

# 计算电磁学中的 高阶技术

Higher-order Techniques  
in Computational Electromagnetics

[意] Roberto D. Graglia

著

[美] Andrew F. Peterson

冯德军 安新源 刘义 苏向辰阳 李运宏 译  
刘佳琪 审校



中国工信出版集团



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY  
<http://www.phei.com.cn>

# 计算电磁学中的高阶技术

Higher-order Techniques in Computational Electromagnetics

[意] Roberto D. Graglia [美] Andrew F. Peterson 著

冯德军 安新源 刘 义 苏向辰阳 李运宏 译

刘佳琪 审校



电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书是国际著名电磁场理论和计算电磁学专家 Roberto D. Graglia 和 Andrew F. Peterson 的专著。该书主要介绍了如何利用高阶基函数进行电磁计算, 内容包括多种高阶基函数, 如插值矢量基、分层级基、奇异场高阶基等; 书中系统阐述了各种高阶基函数的作用及其性能, 通过本书介绍的高阶基技术, 可以使电磁计算在精确性、计算速度和可信度等方面实现较大提升。本书系统性强, 对基础理论和方法进行了详尽的介绍和严谨的论述, 包含计算电磁学中的最新研究成果和热点, 是计算电磁学领域的高水平专著。

促进高阶基计算方法在电磁计算领域得到推广和应用是本书作者的初衷。本书适合从事电磁场理论和数值计算工作的研究生、教师和科技工作者阅读, 同时也可作为电磁场应用(如天线、微波、遥感等)相关专业研究生的教材或参考书。

Higher-order Techniques in Computational Electromagnetics (Electromagnetics and Radar) 978-1613530160  
by Roberto D. Graglia (Author), Andrew F. Peterson (Author)

Original English Language Edition published by SciTech Publishing, an imprint of the IET, Copyright© 2016 by SciTech Publishing, Edison, NJ. All rights reserved. This translation published under license. No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of IET.

本书中文简体中文字版专有翻译出版权由英国 IET 公司授予电子工业出版社。未经许可, 不得以任何手段和形式复制或抄袭本书内容。

版权贸易合同登记号 图字: 01-2016-9458

### 图书在版编目(CIP)数据

计算电磁学中的高阶技术 / (意) 罗伯托·D. 格拉利亚 (Roberto D. Graglia), (美) 安德鲁·F. 彼得森 (Andrew F. Peterson) 著; 冯德军等译. —北京: 电子工业出版社, 2019.6

书名原文: Higher-order Techniques in Computational Electromagnetics

ISBN 978-7-121-36400-6

I. ①计… II. ①罗… ②安… ③冯… III. ①电磁计算 IV. ①TM15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 080060 号

责任编辑: 宋 梅

印 刷: 三河市良远印务有限公司

装 订: 三河市良远印务有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本: 720×1000 1/16 印张: 24.25 字数: 489 千字

版 次: 2019 年 6 月第 1 版(原著第 1 版)

印 次: 2019 年 6 月第 1 次印刷

定 价: 98.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 [zltts@phei.com.cn](mailto:zltts@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

本书咨询联系方式: [mariams@phei.com.cn](mailto:mariams@phei.com.cn)。

# 献词

献给我们的夫人，钦齐亚和德布拉。

献给我们的孩子，马迪奥、茱莉娅、基特、金西和凯蒂尼。

献给我们的编辑杜德利凯，没有她的帮助和鼓励就不会有这本书。

# 译者序

在现代科学研究中，“科学试验、理论分析、高性能计算”是三种重要的研究手段。在电磁学领域中，经典电磁理论由于受到边界问题的约束，其应用经常受限。随着高性能计算水平的飞跃，计算电磁学在解决电磁学问题时受边界约束减少的优点日渐凸显，它可以解决多种类型的复杂问题，而且在很多工程问题中得到了广泛应用，因此发展十分迅速。目前，计算电磁学已成为现代电磁理论研究的前沿和主流。

本书作者 Roberto D. Graglia 和 Andrew F. Peterson 是国际著名的学者，他们在电磁场理论和计算电磁学方面有丰富的教学经验和科研经历。他们均曾任 IEEE 天线和传播学报、IEEE 天线和无线传播快报的副主编，而且是多个国际权威电磁学学术会议的组织者和会议主席，在电磁学领域享有很高的声誉。本书是两位著名学者的联手著作，系统而深入地介绍了如何利用高阶基函数进行电磁计算，是本领域研究人员和学习人员难得的工具书和参考书。

