普通高等教育应用型“十二五”规划教材

GAODENG SHUXUE

高等数学（下册）

主编　于海波　程薇薇

- 应用型与基础性相统一
- 综合性与针对性相统一
- 任务、案例引导教学

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育应用型“十二五”规划教材

高等数学

（下册）

主　编　于海波　程薇薇

副主编　杜　莹　王　莹

高　敏　冯　洁

北京邮电大学出版社

·北京·

内容简介

本书是根据应用型本科教育人才培养目标，依据最新的《本科数学基础课程教学基本要求》，结合笔者多年教学实践经验编写而成.

本书分为上、下两册出版，下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程.本书在编写过程中充分体现了"重视数学基本理论，突出数学的应用性、实践性"的基本思想.教学内容力求以学习任务为切入点，以数学模型为载体，培养学生专业工程问题的数学分析能力和技巧，将培养学生的创新精神和能力放在高等数学教学的首位.

本书可作为高等院校应用型人才培养的教材，也可作为高等工程技术教育、成人教育的本科教材，以及自学者学习"高等数学"的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/于海波，程薇薇主编.--北京：北京邮电大学出版社，2016.1(2016.3重印)

ISBN 978－7－5635－4586－5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①于… ②程… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第288363号

书　　名　高等数学(下册)
主　　编　于海波　程薇薇
策 划 人　刘国辉
责任编辑　张保林
出版发行　北京邮电大学出版社
社　　址　北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真　010－82333010　62282185(发行部)　010－82333009　62283578(传真)
网　　址　www.buptpress3.com
电子信箱　ctrd@buptpress.com
经　　销　各地新华书店
印　　刷　北京泽宇印刷有限公司
开　　本　787 mm×960 mm　1/16
印　　张　19.5
字　　数　402千字
版　　次　2016年1月第1版　2016年3月第2次印刷

ISBN 978－7－5635－4586－5　　定价：39.00元

前　言

应用型本科教育是培养具有相关知识、能力和综合素质,面向生产、建设、管理、服务第一线的高级应用型专门人才,强调一定的应用性和技能性,强调一定的基础教育,强调一定的后续发展.而高等数学是大学理工类各专业的一门重要的基础理论课,是工程和管理教育中的一个重要内容,因此本书是根据工程技术人员和管理人才培养要求,并结合应用型本科教育的培养目标内容编写的.

在本书编写过程中,我们注意了以下几个方面:

1.教学内容既要突出数学知识的系统性,还要突出数学的应用性,不仅为学生后续的专业课学习打下坚实的理论基础,还要为学生解决生产和工程技术中的实际问题提供理论工具和方法;

2.强调教学内容的物理背景及后继课程的联系,数学概念与应用主要侧重介绍数学的基本概念及其相关的实际背景,加强应用部分的内容,提高学生学习兴趣;

3.教学内容紧密结合工程现象,从工程任务入手,分析工程现象和存在的工程问题,强调数学工具为专业知识学习服务,为解决专业工程问题服务;

4.突出培养学生的“互译”能力,在整个教材体系中,强调培养学生“将数学知识专业化和将专业知识数学化”的双向互译能力.

具体编写分工为:第七章向量代数与空间解析几何由于海波编写,第八章多元函数微分学由杜莹编写,第九章重积分及其应用由王莹编写,第十章曲线积分与曲面积分由程薇薇编写,第十一章无穷级数由高敏编写,第十二章微分方程由冯洁编写.

本书可作为应用型本科学校和高等职业学校各专业的高等数学教材,也可供经济管理类专业选用.

由于水平所限,加之时间仓促,书中难免有不足甚至是错误之处,敬请读者不吝赐教.

编　者

二〇一五年十月

目　录

第七章

向量代数与空间解析几何

◈ **知识目标**：掌握直角坐标系的概念；知道空间中的点和坐标的对应关系；会求空间两点间的距离；掌握向量的相关概念和各种运算规律；掌握空间中的平面、直线、曲线、曲面的基本方程.

◈ **能力目标**：利用空间直角坐标系，认识空间的平面、直线、曲面、曲线；利用空间直角坐标系以及向量的数量积与向量积的概念分析专业中的有关问题；探究空间几何图形，将几何问题代数化，提高分析问题、解决问题的能力.

