大师之作　醒醐灌顶　学好高数的必读经典

高等数学新生突破

一元函数积分学

邵　剑　著

3

解题方法巧妙多样且极具典型性

几乎每题都有“注记”评析

“注记”均以科学研究的方法提炼、论文写作的规范表述

被众多数学教师大力推荐，被推崇为顶尖高数辅导书

上海远东出版社

高等数学新生突破

一元函数积分学

邵 剑 著

3

上海远东出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学新生突破．一元函数积分学／邵剑著．—
上海：上海远东出版社，2019
ISBN 978-7-5476-1514-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①邵… Ⅲ.①微积分—高等学校—题
解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 134109 号

责任编辑 曹 建
责任校对 祁东城
装帧设计 李 廉
责任印制 晏恒全

高等数学新生突破：一元函数积分学
邵 剑 著

出 版 上海远东出版社
(200235 中国上海市钦州南路 81 号)
发 行 上海人民出版社发行中心
印 刷 上海锦佳印刷有限公司
开 本 890×1240 1/32
印 张 7.375
字 数 205,000
版 次 2019 年 8 月第 1 版
印 次 2019 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5476-1514-0/G·967
定 价 45.00 元

好人的充分必要条件是能考虑到他人，即能利他的人.

教师，就是考虑他人、为学生着想，践行着好人价值的一种职业.

合格的教师应具有较强的亲和力.师生在倾听、陪伴、互动交流中建立亲和的关系，互相尊重、互相信任、互相依恋，产生友情、恩情、不舍和爱.

教师对学生的关爱是无私的、纯真的、深远的；学生对老师的喜爱是最真情、最珍贵、最有价值的.

（摘自浙江大学学生记录的“邵爷爷语录”，有改动.下同.）

前言

朋友！你我不曾相识，但高兴的是我们有幸相聚于本书之中. 这是一种缘分，更是一种信任与情感的交流，愿通过本书我们能成为好朋友——真正的好朋友！因为一切的美，数情最美.

你的可爱让我陶醉，你的优秀使我感动.

你的青春令我羡慕，你的现在由我陪同.

创新，是人类社会活动永恒的主题. 创新活动和科学研究需要具有一定的基础与专业知识的积累，需要具有相当的创新思维，需要具有终身学习的能力. 这些都是高等教育的基本任务，希望你们先从本书的学习中得以培养和提升.

笔者一辈子坚守并实践着的教和学的理念是：创新思维的教和学，情与爱的教和学，愉悦而轻松的教和学.

非初等数学的数学皆为高等数学. 二者的根本区别在于：初等数学研究的是**有限**的，又是**静态**的；高等数学研究的是**无限**的，又是**动态**的. 显然，高等数学比初等数学研究的范围更广、难度更大、探索的未知更多. 人们俗称的高等数学课程，仅仅涉及整个高等数学中最基础的极少部分.

按创新思维与方法，专题梳理与解悟高等数学课程中各个知识点是一种较高的思想境界，可以让你掌握创新活动中一些常规的思维和方法，会让你觉得这种学习挺好玩儿的，能提高你的终身学习能力. 本书就是强调创新思维与数学知识的贯通，突出用

撰写科学研究论文的路线加以阐述. 本书具有个性的“注记”就是对有关专题的剖析与延拓及其思想的最好解悟.

好人的充分必要条件是考虑到他人. 爱与情的核心也就在于尊重对方、考虑对方. 教师为学生着想,作者为读者考虑,均体现着爱与情. 学生接受这种被爱是对教师的敬重,读者喜爱并接受书中的见解和字里行间的情是对作者的肯定. 这说明双方都是好人,大家都持有“待贤者谦,待善者恭”的精神.

正是笔者考虑着你们,才把本书写成一部具有可读易懂、内容全面、方法多样、综合性强等特点的大全;又具有概念清晰、叙述严谨、思想丰富、思维活跃等特色;还在许多“注记”中提供了相关的练习题. 本书的写作风格是以朋友交流的谈话形式,是没有声音的讨论式课堂教学.

好人考虑着他人,就是让他人有收益、有快乐. 学生喜爱的好教师是这样,读者喜爱的好作者也是如此. 笔者怀着为了学生和读者有收益有快乐的理念,坦诚用心写成了本书. 当然也期望你们用心、静心研读本书,诚如是,则你一定会在系统梳理数学知识的同时,在学业上、思维上都有收益和提高,进入更高的境界,并愉悦又轻松着.