全书共分 7 章，内容安排如下：

第 1 章重点介绍了一阶多项式插值方法，论述了将在父单元上定义插值函数并映射到子单元上的方法，讨论插值误差与插值阶数的关系，研究了奇异函数的表示方法。

第 2 章在第 1 章的基础上将多项式插值方法扩展到二维和三维变量函数，讨论了插值函数的连续性问题，介绍了标准基单元，包括三角形单元、四边形单元、四面体单元、长方体单元、三棱柱单元等，详细介绍了这些基本单元的单元几何表达、局部矢量基，以及拉格朗日基函数。

第 3 章主要讨论了矢量域或低阶多项式插值函数的构建方法，介绍了矢量基函数的不同类型，详细描述了在保证连续性的条件下这些基函数到曲线单元的

映射。

第 4 章主要论述了任意阶多项式的插值矢量基的构建方法，重点是在主要的典型单元形态上的构建方法，即针对二维域的三角形和四边形，以及三维域的四面体、长方体和三角棱柱。

第 5 章介绍能够在同一网格一起使用的标量和向量分层级基，重点是分层级标量基、分层级旋度一致矢量基、分层级散度一致矢量基，详细介绍了不同类型的各种基的细节。

第 6 章主要说明前面章节介绍的矢量基的应用，介绍它们在三维完美导体散射的电场积分方程和三维腔体内场模型的矢量亥姆霍兹方程数值解中的应用。

第 7 章描述了奇异标量和矢量基函数，并将其用于分析二维腔谐振器和波导结构的方法。讨论了这些函数隐含的意义，提出了奇异和非奇异函数的组合方式。

本书由冯德军总体策划，第 1、2、3 章由苏向辰阳、冯德军翻译，第 4、7 章由刘义、冯德军翻译，第 5、6 章由安新源翻译，书中公式、图表由李运宏翻译，全书由刘佳琪研究员审校。需要说明的是，由于译者的时间和学识受限，翻译中难免会出现疏漏和不足，有时甚至是错误，恳请广大读者批评指正！最后，向为本书出版付出辛勤劳动和提供帮助的人们表示衷心的感谢！

译者

# 序

在工程领域中计算工具的使用是无所不在的，然而在高频电磁学中（包括天线、微波设备和雷达散射等应用），当今被广泛应用的大部分技术更应被称为“低阶”方法。然而更有效的方法倾向于使用分段常数或分段线性函数来表示作为未知量的场或电流。低阶技术的主要限制在于计算结果中的误差只能用额外计算量来渐进地减少。

最近二十年的研究表明，通过“高阶”技术可以在精确度、计算成本和可信度方面实现优化。本书的目的是提出高阶基函数，解释它们的作用并阐述它们的性能，这些特殊基函数包括被用于方程的标量和矢量函数均由作者提出，例如，亥姆霍兹矢量方程和电场积分方程。到目前为止，这些基函数的细节只出现在相关期刊文献中，作者希望本书能够使它们被更广泛地接受，并在电磁计算业内得到更广泛的传播。

尽管本书的大部分内容聚焦在用分段多项式函数表示建筑物上或附近的场和流，但对于几何边角还需考虑用奇异基函数来处理。奇异基函数可以提高精确性和效率，远比高阶多项式基函数更有效。总的来说，与多项式扩展函数相比，奇异扩展函数的发展还远未成熟。我们将用一章内容为读者介绍奇异基函数。

# 前言<sup>①</sup>

Mario Boella 系列包含无线电科学全领域的丛书和研究著作，并特别强调在信息和通信技术中电磁学的应用。附属于意大利都灵理工大学的 Mario Boella 高级协会对这个系列给予了科学支持和经济赞助，URSI（国际无线电科学联盟）也提供了科学方面的赞助。该系列的命名是为了纪念都灵理工大学的 Mario Boella 教授，他是意大利近半个世纪电子和通信科学发展的开拓者，并且在 1966 年至 1969 年任 URSI 的副主席。

本书致力于研究计算电磁学中的高阶基函数，它由两名该领域的国际专家联合撰写，他们是来自意大利都灵理工大学的教授 Roberto D. Graglia 和来自美国佐治亚理工学院的教授 Andrew F. Peterson。这两名科学家在过去二十年间已出版大量的该领域的著作，这本著作不仅包括他们之前研究的纲要，而且也包括他们在电磁计算应用这一重要领域中的新研究成果，它将成为计算技术未来发展不可缺少的参考书籍。