在学习一元函数的微积分时，我们利用了许多平面解析几何的知识，同样在学习多元函数的微积分时，我们必须先掌握空间解析几何的有关知识.

空间解析几何是利用直角坐标系建立空间的点与有序实数组的对应关系，从而使我们能够通过方程来研究空间曲线、曲面等形体的图形与性质，因此它是学习多元函数微积分的基础.

本章首先建立空间直角坐标系，然后介绍应用极为广泛的向量的概念、运算及坐标表示，并以向量为工具讨论空间的平面与直线，最后介绍一些重要的空间曲面和曲线.

第一节　向量及其线性运算

任务提出　解析几何就是用解析的，或者说代数的方法来研究几何问题. 代数研究的对象是数的运算和关系，而几何研究的对象是点的轨迹和性质. 在直角坐标系下引入点的坐标，把二者有机地联系起来，从而使我们能够用代数的方法研究几何问题.

学习任务　有一种物体，当遇到外力，从 A 点运动到 B 点，试对外力所作的功进行

分析.

任务分析 如果是地面或某一平面上的物体,外力F所作的功可以按以下公式求出,即

$$W=[F\cos\theta-\mu(mg-F\sin\theta)]\cdot s,$$

其中θ表示外力F与物体所成的角,m表示该物体的质量,μ表示摩擦系数,s表示从A点到B点的距离,如图 7-1-1 所示.

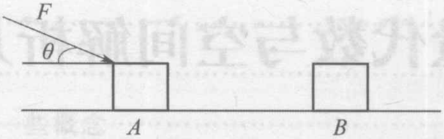

图 7-1-1

我们时常会遇到物体既不在地面上也不在某一平面上,而是悬在空中,此时如何讨论外力所作的功呢?

首先,我们要建立直角坐标系,确定物体在空间的位置,如图 7-1-2 所示.

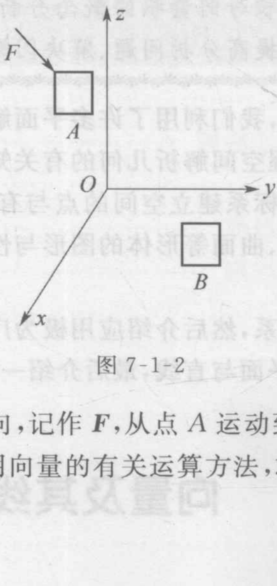

图 7-1-2

其次,外力既有大小又有方向,记作$\boldsymbol{F}$,从点A运动到点B记作$\overrightarrow{AB}$,外力所作的功可以表示成$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$,最后利用向量的有关运算方法,求得了外力所作的功.

知识探究

一、向量概念

在自然科学及工程技术中,有些量如距离、体积、功等,只有大小,没有方向,这样的量称为**数量**(或标量);还有些量如力、速度、电场强度等,除了大小,还有方向,这样的量称为

向量(或**矢量**),即向量是既有大小又有方向的物理量.在几何上,向量通常用空间中一条有向线段来表示,有向线段的长度表示向量的大小,它的方向就表示向量的方向.

若向量起点为 A,终点为 B,则记为$\overrightarrow{AB}$.也可用黑体字母表示向量,如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 等.

向量的大小又叫作向量的**模**,向量$\overrightarrow{AB}$ 的模用$|\overrightarrow{AB}|$来表示,向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为$|\boldsymbol{a}|$.模为1的向量称为**单位向量**,一般意义的单位向量并不唯一;模为零的向量称为**零向量**,记为$\vec{0}$或 $\boldsymbol{0}$,零向量的方向是任意的,或者说零向量的方向是不确定的.

若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同且模相等,则称这两个向量**相等**,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.一般规定向量经过平移以后与原向量相等,即向量完全由它的大小与方向决定,而与它的起点无关,这样的向量叫作**自由向量**.数学中研究的向量都是自由向量,这样就可以把向量的起点放在空间中任何一点,给讨论向量带来方便;而且,对于平行的向量可以认为是共线的.

本章讨论的向量,如不特别说明,都是自由向量.

以坐标原点 O 为起点,向已知点 M 所引向量$\overrightarrow{OM}$,称为点 M 对于点 O 的**向径**.