本书(一套四册)适用于工学、理学、经济学、管理学等各学科、各专业的如下几类读者:

(1) 正在学习“高等数学”(含“微积分”、“常微分方程”等)课程的读者. 本书各章节的编排是与“高等数学”(含“微积分”、“常微分方程”等)课程的常用教材及其教学顺序相一致的,故对初学者,尤其是大学新生来说它是一部极好的高等数学同步辅导用书.

另外，请读者根据自己报考研究生的专业要求，按照教育部当年颁布的数学考试大纲选用本书中有关章节的相关内容.

(2) 正在选学"数学分析"课程的读者. 本书覆盖了"数学分析"课程中纯分析理论以外的全部内容，且达到了相应的高度. 所以本书也是正在学习"数学分析"课程读者的很好的辅导用书.

(3) 从事"高等数学"课程和"数学分析"课程教学工作的教师. 本书可以作为这些教师朋友的教学参考用书，愿对大家有一定的帮助.

这里，特别感谢本书责任编辑、上海远东出版社曹建编审！感谢他的关注，使笔者长期创立的教学理念与教学风格在本书中得以部分展示. 他在每个细节中处处体现出来的考虑读者、关心作者的好人品质让我感动.

本书的不当甚至差错之处，唯望从各位同仁与朋友中多获教言以增益，谢谢！

邵　剑

2019 年 7 月于杭州

目录

世上有的东西是可以补救的，但有的东西失去了便再也回不来了，比如青春.

忏悔也没有用，等到失去了才追悔莫及就一切都晚了.

当你青春渐逝，感到孤独、迷惘之时再去回望就可惜了.

你应该为自己的行为负责，你应独自承担责任.怪罪不了他人，他人也代替不了你.“悟”是你最重要的伴侣，它们将伴随你终生！

希望你的优秀不要因你的细节疏忽而逊色，你的机遇不要因你的习惯不当而错失.因为良好的习惯是人生之福、生命之缘.因为细节体现着差距，习惯影响着成败.

希望你在追寻你的梦想过程中，不以己悲，不以物喜.得未必尽得，失未必尽失.

男人强有力的肌肉是一种艺术之美，又是精神之美.

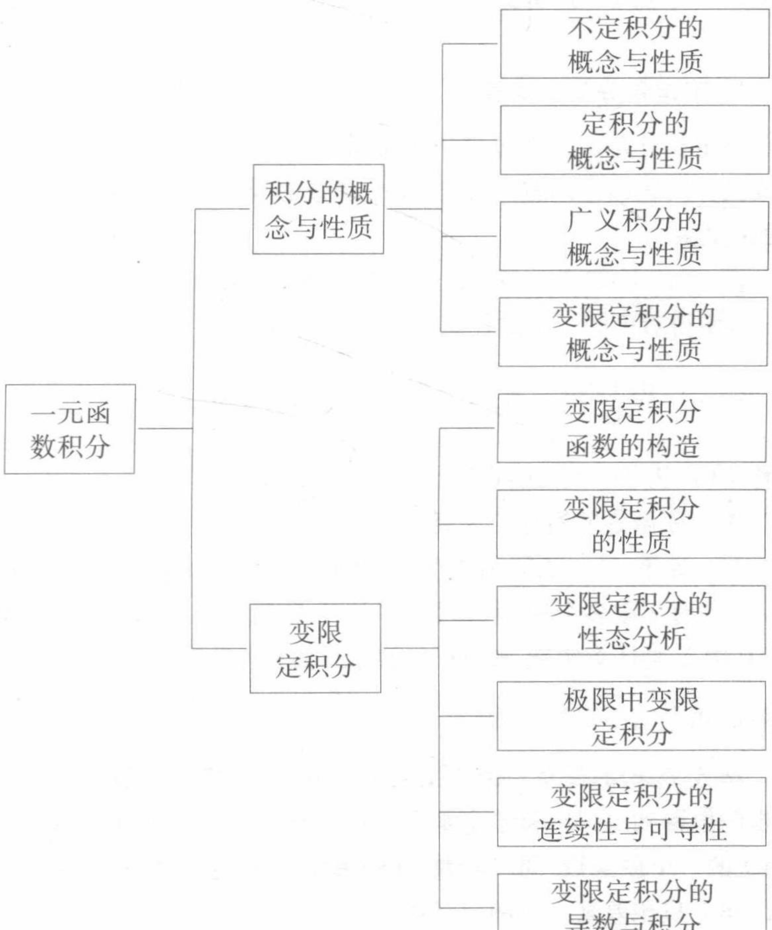
一天，在校园里，几位穿着短袖T恤衫的男孩让我眼睛一亮，让我目瞪口呆.令人羡慕的、完美匀称的形体，帅哥的阳光之美映入眼帘.每人两大块胸肌让我目不转睛，雄健的双手臂的肱头肌一块一块凸显，八块腹肌显露易见，肌肉紧实线条分明，有力而富有弹性，挺胸收腹的挺拔身材，当今难以寻觅，真是罕见！让我惊讶，让我激动，兴奋使我久久难以平静.我为他们骄傲.为他们欢呼！