Piergiorgio L. E. Uslenghi  
ISMB 丛书编辑  
2015 年 6 月于芝加哥

---

① 中文译本的一些图表、参考文献、符号及其正斜体形式等沿用了英文原著的表示方式，对于原著中的一些过长的图题，与译者沟通后进行了规范，特此说明。



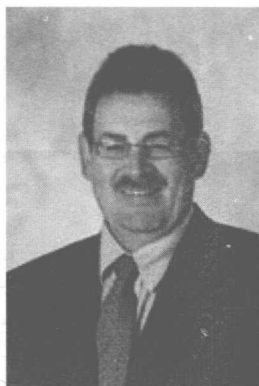
## 关于作者



Roberto D. Graglia 1979 年获得都灵理工大学电子工程学士学位（最优等）；1983 年在芝加哥获得伊利诺伊州大学电子工程和计算机科学博士学位；1980—1981 年在意大利 CSELT 做研究工程师；1985—1992 年工作于意大利国家研究委员会（CNR），指导国际研究项目；1991—1993 年，在芝加哥伊利诺伊州大学做访问学者；从 1992 年起，成为都灵理工大学电子和电信系教员，现在是电子工程教授。他的研究领域包括高、低频电磁学数值方法，以及复杂介质、天线、电磁兼容性和低频现象的散射与交互的理论与计算。他组织并讲授了这些领域的短期课程。

自 1997 年起，他成为《电磁学》编委会的委员。他是 IEEE AP-S 的杰出讲师（2009—2012 年），是 IEEE 天线和传播学报、IEEE 电磁兼容性学报和 IEEE 天线和无线传播快报的副主编，IEEE AP-S AdCom 的会员。他是 1997 年 3 月 IEEE 天线和传播学报电磁兼容先进数值技术专栏的客座编辑。他被邀请为 USRI 大会 1996 年场和波、1999 年计量学和 1999 年计算电磁学特约会议的召集人。他是国际无线电科学联合会电磁学理论每三年国际专题会议 1998 年电磁兼容性专题的组织者，是 2004 年数

值算法专题的联合组织者。自 1999 年起，他成为电磁学高级应用会议（ICEAA）的总主席。自 2011 年起，他成为 IEEE-APS 无线通信的天线和传播专题会议的总主席（IEEE-APWC）。他是 IEEE 会员，并在 2015 年担任 IEEE 天线和传播学会会长。



Andrew F. Peterson 于 1982 年、1983 年和 1986 年在伊利诺伊州大学的厄巴纳-香槟校区获得电子工程学士、硕士和博士学位。自 1989 年起，他在位于亚特兰大的佐治亚理工学院电气与计算机工程学院任教职，现在他已是该学院的一名教授，并兼任教师发展委员会副主席。（注：根据佐治亚理工学院官网显示，Andrew F. Peterson 已于 2016 年离任教师发展委员会副主席。）他教授电磁场理论和计算电磁学，负责微波频率电磁应用计算技术发展研究。他是《电磁学计算方法》（IEEE 出版社，1998）和 Morgan/Claypool 综合讲义中数卷的主要作者。Peterson 博士曾是 ONR 研究生奖学金和 NSF 青年研究者奖项的获得者。他是 IEEE 天线和传播学报、IEEE 天线和无线传播快报的副主编，是 1998 年 IEEE AP-S 国际专题会议和 URSI/USNC 无线电科学会议的总主席，是 IEEE AP-S AdCom 的成员。他做了 6 年的应用计算电磁学学会（ACES）主任、2 年的 IEEE 天线部主席。他是 IEEE AP-S 2006 年的会长，ACES 2011—2013 年的主席。他是 IEEE 和 ACES 的会员，是 URSI B 委员会、美国工程教育学会、美国大学教授联盟的会员。他还是 IEEE 三等千禧勋章的获得者。

