薛 威 ⊙ 编著

2020

薛威考研数学系列

高等数学辅导精讲

（数学一、二、三通用）

- 赠新东方名师80小时视频
- 专享考研数学互助答疑群
- 助你零基础进阶数学高分

授课视频及更多服务获取方法

本授课视频及相关服务为正版图书专享，获取方法请扫描下方二维码或参考封底说明。

获取方法请扫码

新东方薛威微博

科学出版社

薛威考研数学系列

高等数学辅导精讲

（数学一、二、三通用）

薛　威　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书按照考研数学大纲的要求，以历年考研数学真题中的典型题目及分析详解为主线，内容包含典型方法的归类总结、重要和常用技巧的运用、考生易错点的提示、重点题型的考研预测等. 相比其他考研数学辅导图书有以下特色：(1) 紧扣大纲要求，精选历年考研真题，分模块分阶段地指导考生科学备考；(2) 精心设计本书模块和栏目，辅助考生深入思考和总结测评；(3) 配套视频讲解浓缩新东方名师十年考研数学面授讲课精华.

本书可供准备参加研究生入学考试(数学一、数学二、数学三)的应届大学生、往届大学生或在职备考人员作为复习教材使用，也可供本科院校希望期末得高分和得奖学金的大学生、立志于保研的学霸、参加经济类联考(简称 396)的考生作为参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导精讲：数学一、二、三通用/薛威编著. —北京：科学出版社，2019.3
(薛威考研数学系列)
ISBN 978-7-03-060858-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①薛… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 049076 号

责任编辑：王胡权 / 责任校对：杨聪敏
责任印制：师艳茹 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市密东印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2019 年 3 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2019 年 3 月第一次印刷 印张：27
字数：641 000

定价：59.80 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

研究生入学考试作为一门选拔高层次人才的考试, 带有极强的应试色彩, 而考研数学作为理工和经济类考生投入精力最多, 回报最小的科目, 一直是广大考生复习过程中的痛. 近年来, 考研数学难度一直在缓慢地提升, 为了帮助考生更高效率地复习考研数学, 考取高分, 笔者将在新东方近万小时的授课经验提炼成"薛威考研数学系列"图书 (包含高等数学辅导精讲、线性代数辅导精讲、概率论与数理统计辅导精讲三册), 希望能帮助广大考生考上理想的院校.

体现的教学理念就是：计算熟练！题型熟练！真题熟练！

执行的教学过程就是：背三遍！记三遍！算三遍！

最终的教学结果就是：心态稳！计算熟！分数高！

一、考研数学复习注意事项

1. 以考研真题为主, 以教材习题为辅

考研数学题目综合性强, 计算量大, 解题技巧高. 许多考生在前期复习过程中花费大量时间学习教材上的习题, 最终考场上却发现考研真题题目都读不懂, 这源于考研真题难度远远高于高等数学教材课后习题的难度, 综合性也远远高于大多数高校期末考试要求. 所以应该一开始就按照考研大纲的要求, 以考研真题为主, 本着循序渐进的学习原则, 题目难度逐渐递进, 按模块复习, 才是最有效的复习策略.

2. 以做题为主, 以听课为辅

考研数学一般要经历这么几个阶段：**看懂题目**、**听懂讲解**、**独立解题**、**步骤完整**、**计算迅速**、**答案正确**. 复习过程中, 听课很重要, 但只是听懂讲解还不够, 如果不反复练习做题, 考场上就会发现, 题目虽然能看懂, 但是计算不出来, 这时候只有望卷兴叹, 默默哭泣, 这是很多考生考场上吃亏的原因. 题目听得懂, 距离真正掌握解题方法还有很大差距. 要求考生在听懂视频讲解的同时, 将这些题目反复演算至少三遍, 以此来巩固已掌握的知识点并培养扎实的计算能力, 这才是考场上高水平发挥的保证.

3. 以熟练为主, 不能满足于会做

考研数学高分的本质就是真题解题的熟练程度, 要对题型思路、解题套路、计算技巧形成"条件反射式"的记忆. 考研数学想取得高分的根本途径就是"提高解题速度""确保计算

准确”“规范书写步骤”, 这要求数学考生平时复习时便做到基础理论扎实、题型熟练、方法正确、书写规范, 考场上才能从容发挥, 获取高分.

