时代云图
SHI DAI YUN TU

2020

张宇线性代数9讲

张宇 主编

高等教育出版社

时代云图
SHI DAI YUN TU

张宇
线性代数
9讲

张宇 主编

张宇数学教育系列丛书编委（按姓氏拼音排序）
蔡燧林 陈静静 崔晨阳 崔巧莲 高昆轮 郭祥 胡金德 贾建厂
雷会娟 李刚 史明洁 王成富 王冲 王慧珍 王燕星 徐兵 严守权
亦一（笔名） 于吉霞 曾凡（笔名） 曾熊 张聪聪 张乐 张青云 张婷婷
张宇 郑光玉 郑利娜 朱杰 朱坤颇

高等教育出版社·北京

主要内容

2020《张宇线性代数 9 讲》以教育部《大学数学课程教学基本要求》、教育部考试中心考研《数学考试大纲》为依据，诠释考研数学中线性代数的全部知识。本书共分为 9 讲，每讲主要由内容精讲、例题精解、习题精练三部分构成。全书共有例题 224 道，习题 97 道，适合考研复习和大学数学学习与提高之用。

复习建议

本书适用于考研和大学数学学习与复习的全过程。在研读本书过程中，读者应做到以下四点：一、坚持不懈，细水长流；二、不求初速，但求加速；三、独立思考，定期检验；四、吸取教训，善于总结。

图书在版编目(CIP)数据

张宇线性代数 9 讲 / 张宇主编. --北京：高等教育出版社，2019.1

ISBN 978-7-04-051103-1

Ⅰ.①张… Ⅱ.①张… Ⅲ.①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 005398 号

张宇线性代数 9 讲
ZHANGYU XIANXING DAISHU 9 JIANG

策划编辑 朱丽娜　　责任编辑 张耀明　　封面设计 张 楠　　责任印制 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	河北新华第一印刷有限责任公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	14.5		
字　数	362 千字	版　次	2019 年 1 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　次	2019 年 1 月第 4 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	35.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 51103-A0

Preface 前言

正像读者所期望的那样，本书依然会努力延续拙著《张宇高等数学 18 讲》的风格，与读者讲体己言、叙真心话，让读者学好这门课，考好这门试.

在代数学中，线性代数有着举足轻重的地位. 为什么这么说？用两句话可以通俗地说明原因：一是因为**线性代数研究的是量与量之间的"一次"(所谓线性)关系**，这是数学上最简单的关系；二是在现代科学理论和计算机的发展下，那些"非一次"(所谓非线性)关系，很多都可以转化为"一次"关系进行研究，从而将复杂问题大大简化.

对线性代数作出巨大贡献的数学家有莱布尼茨、克拉默、范德蒙德、柯西、高斯、凯莱、哈密顿、雅可比等. 有人曾说，科学给人知识，历史给人智慧. 读者若感兴趣，可以认真阅读有关介绍这些数学大家的学术生涯的书籍，定会给读者以巨大的启迪.

本书是由各位作者在多年讲授线性代数或者高等代数课程和考研辅导课程的讲稿基础上修改、扩充、完善而来的.

本书各位作者曾经分别参与清华大学《线性代数(第二版)》教材的编写，考研数学命题、高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》线性代数部分的编写，同济大学《线性代数(第五版)》的《习题全解与考研指导》的编写，高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定，北京理工大学出版社《张宇线性代数 9 讲》的编写等，这些工作对于本书的形成具有重要意义.

现在，在高等教育出版社的大力支持下，我将此书做了全面的修订，献给读者，供考硕士研究生的读者和有志于提高线性代数学习水平的读者们参考.

本书分为 9 讲，每一讲均由"内容精讲""例题精解""习题精练"三部分组成，所有习题都配有详细解答过程，供读者参考.

"内容精讲"全面准确地阐述了本科《大学数学课程教学基本要求》和考研《数学考试大纲》中线性代数所有知识点的内涵和外延，读者一定要认真研读，并在做题后温故知新.