# 目录

第 1 章 一维内插、近似和误差 .....	1
1.1 线性内插和三角基函数 .....	1
1.2 高阶多项式的内插和基函数 .....	4
1.2.1 拉格朗日内插 .....	4
1.2.2 Hermite 内插 .....	6
1.3 函数表示的误差 .....	13
1.3.1 内插误差 .....	13
1.3.2 频谱完整性和其他频域问题 .....	18
1.4 具有边界奇异点的近似函数 .....	22
1.4.1 奇异扩展功能 .....	25
1.4.2 符合精确的近似奇异加多项式基函数的奇异函数 .....	26
1.4.3 不允许精确近似的奇异函数 .....	28
1.5 小结 .....	32
参考文献 .....	32
第 2 章 二维和三维的标量插值 .....	34
2.1 二维、三维网格和典型单元 .....	34
2.1.1 协调网格和几何数据基结构的基础 .....	35
2.2 西尔韦斯特插值多项式 .....	37
2.3 典型单元的归一化坐标 .....	40
2.4 三角形单元 .....	42
2.4.1 单元几何表达和局部矢量基 .....	42
2.4.2 拉格朗日基函数、插值和梯度近似值 .....	46
2.4.3 插值误差 .....	50
2.4.4 谱完整性和其他频域问题 .....	52
2.4.5 弯曲的单元 .....	56
2.5 四边形单元 .....	58

2.5.1	单元几何表达和局部矢量基 .....	58
2.5.2	拉格朗日基函数、插值和梯度近似值 .....	60
2.6	四面体单元 .....	62
2.6.1	单元几何表示和局部矢量基 .....	62
2.6.2	拉格朗日基函数 .....	65
2.7	长方体单元 .....	67
2.7.1	单元几何表示和局部矢量基 .....	67
2.7.2	拉格朗日基函数 .....	70
2.8	三棱柱单元 .....	72
2.8.1	单元的几何表达和局部矢量基 .....	72
2.8.2	拉格朗日基函数 .....	75
2.9	形状函数的生成 .....	77
	参考文献 .....	77
<b>第3章</b>	<b>二维和三维空间中矢量场的低阶多项式表示 .....</b>	<b>78</b>
3.1	三角形的二维矢量函数 .....	78
3.1.1	线性旋度一致矢量基函数 .....	79
3.1.2	三角形的一种简单的旋度一致表示 .....	81
3.1.3	替换方法：三角形的散度一致表示 .....	82
3.2	切线矢量对法向矢量连续性：旋度一致基和散度一致基 .....	83
3.2.1	其他专业术语 .....	86
3.3	矩形单元的二维表示 .....	86
3.4	二维空间准亥姆霍兹分解：环函数和星函数 .....	89
3.5	旋度一致基和散度一致基之间的投影 .....	91
3.6	四面体单元的三维空间表示：旋度一致基 .....	92
3.7	四面体单元的三维空间表示：散度一致基 .....	94
3.8	长方体单元的三维空间表示：旋度一致情况 .....	95
3.9	长方体单元的散度一致基 .....	96
3.10	四面体网格的准亥姆霍兹分解 .....	96
3.11	斜网格或有曲面网格的矢量基函数 .....	97
3.11.1	基和倒数基矢量 .....	98
3.11.2	协变和逆变映射 .....	101
3.11.3	父空间中的导数 .....	104
3.11.4	表面约束 .....	105
3.11.5	实例：四边形单元 .....	108

3.12	混合阶 Nédélec 空间 .....	109
3.13	德拉姆综合体 .....	114
3.14	小结 .....	116
	参考文献 .....	116
<b>第 4 章</b>	<b>任意阶插值矢量基 .....</b>	<b>119</b>
4.1	矢量基的发展 .....	119
4.2	矢量基的构造 .....	120
4.3	针对典型 2D 空间单元的零阶矢量基 .....	122
4.4	典型 3D 空间单元的零阶矢量基 .....	123
4.5	高阶矢量基构建方法 .....	124
4.5.1	2D 空间单元高阶矢量基的完备性 .....	124
4.5.2	3D 空间单元高阶矢量基的完备性 .....	125
4.5.3	移动西尔韦斯特多项式在移动元素内插值点上的应用 .....	127
4.6	典型 2D 空间单元的矢量基 .....	127
4.6.1	只在三角形单元的一条边上的带有边插值点的 $\hat{\alpha}(p, \xi)$ 多项式 .....	127
4.6.2	只在四边形单元的一条边上的带有边插值点的 $\hat{\alpha}(p, \xi)$ 多项式 .....	130
4.6.3	三角形单元的 $p$ 阶矢量基 .....	131
4.6.4	四边形单元的 $p$ 阶矢量基 .....	134
4.7	3D 单元的矢量基 .....	136
4.7.1	四面体单元 .....	136
4.7.2	长方体单元 .....	142
4.7.3	三棱柱单元 .....	148
4.8	表格 .....	155
	参考文献 .....	174
<b>第 5 章</b>	<b>分层级基 .....</b>	<b>177</b>
5.1	病态条件问题 .....	178
5.2	分层级标量基 .....	182
5.2.1	四面体和三角形基 .....	182
5.2.2	四边形基 .....	194
5.2.3	长方体基 .....	195
5.2.4	棱柱基 .....	196
5.3	分层级旋度一致矢量基 .....	198
5.3.1	四面体和三角形基 .....	200