4. 以聚焦典型真题为主, 不搞题海战术

考研真题永远都具有不可替代的作用, 是命题人几十年命题规律的展现, 最能体现考研命题的思路. 考生要跟随老师, 认真总结真题中最精华的部分（那些能够体现命题规律的题目）, 考生应该把典型真题的解题思路、解题方法和解题技巧融会贯通, 才能在考场上以不变应万变, 气定神闲, 游刃有余. 不要浪费宝贵时间去盲目地做一些难题、偏题、怪题.

5. 以高效复习为主, 不能低效重复

考生复习时间有限, 高效复习才是制胜的关键. 虽然考研数学分值占比高, 但是专业课和英语的复习也很重要, 考生不应该把所有时间都用在复习数学上, 本书及配套视频讲解, 可以帮助学生高效复习, 节省时间, 提高总分.

二、本书几大特色及使用方法

1. 紧扣大纲要求, 精选历年考研真题, 分模块分阶段地指导考生科学备考

本书每一章分为三大模块：考试要求及考点精讲、内容精讲及典型题型、专题精讲及解题技巧, 几个模块的简单介绍及使用方法如下：

考试要求及考点精讲模块采用表格对全国硕士研究生招生考试大纲（以下简称大纲）分科目进行说明, 并对考点进行了简要说明. 让考生对大纲考试要求和考试内容一目了然, 心中有数, 鉴于近年来考试题目难度增加, 为了更加灵活地应对考试要求, 采取就高不就低的原则, 建议考生在复习过程中, 按大纲要求中的最高要求来复习.

内容精讲及典型题型模块适合基础阶段复习使用, 其中典型题型部分以历年真题为主, 题型全, 难度适中, 基本覆盖了历年考研数学真题中所有典型题型和解题方法, 要求考生至少认真学两遍. 第一遍认真听视频讲解, 熟悉知识点, 熟悉题型和熟悉计算. 第二遍先独立做题, 看能不能流畅解答, 然后结合视频讲解, 归纳解题方法和技巧, 验证解答步骤.

专题精讲及解题技巧模块适合强化阶段复习使用, 题目计算强度大, 解题技巧高, 方法综合性强, 会运用到跨章节的知识点, 难度略高于考试要求, 体现考研命题的规律和趋势. 建议基础较弱考生在第二轮复习的时候再重点消化理解, 基础知识掌握全面的考生在第一轮基础阶段也可以参考.

2. 精心设计本书模块和栏目, 辅助考生深入思考和总结测评

全书采用两条主线贯穿始终, **一条是以知识点为纲, 另一条以典型题型为纲**. 考生可以先过一遍知识点讲解, 熟悉主要知识点的考生可以直接看典型题型, 碰到不熟悉的知识点时再查看, 考生在第二遍、第三遍复习时也可只看典型题型和专题精讲.

在内容精讲和例题后面设置了【名师点睛】【规律总结】【易错提示】【思路点拨】等小栏目, 辅助考生总结重要的概念、方法、技巧；归纳解题思路和解题步骤；辨析容易混淆的概念、易错的知识点；掌握解题技巧和命题规律.

每个例题后面均设置有三个小方框 (□ □ □), 考生可以用来记录自己复习的进程, 也可以用来标注题目的难度, 还可以用来记录自己做题时的错题, 以便准确记录本题的状态、加深印象, 在第二遍、第三遍的复习中做到有的放矢, 提高复习效率.

3. 配套视频讲解浓缩十年考研数学面授讲课精华

由新东方名师薛威亲手打磨, 全新录制的视频讲解, 讲解紧扣大纲要求, 解题步骤清晰细致, 手写板书规范严谨, 符合有志于高分考生自学体验. 由浅入深, 过渡到真题高分要求.

考生可以结合视频, 认真听讲解, 认真记笔记, 体会每一步推导原理. 第一遍不能快进, 要求慢慢咀嚼、细细品味, 务必熟练掌握知识点、解题方法和计算技巧. 第二遍要求独立做题, 努力写出答案步骤, 增强对解题套路的记忆. 第三遍, 要求完整地写出解题步骤和快速计算出正确答案.

三、本书适用人群及使用提示

1. 本书适用人群

（1）参加考研数学一、数学二、数学三的大学生或在职备考人员.

（2）本科院校希望期末得高分和得奖学金的大学生, 立志于保研的大学生学霸.

（3）参加经济类联考（简称 396）的考生.