"例题精解"通过精心挑选或者命制的例题，让读者深化对数学知识的理解，并把它们内化成自己的解题能力，这部分内容建议读者反复练习，达到炉火纯青的地步.

"习题精练"给读者留下了作业，独立完成这些优秀的试题，既检验自己的学习成果，又培养自己独立做题的能力，且能够查漏补缺、增长见识.

如何使用好本书并做好数学的学习和复习呢？我提四个建议.

1. 坚持不懈，细水长流

老一辈的京剧表演艺术家常讲："一天不练功，只有我知道；三天不练功，同行也知道；一月不练功，观众全知道."复习数学，我建议读者也一定要有这样的觉悟，捧着这本书，每天都要看内容，每天都要做题目，坚持不懈，细水长流，便可水到渠成.

2. 不求初速，但求加速

一开始读数学书，总会吃力一些，遇到的困难多一些，这很正常. 我们不要畏难，应该扎扎实实地把每

一处不懂的地方弄懂，把每一个难点攻克，这样，开始复习的速度就会慢一些. 但是，只要能够坚持，复习了一定的内容之后，你便会发现，复习速度不断提高，理解能力和解题能力都会显著提升. 这符合数学学习的规律，请读者把握.

3. 独立思考，定期检验

复习一个知识点，先要读基本的概念、定理和公式，然后看例题，再去做习题. 只有通过做题，才能知道自己是否真正掌握了这个知识. 一定不要翻着答案做题，稍有不会就看答案，这样效果不好. 读者先不要看答案，自己独立地去做，调动起自己所有的知识储备，看能不能做出来. 做出来了，自然很好，即使做不出来，时间也没有白费，其他的知识在你脑海里过了一遍，也是一种复习. 只是要注意，如果全力以赴也未做出题目，看完答案后要好好总结经验. 在复习完一节、一章和整个课程的不同阶段，都要定期通过做题来检验自己的复习水平和效果.

4. 吸取教训，善于总结

人没有不犯错误的，尤其在学习数学的过程中，做错题，不会做题，是再平常不过的了. 人们常说“失败是成功之母”，就是这个意思. 我常告诉学生，如果一位复习备考的学生遇到不会做的题、做错的题，可能会有两种态度：一种态度是消极的，题目不会做，心情不好，自暴自弃，复习效率大打折扣；另一种态度是积极的，题目做不出，正是找到了自己复习的薄弱环节，找到了自己的不足之处，正是遇到了自己提高、进步的机会. 我当然支持后面一种态度，这才是正确的态度. 所以，希望在考研复习的过程中，读者准备一个笔记本，通过不会做或者做错的题目，认真分析到底问题出在哪里，哪些知识还复习不到位. 吸取教训，多做总结，这样的笔记日积月累，对提高数学水平，是有极大帮助的.

最后，我要再次感谢前考研数学命题组的老专家们，他们功底深厚、德高望重，给予了本书很大的支持和帮助. 我无意用“水平有限”作为遁词，诚心接受读者和同行专家的批评指正.

张宇
2018 年 12 月 于北京

Contents 目 录

第1讲

行列式的基本概念与计算

考试要求	科目	考试内容
了解	数学一	行列式的概念
	数学二	
	数学三	
会	数学一	应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式
	数学二	
	数学三	
掌握	数学一	行列式的性质
	数学二	
	数学三	

内容精讲

一、行列式的本质定义(第一种定义)

大多数教材都是从“纯粹”的代数学角度来定义行列式的，较为抽象，难于理解和接受. 我们先详细通俗地给出行列式的本质定义，并且告诉读者，我们将要开始的线性代数这门课程到底要学什么.