二、向量线性运算

向量的加法、减法及数与向量的乘法,统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法

定义1　三角形法则(见图 7-1-3):对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,以 A 为起点作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,向量 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

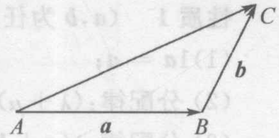

图 7-1-3

当两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时,定义它们的和向量为:当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,和向量的方向与这两个向量的方向相同,长度等于这两个向量的长度之和;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,和向量的方向与其中模较大的向量的方向相同,长度等于这两个向量的长度之差的绝对值.

向量加法满足如下运算规律.

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(见图 7-1-4);

(3) 零向量:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) 反向量:$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

2. 向量的减法

与数量的减法类似,向量的减法可以视为向量加法的逆运算.

定义2　若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

与向量 $\boldsymbol{b}$ 长度相等、方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{b}$ 的**负向量**(或**逆向量**),记作 $-\boldsymbol{b}$.如力学中作用力与反作用力互为反向量.这与熟知的数量代数运算一致.由此,容易得出向量

减法的三角形法则（见图 7-1-5），取 O 为起点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是差向量，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

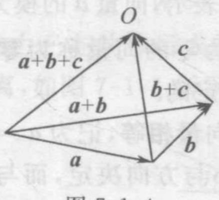

图 7-1-4

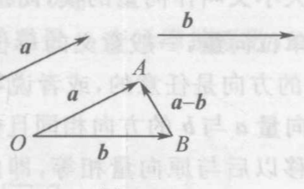

图 7-1-5

3. 向量与数量的乘法

将 m 个相同的向量 $\boldsymbol{a}$ 相加，得到的和向量为 $\boldsymbol{r}$，则 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同，其模 $|\boldsymbol{r}|=m|\boldsymbol{a}|$. 由此可以定义数向量的乘法.

定义 3　设已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 m，规定乘积 $m\boldsymbol{a}$ 是这样一个向量：**模** $|m\boldsymbol{a}|=|m||\boldsymbol{a}|$；**方向**：当 $m>0$ 时，$m\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $m<0$ 时，$m\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $m=0$ 时，$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

结论　若 $\boldsymbol{a}_1$ 平行于 $\boldsymbol{a}_2$，则 $\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{a}_1$（$\lambda$ 为一常数）；若 $\boldsymbol{a}_2=\lambda\boldsymbol{a}_1$，则 $\boldsymbol{a}_1$ 平行于 $\boldsymbol{a}_2$.

性质 1　（$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为任意向量；λ，μ 为任意实数）

(1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) 分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$（见图 7-1-6）；

(4) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，则有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{a}^0$ 或 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$（$\boldsymbol{a}$ 不为零向量）.

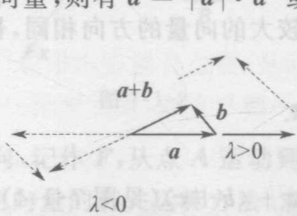

图 7-1-6

训练 1　在 $\triangle ABC$ 中，D，E 是 BC 边上的三等分点（见图 7-1-7），设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$.

解　由三角形法则，有 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，再由数与向量乘积定义，有 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，从 $\triangle ABD$ 及 $\triangle AEC$ 中可得

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}),$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}).$$

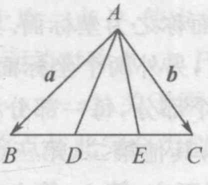

图 7-1-7

训练 2　用向量的运算来证明：三角形两腰中点的连线平行于底边且其长度为底边的一半.

证　如图 7-1-8 所示，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

命题得证.

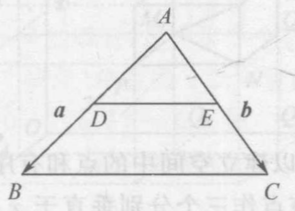

图 7-1-8

三、空间直角坐标系

1. 空间点的直角坐标

我们知道，通过平面直角坐标系，可以将坐标平面上的点与一对有序实数对应起来，从而可用代数方法来讨论几何问题. 现将这种思想加以推广，引进空间直角坐标系，从而将空间中的点用一个有序数组来表示.

在空间中取定一点 O 作为原点，通过该点作三条相互垂直的数轴，分别称为 x 轴、y 轴和 z 轴，统称为坐标轴. 三个坐标轴上的单位长度通常都相同（这些长度单位也可以不同，

但本章中如无特别声明，则三个轴上都取相同的长度单位）.