5.3.2	四面体和长方体基 .....	210
5.3.3	棱柱基 .....	220
5.3.4	条件数对比 .....	234
5.4	分层级散度一致矢量基 .....	240
5.4.1	相邻单元公共面的参考变量 .....	242
5.4.2	四面体基 .....	244
5.4.3	棱柱基 .....	248
5.4.4	长方体基 .....	252
5.4.5	数值结果及与其他基的对比 .....	254
5.5	结论 .....	257
	参考文献 .....	257
<b>第 6 章</b>	<b>积分方程和微分方程的数值计算 .....</b>	<b>261</b>
6.1	电场积分方程 .....	261
6.2	曲面单元的合并 .....	264
6.3	利用奇异减法和消除技术处理 Green 函数的奇异性 .....	269
6.4	例子: 散射横截面计算 .....	275
6.5	矢量亥姆霍兹方程 .....	279
6.6	腔体矢量亥姆霍兹方程的数值解 .....	281
6.7	用自适应 $p$ -优化和分层级基避免伪模式 .....	286
6.8	具有旋度一致基的空间单元的应用 .....	287
6.9	应用: 深腔散射 .....	289
6.10	小结 .....	291
	参考文献 .....	292
<b>第 7 章</b>	<b>关于奇异场高阶基的介绍 .....</b>	<b>295</b>
7.1	边界场的奇异点 .....	296
7.2	三角极坐标变换 .....	298
7.3	三角形的奇异标量基函数 .....	301
7.3.1	代用型的最低阶数基 .....	301
7.3.2	代用型的高阶基 .....	302
7.3.3	加性奇异基函数 .....	303
7.3.4	无理代数标量基函数 .....	309
7.3.5	范例: 有一个奇异度的二次基 .....	311
7.3.6	范例: 有两个奇异度的立方基 .....	312

7.3.7 估计奇异基的积分 .....	313
7.4 标量基的数值结果 .....	316
7.4.1 边波导结构的特征值 .....	317
7.4.2 改变半径和方位角数目的影响 .....	324
7.5 三角形的奇异矢量基函数 .....	331
7.5.1 替代旋度一致矢量基 .....	331
7.5.2 加性旋度一致矢量基 .....	332
7.6 奇异分层 Meixner 基集 .....	333
7.6.1 奇异点系数 .....	333
7.6.2 辅助函数 .....	334
7.6.3 奇异场的表示 .....	337
7.6.4 奇异标量场 .....	337
7.6.5 奇异静态矢量基 .....	337
7.6.6 奇异非静态矢量基 .....	339
7.6.7 径向函数 $R_n$ 和 $S_n$ 的数值计算 .....	340
7.6.8 范例: 有一个奇异指数的阶数 $p = 1.5$ 的基 .....	341
7.6.9 范例: 有两个奇异指数的阶数 $p = 2.5$ 的基 .....	341
7.7 数值结果 .....	342
7.8 包含拐角的非均匀波导结构的数值结果 .....	359
7.9 具有刃状奇异点的薄金属板的数值结果 .....	364
7.10 小结 .....	367
参考文献 .....	367

# 第 1 章

## 一维内插、近似和误差

在科学研究和工程实践中，通常需要根据由  $s_k \neq s_i$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) 的  $n$  个样本  $f_k = f(s_k)$  得到  $s_i$  处  $\tilde{f}_i$  的值。如果  $s_i$  在由  $n$  个孤立点  $s_k$  定义的区域内部，这是一个内插 (Interpolation) 问题；当  $s_i$  在这个区域外部时，这是一个外插 (Extrapolation) 问题。(本书后文中所涉及的“插值”均指“内插”。) 当由已知离散数据点集重建的函数  $\tilde{f}_s$  正好经过这些点时，内插问题可看作一个特殊的曲线拟合 (或近似) 问题。