先看一个式子：$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 我们称其为 2 阶行列式，其中 a_{ij} 的第一个下标 i 表示此元素所在的行数，第二个下标 j 表示此元素所在的列数，$i=1,2$, $j=1,2$，于是此行列式中有四个元素，并且 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. 这是一个什么样的计算规则？它背后有什么样的意义？

希望读者跟着我的思路走. 请你将此行列式的第 1 行的两个元素 a_{11}, a_{12} 看成一个 2 维向量 $[a_{11},a_{12}]\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{\alpha}_1$ (线性代数中，向量不需要在字母上加箭头写成 $\overrightarrow{\alpha_1}$，只要写 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 即可，此后类同，不再重复). 将此行列式的第 2 行的两个元素 a_{21}, a_{22} 看成另一个 2 维向量 $[a_{21},a_{22}]\xlongequal{\text{记}}\boldsymbol{\alpha}_2$. 不失一般性，将其标在直角坐标系中，且以这两个向量为邻边拼出一个 $\square OABC$，则 $S_{\square OABC}=?$

不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的长度(模)为 l,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 的长度(模)为 m,$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 x 轴正向的夹角为 α,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 与 x 轴正向的夹角为 β,于是,如图 1-1 所示:

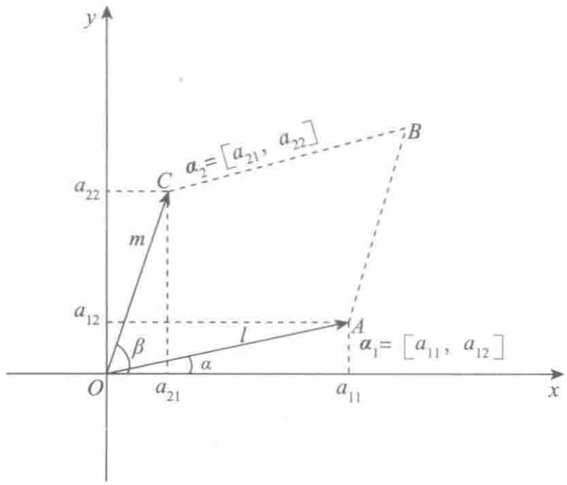

图 1-1

则
$$
\begin{aligned}
S_{\square OABC}&=l\cdot m\cdot \sin(\beta-\alpha)\\
&=l\cdot m(\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha)\\
&=l\cos\alpha\cdot m\sin\beta-l\sin\alpha\cdot m\cos\beta\\
&=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},
\end{aligned}
$$

于是 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=S_{\square OABC}$.

我们看到了一个极其直观有趣的结论:**2 阶行列式是由两个 2 维向量组成的,其(运算规则的)结果为以这两个向量为邻边的平行四边形的面积**. 这不仅得出了 2 阶行列式的计算规则,也能够清楚地看到其几何意义.

线性代数这门学问最大的一个特点是"可以作线性推广"——3 阶行列式 $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ 是什么?我希望读者能够仿照上述定义回答出:**3 阶行列式是由三个 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{12},a_{13}]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21},a_{22},a_{23}]$,$\boldsymbol{\alpha}_3=[a_{31},a_{32},a_{33}]$ 组成的,其(运算规则的)结果为以这三个向量为邻边的平行六面体的体积**. 如图 1-2 所示.

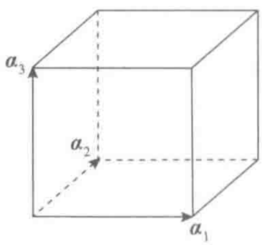

图 1-2

依此类推,我们便可以给出 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$ 的本质定义:

n 阶行列式是由 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}]$,$\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n}]$,$\cdots$,$\boldsymbol{\alpha}_n=[a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{nn}]$ 组成

的,其(运算规则的)结果为以这 n 个向量为邻边的 n 维图形的体积.

由此看来,一个重要观点出现了:读者一开始,就应该**把行列式看作是由若干个向量拼成的,并且要把这些向量作运算**.以 3 阶行列式为例,若 $D_3\neq0$,则意味着体积不为 0,则称组成该行列式的三个向量**线性无关**;若 $D_3=0$,称**线性相关**.

二、行列式的性质

性质 1　行列互换,其值不变,即 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$.

性质 2　行列式中某行(列)元素全为零,则行列式为零.