2. 本书使用提示

基础较弱的考生：必须三遍! 第一遍, 先听配套视频, 学习知识点和相应的例题, 认真记笔记. 第二遍, 对典型题型部分的题目, 先试着自己能不能独立写出解答过程, 不会的题目, 要结合视频讲解, 对比做好笔记, 整理好错题笔记. 第三遍, 重点突出地做一遍, 以前的错题和难题做一遍, 巩固薄弱知识点和归纳题型.

基础较强的考生：至少也要两遍! 第一遍, 听视频讲解知识点, 看看典型题型部分的题目自己能不能独立做出来, 做出来后, 再对比视频讲解, 整理笔记, 总结思路, 归纳方法. 第二遍, 将第一遍的错题和难题, 独立再做一遍, 结合视频或讲义, 总结归纳心得和体会.

四、致奋战在考研之路上的我们

王国维在《人间词话》中, 有着这样一段话：古今之成大事业、大学问者, 必经过三种之境界. “昨夜西风凋碧树, 独上高楼, 望尽天涯路. ” 此第一境也. “衣带渐宽终不悔, 为伊消得人憔悴. ” 此第二境也. “众里寻他千百度, 蓦然回首, 那人却在灯火阑珊处. ” 此第三境也. 其实每一个考研高分获得者也大抵要经历这三种境界, 第一境界, 乃对人生的迷茫, 是参加工作还是考研继续深造, 这是每一个大学生都必须面对的人生选择问题, 在漫漫长夜我们曾觉得孤独而不知前路几何. 第二境界, 乃确定了考研目标, 在考研复习的道路上, 我们三更起、五更眠, 我们啃教材、看视频、刷真题, 可是这一阶段自己做题却仍然不得要领, 于是形体消瘦却无怨无悔地继续复习. 第三境界, 乃是在足够的复习积累后, 量变转化为质变, 不经意间已对考研内容了然于胸、驾轻就熟, 在研究生入学考试中沉稳发挥, 如愿以偿考上自己梦寐以求的高校或科研院所!

最后, 送上几句贴心话:

- 考研之路是孤独的, 找一个能陪伴你坚持到最后的人, 在漫长的考研征程中共同进步, 必将收获珍贵的友谊!
- 考研之路是艰辛的, 苦恼、枯燥、汗水过后你将收获满满的成就感, 将来的你, 必将感激今天坚持的自己!
- 考研之路是幸福的, 衷心祝愿每个努力拼搏的考生都能金榜题名、梦想成真, 踏上人生更加美好的征程!

在过去的教学工作和本书的编写过程中, 作者借鉴和参考了国内外一些优秀的著作, 并从一些考生的热情反馈中得到了不少的启发; 本书从前期策划到后期出版, 科学出版社王胡权副编审及其同事们付出了大量心血; 在此作者对他们的帮助和付出的辛勤劳动表示衷心的感谢!

由于作者水平有限, 加之时间仓促, 本书中难免存在疏漏和不足之处. 恳请广大同仁和读者提出宝贵的批评和建议, 以便我们今后改进和提高.

薛威

2019 年 1 月 12 日于北京

目录

第一章　函数与极限

第一节　考试要求及考点精讲

一、考试要求

考试要求	科目	考试内容
了解	数学一 数学二 数学三	函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性； 反函数及隐函数的概念； 无穷大量的概念及其与无穷小量的关系； 初等函数的概念； 连续函数的性质和初等函数的连续性
理解	数学一 数学二 数学三	函数的概念； 复合函数及分段函数的概念； 数列极限和函数极限的概念和性质； 函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系； 无穷小量、无穷大量的概念和基本性质； 函数连续性的概念（含左连续与右连续）； 闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理）
会	数学一 数学二 数学三	会利用极限存在的两个准则求极限； 会建立应用问题的函数关系； 会用等价无穷小量求极限； 会判别函数间断点的类型； 会应用闭区间上连续函数的性质
掌握	数学一 数学二 数学三	函数的表示法； 基本初等函数的性质及其图形； 极限的性质及四则运算法则； 极限存在的两个准则； 利用两个重要极限求极限的方法； 无穷小量的比较方法

二、考点精讲

函数是高等数学研究的对象, 极限是研究函数的方法 (核心方法), 连续是用极限方法研究函数得到的性质. 准确理解函数, 可以为理解后续章节难点打下基础 (如极限函数, 变限积分函数, 和函数等本质含义).