通常将 x 轴和 y 轴置于水平面上，z 轴取铅直方向（见图 7-1-9）. 三个坐标轴的次序和方向一般按右手法则来排列. 用右手握住 z 轴，四个手指从 x 轴的正向旋转 $90°$ 到 y 轴的正向时，拇指的指向就是 z 轴的正向. 按右手法则确定的坐标系称为右手系.

由任意两条坐标轴所确定的平面称之为坐标面. 三个坐标轴确定了三个坐标面，x 轴和 y 轴所在的平面称为 xOy 坐标面，另外两个坐标面分别是 yOz 坐标面和 zOx 坐标面.

三个坐标面将整个空间分为八个部分，每一部分称为一个卦限. 含有 x 轴、y 轴和 z 轴的正半轴的那个卦限称为第一卦限，其他第二、第三、第四卦限都在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定，第五卦限在第一卦限下方，第六、第七、第八卦限也都在 xOy 面的下方，按逆时针方向确定. 这八个卦限分别用罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 来表示（见图 7-1-10）.

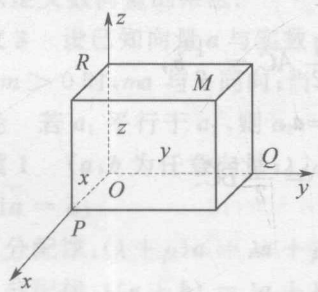

图 7-1-9

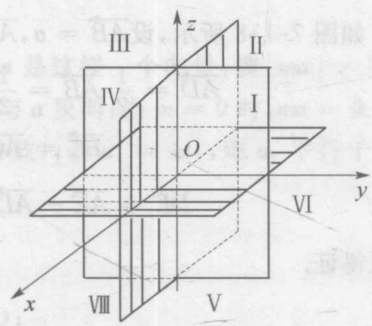

图 7-1-10

2. 空间中点的坐标

有了空间直角坐标系，就可以建立空间中的点和有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点，过该点作三个分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，它们与 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于 P 点、Q 点和 R 点. 这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x，y 和 z，从而空间中的一点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x,y,z)；反之，给定了一个有序数组 (x,y,z)，则确定了在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x，y 和 z 的三个点 P，Q，R，过这三个点各作一个分别与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面，这三个平面有唯一的交点，这个交点就是有序数组 (x,y,z) 所确定的点 M（见图 7-1-9）.

这样，利用空间直角坐标系，就在有序数组 (x,y,z) 与空间中的点 M 之间建立了一一对应关系. 有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的**坐标**. 其中 x，y 和 z 分别称为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**. 在以后的表述中，常把一个点和表示这个点的坐标不加区别，所说的给定一点，就是给定这个点的坐标；所说的求一个点，就是求一个点的坐标.

坐标面与坐标轴上的点的坐标有一定特点. 例如，xOy 面上的点，其竖坐标 $z=0$；

zOx 面上的点，其纵坐标为 $y=0$；yOz 面上的点，其横坐标为 $x=0$；z 轴上的点的横、纵坐标均为零，即 $x=0$，$y=0$；同样，x 轴上的点有 $y=0$，$z=0$；y 轴上的点有 $x=0$，$z=0$；原点的三个坐标均为零。

从点 $M(x,y,z)$ 引垂直于 xOy 面的直线，直线与 xOy 面的交点 $N(x,y,0)$ 称为点 M 在 xOy 面上的投影. 在 MN 延长线上取一点 P，使点 P 到 xOy 面的距离等于点 M 到 xOy 面的距离，称点 P 是点 M 关于 xOy 面的对称点，点 P 的坐标为 $(x,y,-z)$. 完全类似，点 M 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(x,-y,-z)$，关于原点对称点的坐标为 $(-x,-y,-z)$，点 M 关于其他坐标面、坐标轴的对称点与此完全类似.

各卦限内，点的坐标符号为

Ⅰ：(+，+，+)	Ⅱ：(−，+，+)	Ⅲ：(−，−，+)	Ⅳ：(+，−，+)
Ⅴ：(+，+，−)	Ⅵ：(−，+，−)	Ⅶ：(−，−，−)	Ⅷ：(+，−，−)

3. 两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点，我们可用两点的坐标来表达它们间的距离 d.