性质 3　行列式中某行(列)元素有公因子 $k(k\neq0)$,则 k 可提到行列式外面,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】(1)本书用 k ⓘ表示第 i 行乘 k,$k[j]$表示第 j 列乘 k.

(2)以后称上述等式从右到左的运算为**“倍乘”性质**.

性质 4　行列式中某行(列)元素均是两个元素之和,则可拆成两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】　等式从右到左是两个行列式相加的运算.如果两个行列式的其他元素对应相等,只有一行(列)不同时,可以相加,相加时其他元素不变,不同元素的行(列)对应相加即可.

性质 5　行列式中两行(列)互换,行列式的值反号.

【注】(1)以后用 ⓘ↔ⓙ表示第 i 行与第 j 行互换,$[i]\leftrightarrow[j]$表示第 i 列与第 j 列互换.

(2)以后称上述运算为**“互换”性质**.

性质 6　行列式中的两行(列)元素相等或对应成比例,则行列式为零.

性质 7　行列式中某行(列)的 k 倍加到另一行(列),行列式的值不变.

【注 1】(1)以后用ⓘ$+k$ⓙ表示第 j 行的 k 倍加到第 i 行,$[i]+k[j]$表示第 j 列的 k 倍加到第 i 列.

(2)以后称上述运算为**“倍加”性质**.

【注 2】　以上 7 个性质均可由本讲“一、行列式的本质定义(第一种定义)”所介绍的行列式的几何背景直观地得到,而不需复杂抽象的分析.如性质 6 所说到的“两行(列)元素对应成比例,则行列式为零”,可取 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$,因向量$[2,3]$与向量$[4,6]$为平行向量,故 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=S_{\square}=0$,如图 1-3 所示,一目了然.

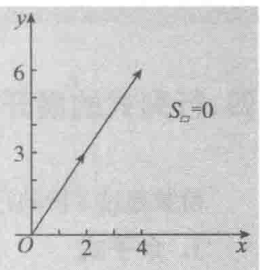

图 1-3

三、行列式的逆序数法定义(第二种定义)

1. 排列和逆序

排列 由 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列,如 23145 是一个 5 级排列,41352 也是一个 5 级排列. n 级排列共有 $n!$ 个.

逆序 在一个 n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,若 $i_s>i_t$,且 i_s 排在 i_t 前面,则称这两个数构成一个逆序.

逆序数 一个排列中,逆序的总数称为该排列的逆序数,记作 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$,如 $\tau(231546)=3$,$\tau(621534)=8$. 由小到大顺排的排列称为自然排序,如 12345,显然,自然排序的逆序数为 0.

奇排列和偶排列 排列的逆序数为奇数时,该排列称为奇排列;排列的逆序数为偶数时,该排列称为偶排列.

2. n 阶行列式的定义

$n(n\geqslant 2)$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 个列下标排列求和,故为 $n!$ 项之和. 注意到行下标已经顺排,而列下标是任一个 n 级排列,故每项由取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积组成,每项的正负号取决于 $(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}$. 当列下标为奇排列时,应附加负号;当列下标为偶排列时,应附加正号.

【注】 (1)规定 1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

(2)如:请确定“$a_{12}a_{31}a_{54}a_{43}a_{25}$”这一展开项前的正负号. 答:首先将行下标顺排为 $a_{12}a_{25}a_{31}a_{43}a_{54}$,然后计算 $\tau(25134)=4$,为偶排列,故该项前为正号.

(3)上述 n 阶行列式利用逆序的定义和教材中对于 2,3 阶行列式的定义是完全一致的.

也就是 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$,$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$.

如 $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 34 & 1 & 34 \end{vmatrix}=520$,$\begin{vmatrix} \text{我} & 0 & \text{生} \\ 0 & \text{有} & 0 \\ \text{你} & 0 & \text{幸} \end{vmatrix}=$我有幸一生有你,读者若将上式结果中的减号“-”看作汉字“一”,一个浪漫的公式便产生了.

四、行列式的展开定理(第三种定义)

阶数超过 3 阶的行列式,若还用“一”“三”的方法,就太麻烦了,为此,提出行列式的展开定理.