他们什么时候开始力量的训练，是什么萌发他们去健身等疑问纠缠着我.他们似乎看出我的疑惑，微笑着对我说："老师，就是你提出的男人胸肌论观点促使我们坚持每天走进了健身房.还不到半年，我们已深深感受到男人拥有胸肌的自豪与自信.老师，谢谢您！"

我真高兴！一为他们拥有男人雄健有力的体魄与气质而高兴；二为他们善于倾听与反思的优秀品质而高兴.

第 5 章

一元函数积分的概念与性质



一元函数积分学是积分学的基础，它包括不定积分与定积分及其延拓的广义积分.

§5.1 一元函数积分的概念与性质

5.1.1 不定积分与定积分的概念

1. 不定积分与原函数

不定积分是作为微分法的逆运算引入的，它是求已知函数的导数或微分问题的逆问题. 即已知某个函数的导函数，求其原来这个函数的问题.

设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，如果存在一个可微函数 $F(x)$，使得对区间 I 上的任意一点 x 都有

$$\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x), \quad \text{或} \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

关于原函数的概念应注意以下几点：

1° 如果 $f(x)$ 的原函数存在，设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么，$f(x)$ 有无限多个原函数，且 $F(x)+C$ 包含了 $f(x)$ 的所有原函数，其中 C 是任意常数. 则 $f(x)$ 的原函数全体为 $F(x)+C$，即 $f(x)$ 在该区间上的不定积分为 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.

函数 $f(x)$ 的任意一个原函数可在 $F(x)+C$ 中给积分常数 C 以适当的值得到. 另外，每给定常数 C 的一个值 C_0，则 $F(x)+C_0$ 表示 $f(x)$ 的一个原函数. 同一函数 $f(x)$ 的任意取定的两个原函数在同一区间上只相差某一个确定常数.

对确定的值 C_0，$y=F(x)+C_0$ 的图形是一条曲线，称它为 $f(x)$ 的积分曲线. 当 C 取不同的数值时，就得到一簇积分曲线. 这些积分

曲线在横坐标相同的点处的切线是彼此平行的，切线斜率都等于$f(x)$，而且它们的纵坐标只相差一个常数.

2° 若函数$f(x)$在某区间I上连续，则$f(x)$在该区间上的原函数一定存在.但这个原函数不一定是初等函数，例如，$f(x)=e^{-x^2}$在$(-\infty, +\infty)$上连续，故它的原函数存在，但它的原函数却是用无穷级数来表示的非初等函数.

这里还要强调的一点是：某函数连续只是其原函数存在的充分条件，而不是必要条件.例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由于$\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)$不存在，故$x=0$是$f(x)$的第二类间断点，所以$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上不连续，但它的原函数存在，如

$$F(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

是$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上的一个原函数.因为当$x\neq 0$时$F'(x)=\left(x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)'=2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$；而当$x=0$时，

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}-0}{x}=0.$$

3° 在区间I内有第一类间断点的函数不存在原函数.

例1 设函数$f(x)$在区间I上有原函数$F(x)$，即$F'(x)=f(x)$，$x\in I$.证明：若$x_0\in I$是$f(x)$的间断点，则x_0必为$f(x)$的第二类间断点.

证明 用反证法证明如下：反设x_0为$f(x)$的第一类间断点，则它的左右极限

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} F'(x), \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} F'(x)$$

均存在. 由于 $F(x)$在点 x_0 处可导,故 $F(x)$在点 x_0 处必连续,从而由 3.1.1 节例 3 得

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} F'(x) = F'_-(x_0) = f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} F'(x) = F'_+(x_0) = f(x_0).$$

这就是说 $f(x)$在点 x_0 处连续,与假设 x_0 是 $f(x)$的第一类间断点相矛盾,故题设结论成立.

2. 定积分的定义

导数的定义是差商的极限,作为它的对偶情形,考虑乘积之和的极限就引入了定积分. 正确理解定积分的概念是十分重要的.

在定积分的定义中应强调四个"过程"、两个"有界"、两个"任意"、两个"有关"及对积分区间剖分的无限变细等.