将 M_1，M_2 的坐标画出，如图 7-1-11 所示.

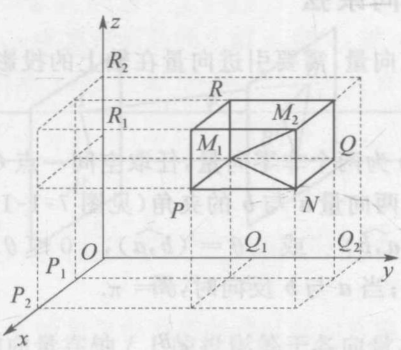

图 7-1-11

有

$$d^2=|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2=|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2,$$

由于

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|M_1Q|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|M_1R|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

所以

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

特别地，$M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离为 $d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

训练3 在 z 轴上求一点 M，使点 M 到点 $A(1,0,2)$ 和到点 $B(1,-3,1)$ 的距离相等.

解 因为所求的点 M 在 z 轴上，故 M 的坐标应为 $(0,0,z)$. 根据题意，有

$$\sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0+3)^2+(z-1)^2},$$

解得

$$z=-3,$$

即点 M 的坐标是 $(0,0,-3)$.

训练4 已知一动点 $M(x,y,z)$ 到两个点 $A(1,2,3)$ 和 $B(-1,-3,0)$ 的距离总是相等，求点 M 的坐标所满足的方程.

解 由已知条件，有

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+3)^2+z^2},$$

两端平方后整理，得

$$2x+5y+3z-2=0,$$

即动点坐标应满足这个三元一次方程.

四、向量的投影、方向余弦

为了用分析方法来研究向量，需要引进向量在轴上的投影的概念.

1. 向量的投影

(1) 向量的夹角：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则称这两向量正向间的夹角 θ 为两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角（见图 7-1-12），记作

$$\theta=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\quad 或\quad \theta=(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}}),\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\theta=0$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\theta=\pi$.

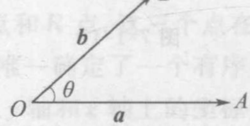

图 7-1-12

(2) 点在轴上的投影：设 A 是空间一点，l 是一轴，通过 A 点作平面 α 垂直于 l，则平面 α 与轴 l 的交点 A' 叫作点 A 在轴 l 上的投影（见图 7-1-13）.

(3) 向量在轴上的投影：若向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 l 上的投影分别为 A' 和 B'（见图 7-1-14），则轴 l 上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 的值（记为 $A'B'$）叫作向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_l\,\overrightarrow{AB}=A'B'$.

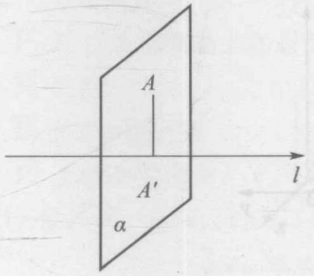

图 7-1-13

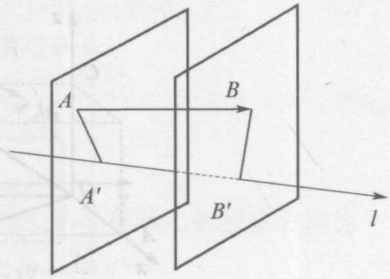

图 7-1-14

定理 1　$\mathrm{Prj}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi$.

证　通过向量$\overrightarrow{AB}$的起点A引轴l'与l平行，且有相同的正方向，则轴l和向量$\overrightarrow{AB}$间的夹角φ等于轴l'与$\overrightarrow{AB}$间的夹角，且有

$$\mathrm{Prj}_l \overrightarrow{AB} = \mathrm{Prj}_{l'} \overrightarrow{AB} \quad (\text{见图 7-1-15}),$$

$$\mathrm{Prj}_{l'} \overrightarrow{AB} = A'B' = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi,$$

所以$\mathrm{Prj}_l \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi$. 当$\varphi$为锐角时，投影为正；当$\varphi$为钝角时，投影为负；当$\varphi$为直角时，投影为 0.

