里 n 为坐标空间的维数。例如在三维空间中，$n=3$，则

$$\sigma_{ii}=\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33} \tag{2.3}$$

$$R^{i}{}_{\cdot k}x^k=\sum_{k=1}^{3}R^{i}{}_{\cdot k}x^k=R^{i}{}_{\cdot 1}x^1+R^{i}{}_{\cdot 2}x^2+R^{i}{}_{\cdot 3}x^3 \tag{2.4}$$

哑标只能重复一次，重复两次或更多次是没有意义的。另外，哑标符号可以任意更换而不改变其求和值，例如上面两式又可以写为 $\sigma_{ii}=\sigma_{kk}$，$R^{i}{}_{\cdot k}x^k=R^{i}{}_{\cdot n}x^n$。

在一个由指标符号写成的方程中，各项指标的符号、个数、位置都应相同，即指标量纲

一致。而每一对哑标则应在一上一下，仅仅在笛卡尔坐标系时由于上、下标没有区别，可以将全部指标都写在下方，例如

在任意坐标下：

$$R^{i}{}_{\cdot j} = R^{i}{}_{\cdot k}P^{k}{}_{\cdot j} + Q^{ik}L_{kj} \tag{2.5}$$

笛卡尔坐标下：

$$R_{ij} = R_{ik}P_{kj} + Q_{ik}L_{kj} \tag{2.6}$$

指标符号(矢量和张量的分量)对坐标求偏导数表示法：若对物质坐标求偏导数，则采用逗号加大写字母的下标表示，例如 $x_{i,J}$ 表示 $\frac{\partial x_i}{\partial X_J}$；若对空间坐标求偏导数，则采用逗号加小写字母的下标表示，例如 $v_{i,j}$ 表示 $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$。

当采用上述规定时，笛卡尔坐标系中的三个平衡方程就可以用下面张量方程简洁地表示出来

$$\sigma_{ij,i} + \rho f_i = 0,\ j = 1,\ 2,\ 3 \tag{2.7}$$

而六个几何方程可以写成

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ i,\ j = 1,\ 2,\ 3 \tag{2.8}$$

2.4 直线坐标张量

笛卡尔坐标是三维直角直线坐标系，每一个坐标轴用 x_i 表示，而该坐标轴方向的单位基矢量用 $\boldsymbol{I}_i$ 表示。由于是直线坐标，所以笛卡尔坐标系下所有空间各点单位基矢量 $\boldsymbol{I}_i$ 的方向都是相同的，且 $\boldsymbol{I}_i = \boldsymbol{I}^i$。

考虑三维笛卡尔坐标系中一个矢量 $\boldsymbol{V}$，它可以写成沿三个坐标轴分量和的形式，即

$$\boldsymbol{V} = v_i\boldsymbol{I}_i = v^i\boldsymbol{I}^i \tag{2.9}$$

同样，考虑三维笛卡尔坐标系中一个二阶张量 $\boldsymbol{\sigma}$，它可以写成在三个坐标面上沿三个坐标轴分量和的形式，即

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij}\boldsymbol{I}_i\boldsymbol{I}_j = \sigma_{ij}\boldsymbol{I}^i\boldsymbol{I}^j \tag{2.10}$$

笛卡尔坐标系中的基本张量如下。

1. Kronecker 符号

Kronecker 符号是由笛卡尔坐标基矢量的点积构成，它是一个二阶张量，即

$$\delta^{ij} = \delta_{ij} = \boldsymbol{I}_i \cdot \boldsymbol{I}_j = \boldsymbol{I}^i \cdot \boldsymbol{I}^j \tag{2.11}$$

它有 9 个分量，由定义式显然有

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases} \tag{2.12}$$

或

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$