内插函数的任务和用数值方法表示一个未知函数  $f_s$  的过程是紧密相关的，后者将在接下来的章节中进行介绍。

### 1.1 线性内插和三角基函数

例如，一个非常简单的定理就是线性内插 (Linear Interpolation) 定理，当将从连续值  $s = s_1, s_2, \dots, s_n$  得到的  $f_1, f_2, \dots, f_n$  用直线连接起来之后，用这  $(n-1)$  条线来得到  $\tilde{f}_s$  在任何中间点的值

$$\tilde{f}(s) = \frac{s_{m+1} - s}{s_{m+1} - s_m} f_m + \frac{s - s_m}{s_{m+1} - s_m} f_{m+1} \quad \text{其中 } s_m \leq s \leq s_{m+1} \quad (1.1)$$

上式可以简单地依据一系列包含  $n$  个系数的  $f_m$  ( $m=1, \dots, n$ ) 来书写，每一个  $f_m$  与一个基函数  $B_m$  相乘， $B_m$  是独立的。

$$\tilde{f}(s) = \sum_{m=1}^n f_m B_m(s) \quad \text{其中 } s_1 \leq s \leq s_n \quad (1.2)$$

其中，



$$B_m(s) = \begin{cases} \frac{s - s_{m-1}}{s_m - s_{m-1}} & \text{其中 } s_{m-1} \leq s \leq s_m \\ \frac{s_{m+1} - s}{s_{m+1} - s_m} & \text{其中 } s_m \leq s \leq s_{m+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (1.3)$$

并且当  $m=1$  (或者  $m=n$ ) 时, 舍弃式 (1.3) 右边的第一个 (或者第二个) 表达式。因为  $B_m(s)$  随着  $s$  变化呈半个三角形或整个三角形的形状, 函数式 (1.3) 构成所谓的“三角基函数 (Triangular Basis Function)”族, 在  $s = s_m$  时有最大值 (等于单位值)。典型线性内插和如图 1.1 所示。图 1.1 左图为由式 (1.3) 三角基函数获得的式 (1.2) 的一个典型线性内插和示意图;  $f_m B_m(s)$  由图 1.1 左图中的虚线表示。这个图也表示, 在每一个区间  $\{s_m \leq s \leq s_{m+1}\}$ ,  $f(s)$  被

$$\tilde{f}(s) = f_m P_0(1, s - s_m) + f_{m+1} P_1(1, s - s_m) \quad (1.4)$$

进行线性内插, 其中,

$$P_0(1, z) = 1 - \frac{z}{s_{m+1} - s_m} \quad (1.5)$$

$$P_1(1, z) = \frac{z}{s_{m+1} - s_m}$$

是图 1.1 右图所示的两个一阶拉格朗日多项式, 其中  $P_0(1, z) + P_1(1, z) = 1$ 。注意到  $P_i(p, z)$  的第一个变量是拉格朗日多项式的阶数  $p$ , 多项式在  $z / (s_{m+1} - s_m) = i / p$  时为单位值。

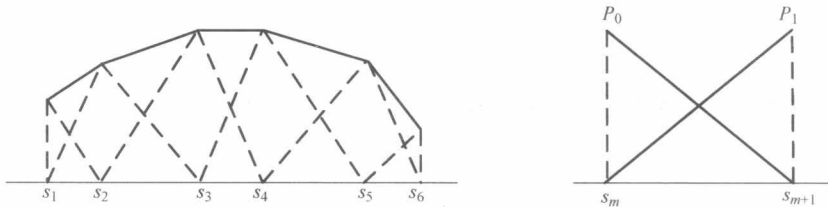


图 1.1 典型线性内插和

图 1.1 (左图) 中, 两个在区间  $\{s_m \leq s \leq s_{m+1}\}$  内的线性基函数是拉格朗日多项式  $P_0(1, s - s_m)$ 、 $P_1(1, s - s_m)$ , 如右图所示。

假设样本是等间隔的, 则对于所有  $m$

$$\ell = s_m - s_{m-1} = s_{m+1} - s_m \quad (1.6)$$

可使式 (1.2) 简化为

$$\tilde{f}(s) = \sum_{m=1}^n f_m B(s - s_m, \ell) \quad \text{其中 } s_1 \leq s \leq s_n \quad (1.7)$$

其中,