1. 余子式

在 n 阶行列式中,去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列元素,由剩下的元素按原来的位置与顺序组成的

$n-1$阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 代数余子式

余子式 M_{ij} 乘 $(-1)^{i+j}$ 后称为 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

显然也有 $M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

3. 行列式按某一行(列)展开的展开公式

行列式的值等于行列式的某行(列)元素分别乘其相应的代数余子式后再求和,即

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{cases} a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(i=1,2,\cdots,n), \\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(j=1,2,\cdots,n). \end{cases}$$

但行列式的某行(列)元素分别乘另一行(列)元素的代数余子式后再求和,结果为零,即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0,i\neq k;a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0,j\neq k.$$

【注】 余子式与代数余子式是行列式展开定理的核心概念,关于它们的灵活使用请参看例 1.15 至例 1.17.

五、几个重要的行列式

1. 主对角线行列式(上(下)三角形行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

3. 拉普拉斯展开式

设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|,$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

【注】 以后称以上“1”“2”“3”中的12个行列式为“基本形”行列式.

4. 范德蒙德行列式

记
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

例题精解

一、行列式的计算

1. 消零化基本形法

用行列式的性质或展开公式，化为“基本形”行列式.

例 1.1 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n\times n} =$ ______.

解 应填 $a^n+(-1)^{n+1}b^n$.

按第1列展开，得

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{n\times n}$$

$$=a\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} +(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

例 1.2 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$________.

解 应填 $4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4$.

按第 4 行展开,得

$$D=4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}+3(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}+2(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}+$$

$$(\lambda+1)(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=4+3\lambda+2\lambda^2+\lambda^3+\lambda^4.$$

例 1.3 计算行列式:$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=2\times3\times4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=24\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=24\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=24-12-8-6=-2.$$

【注】 本题的行列式是“爪形行列式”(只有第 1 列、第 1 行及主对角线元素不为零,其余元素均为零的行列式),这种行列式都可以化为“基本形”行列式.

例 1.4 计算 $n+1$ 阶行列式:

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ a^n & 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & a^n & 1 & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

分析 观察每行元素发现，第 i 行和第 $i+1$ 行($i=1,2,\cdots,n$)有 n 个对应元素差 a 倍.

解 将第 $i+1$ 行乘 $-a$ 加到第 i 行($i=1,2,\cdots,n$)，得

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^n \\ a^n & 1 & a & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & a^n & 1 & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{(i)+(-a)(i+1)}\begin{vmatrix} 1-a^{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a^{n+1} & 0 \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & a^n & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-a^{n+1})^n.$$

【注】 作为练习：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}=(1-2^4)^3=-3375.$$

例 1.5 计算 n 阶行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

解 **方法一** 将第 1 行的 -1 倍加到其余各行，然后将其余各列都加到第 1 列，则

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

方法二 D_n 中每行元素之和均为 $a+(n-1)b$，而且各行元素依次循环，故行列式称为循环行列式. 将第 $2,3,\cdots,n$ 列加到第 1 列，则可提出公因子，即

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal{[1]+\sum\limits_{i=2}^{n}[i]} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{ⓘ-①} [a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【注1】 行和或列和相等的行列式(行和是指每一行元素相加的和,列和同理)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}_{n\times n}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【注2】 行列式中每行(列)元素之和相等时,将各列(行)加到第1列(行),然后提出公因子是可取的方法.

【注3】 这类字母抽象型行列式显然具有代表性.如

(1)当 $a=0,b=1$ 时,$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n\times n}=(n-1)(-1)^{n-1}$;

当 $a=2,b=1$ 时,$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n\times n}=n+1$.

(2)当 $a=x$ 时,$\begin{vmatrix} x & b & b & \cdots & b \\ b & x & b & \cdots & b \\ b & b & x & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}_{n\times n}=[x+(n-1)b](x-b)^{n-1}$.

若视 x 为变量,b 是常数,则行列式是 x 的 n 次多项式,其根是 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=b,x_n=(1-n)b$.