1° 对于定义在区间$[a, b]$上的有界函数 $f(x)$,经过对区间$[a, b]$的剖分、在每个小区间上取近似、再作和、取极限四个过程,如果得到的黎曼和的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在,则把它定义为 $f(x)$ 在$[a, b]$ 上的定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,同时称 $f(x)$ 在$[a, b]$ 上可积. 其中,λ 为所有子区间长度的最大值.

2° 要求定积分的积分区间$[a, b]$是有界的,定义在$[a, b]$上的函数 $f(x)$是有界的. 否则,若区间$[a, b]$是无限的,则剖分所得的子区间中至少有一个子区间长度是无限的,故诸近似值 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 中至少有一项没有意义. 若函数 $f(x)$无界,则 $f(x)$至少在一个子区间上无界,故可以通过 ξ_i的选取使得积和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 必定是无界的,因此,该和式的极限不存在,即 $f(x)$ 在$[a, b]$ 上不可积.

上述讨论同时也说明:函数 $f(x)$在$[a, b]$上有界是 $f(x)$在

$[a, b]$上可积的必要条件而不是充分条件.

3° 定积分的定义中黎曼和式的极限存在，必须强调它对区间$[a, b]$剖分的任意性与在子区间$[x_i, x_i+\Delta x_i]$上点ξ_i选取的任意性. 也就是说，黎曼和式的极限存在与区间$[a, b]$的剖分法及各点ξ_i的选取无关.

反之，当$f(x)$在$[a, b]$上可积，即定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在时，利用定义计算定积分可以采用对区间$[a, b]$的特殊分法及各点ξ_i的特殊取法，使积分和式的极限容易计算.

例 2 用定积分定义求定积分$\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

解 因$f(x)=\mathrm{e}^x$在$[0, 1]$上连续，故其可积. 于是可对$[0, 1]$作n等分，并取小区间$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right](k=1, 2, \cdots, n)$的右端点为$\xi_k=\frac{k}{n}$，则按定积分的定义与等比数列求和公式得

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\xi_k}\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\ \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}+\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}+\cdots+\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}(1-\mathrm{e}^{\frac{n}{n}})}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}} = \mathrm{e}-1.\end{aligned}$$

4° 定积分的数值，即积分和式的极限，只与被积函数$f(x)$及积分区间$[a, b]$有关. 所以在定积分应用中，确定被积函数$f(x)$与积分区间$[a, b]$是十分重要的. 其中，关键的一步是在子区间$[x_i, x_i+\Delta x_i]$上近似地写出所求量Q的部分量ΔQ_i的近似值$f(\xi_i)\Delta x_i$，一旦它确定后被积表达式也就确定.

同时可知，定积分与其积分变量的记号无关，所以有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

5° 在定积分定义中，对积分和式求极限是要求所有小区间长

度的最大值 $\lambda\to 0$，它刻画了积分区间 $[a, b]$ 的剖分无限变细的极限过程. 显然，当积分区间无限细分时，相应的子区间的个数 n 也一定无限增加；反之，子区间的个数 n 无限增加，即 $n\to\infty$ 时，并不能保证对区间 $[a, b]$ 的无限细分. 因此，在定积分定义中必须是 $\lambda\to 0$ 的极限过程，而不能用 $n\to\infty$ 来代替对区间的无限细分的极限过程.

6° 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必定可积.

3. 利用定积分的定义求极限

如果考虑函数乘积之和形式的极限，或者是可以化为乘积之和形式的极限，则通常宜联想到定积分的定义，用定积分表示其极限.

由定积分的定义可知，必须强调对区间 $[a, b]$ 剖分的任意性与其每个子区间上点 ξ_i 选取的任意性，相应的黎曼和极限都存在，才称函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积. 反之，当函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积时，可以对区间 $[a, b]$ 作某种特殊的剖分，如 n 等分；又可以在每个子区间上取特定的点 ξ_i，如取小区间的左端点或右端点或满足某种性质的特殊点. 如果这种特定的黎曼和的极限恰为待求的极限，那么，原极限就等于定积分 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

用定积分表示乘积之和的极限，关键是根据所给积和式确定被积函数与积分区间.

例 3 求乘积之和的极限.

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right).$$

解法 1 把所求的极限 I 改写为 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{1}{n}$.

若以连续函数 $\sin\pi x$ 为被积函数，因分点 $\frac{1}{n}$ 与 $\frac{n-1}{n}$ 在 $n\to\infty$ 时分别趋于零与 1，故积分区间取为 $[0, 1]$；因连续函数 $\sin\pi x$ 在 $[0, 1]$ 上可积，故可对积分区间 $[0, 1]$ 作 n 等分，$\Delta x_k=\frac{1}{n}$. 并取 ξ_k 为子区间 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ 的右端点，则