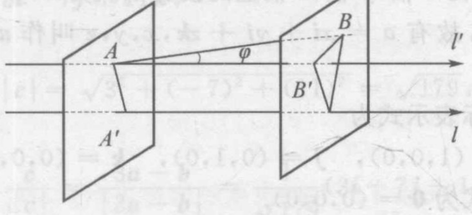

图 7-1-15

推广　有限个向量的和向量在轴l上的投影等于各向量在轴l上投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_l(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_l \boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_l \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_l \boldsymbol{a}_n.$$

前面用几何方法讨论了向量的表示和运算，这种方法虽然直观，但难以进行精确计算，有些问题仅靠几何方法也是难以解决的. 下面引进向量的坐标，将向量与有序数组联系起来，从而也可以用代数方法来研究向量.

2. 向量坐标的分解

设向量$\overrightarrow{OM}$的起点是坐标原点，而终点M的坐标为$x = OA, y = OB, z = OC$(见图 7-1-16).

今考虑折线$OAPM$和它的封存闭线OM，得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

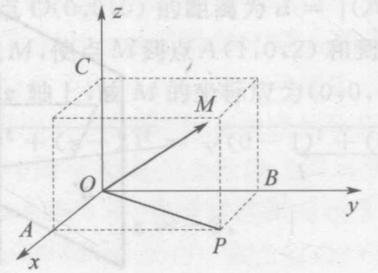

图 7-1-16

向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 叫作向量在坐标轴上的**分向量**.

取坐标轴 Ox，Oy，Oz 上以 O 为起点的三个单位方向向量，分别记为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，叫作**基本单位向量**.

又$\overrightarrow{OM}$ 在坐标轴上的分向量为 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，所以$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，这个式子称为向量$\overrightarrow{OM}$ 按基本单位向量的分解式，其中三个数量 x，y，z 是$\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的投影.

3. 向量的坐标表示

一般地，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影依次为 x，y，z，则其在 x 轴，y 轴，z 轴上的分向量为 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$，故有 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$x$，$y$，$z$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式，也可记为$\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

基本单位向量的坐标表示式为

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

零向量的坐标表示式为$\boldsymbol{0}=(0,0,0)$.

例如 $\boldsymbol{a}=(2,3,1)=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+1\boldsymbol{k}$.

利用向量的坐标，其加、减及向量与数的乘法的运算如下：

设

$$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\quad \boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2),$$

则

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

所以有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2)\boldsymbol{i}+(y_1+y_2)\boldsymbol{j}+(z_1+z_2)\boldsymbol{k}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2)\boldsymbol{i}+(y_1-y_2)\boldsymbol{j}+(z_1-z_2)\boldsymbol{k}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)\quad (\lambda\text{ 为一常数}).$$

案例 1 设两定点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标(图 7-1-17).

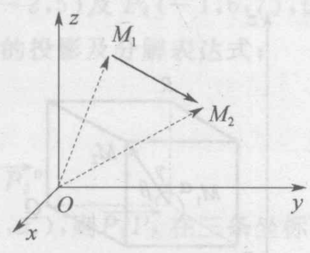

图 7-1-17

解　作向量$\overrightarrow{OM_1}$,$\overrightarrow{OM_2}$,$\overrightarrow{M_1M_2}$,则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1},$$

$$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$
$$=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

训练 5　$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$,求 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 方向的单位向量.

解　因为
$$\boldsymbol{c}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=3(2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})-(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k})$$
$$=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k},$$

于是

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3^2+(-7)^2+(11)^2}=\sqrt{179},$$

所以

$$\boldsymbol{c}^0=\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{|3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{179}}(3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}+11\boldsymbol{k}).$$

4. 方向余弦

向量可以用它的模和方向来表示,也可以用它的坐标来表示. 为了找出向量的坐标与向量的模、方向之间的联系,我们先介绍一种表达空间方向的方法.

与平面解析几何里用倾角表示直线对坐标轴的倾斜程度相类似,我们可以用向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 与三条坐标轴(正向)的夹角 α,β,γ 来表示此向量的方向,并规定 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$(见图 7-1-18),$\alpha,\beta,\gamma$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**.

过点 M_1,M_2 各作垂直于三条坐标轴的平面,如图 7-1-18 所示. 可以看出,由于 $\angle PM_1M_2=\alpha$,又 $M_2P\perp M_1P$,所以

$$a_x=M_1P=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\alpha=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,$$
$$a_y=M_1Q=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\beta=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\qquad ①$$
$$a_z=M_1R=|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\gamma=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma.$$