函数的性质的考查, 形式多为选择题, 难度不大. 结合函数极值, 拐点, 凹凸性等形式来考查. 一元多元积分比较结合单调性来考查. 近年来结合泰勒公式和变限积分来考, 方法更综合, 对计算能力要求更高.

极限是考研重点考查的内容, 分为数列极限和函数极限. 一般而言函数极限多为填空题, 难度不大. 近年考生对函数的极限各种形式已经极为熟悉, 在掌握常见计算技巧和计算方法后, 函数极限难度不大. 在复习函数极限过程中, 更要注意极限概念和应用的准确性, 避免结果正确, 解题步骤不严谨的情况出现, 例如, 局部取极限, 四则运算, 洛必达法则等运用的前提.

函数极限的计算题, 可以结合变限积分的各种形式或者结合积分中值定理来考查, 对考生而言, 涉及积分变换的技巧, 考生往往分不清变元和被积微元, 导致解题难度陡增. 数列极限一般就两种形式, 定积分定义和单调有界原理. 填空题考查定积分定义, 考法常规, 结合积分技巧很容易计算出来. 计算题中的数列极限就复杂很多, 可以结合夹逼准则和方程根问题, 是难题之所在, 第一次复习过程中, 大家还是应该把重点放在函数极限计算的熟练上. 第二次复习过程中, 可以把重点放在数列极限上.

函数的间断点, 形式灵活, 本质上就是考查函数极限. 选择题结合极限函数和积分函数等形式综合考查, 对计算能力要求较高. 函数的连续性, 结合方程根或中值定理来考查, 这部分一直是考生的弱项, 考生要在第二次复习过程中, 注意归纳方法, 分析思路, 模仿步骤, 解题严谨, 慢慢积累做题的经验和养成良好的解题习惯.

第二节　内容精讲及典型题型

一、函数及其性质

1. 数集

全体实数的集合称为实数集, 记为 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.

全体正实数的集合称为正实数集, 记为 $\mathbb{R}^{+}=(0,+\infty)$.

全体有理数的集合称为有理数集, 记为 $\mathbb{Q}$.

全体整数的集合称为整数集, 记为 $\mathbb{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-1,0,1,\cdots,n,\cdots\}$.

全体正整数的集合称为正整数集, 记为 $\mathbb{N}^{+}=\{1,2,3,\cdots\}$.

全体非负整数的集合称为自然数集, 记为 $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

2. 区间

设 a 和 b 都是实数, 且 $a<b$, 数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间, 记为 (a,b), 即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\},$$

其中 a 和 b 分别称为开区间的左端点和右端点. 类似可以定义

$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\};\qquad [a,b)=\{x|a\leqslant x<b\};$$
$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\};\qquad (a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\};$$
$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\};\qquad (-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\};$$
$$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\};\qquad (-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}.$$

3. 邻域

设 $\delta>0$, 称集合 $\{x||x-x_0|<\delta\}$ 为 x_0 的 δ 邻域, 记为 $U(x_0,\delta)$; 称集合 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$ 为 x_0 的去心 δ 邻域, 记为 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$, 其中 δ 称为邻域半径.

4. 映射

设 f 是一个从非空集合 A 到非空集合 B 上的对应法则, 若对于 A 中的任意元素 $x\in A$, 都存在 B 中的元素 y 通过对应法则 f 与 x 对应, 则称对应法则 f 为定义在 A 到 B 的映射, 记为 $f:A\to B$ 或 $f:x\to y$.

(1) 若对于集合 A 中的任意不同元素 $x_1\neq x_2$, 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称 f 是定义在 A 到 B 的单射;

(2) 若对于集合 B 中的任一元素 y, 都存在集合 A 中的元素 x, 使得 $y=f(x)$, 则称 f 是定义在 A 到 B 的满射;

(3) 若 f 既是单射又是满射, 称 f 是定义在 A 到 B 的双射 (一一映射).

5. 函数的概念

设数集 $D\subset\mathbb{R}$, 则称映射 $f:D\to\mathbb{R}$ 为定义在 D 上的函数, 简记为

$$y=f(x),\ \ x\in D,$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f.

对每个 $x\in D$, 按着对应法则 f, 总有唯一的确定值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y=f(x)$, 因变量 y 和自变量 x 之间的关系, 称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f, 即

$$R_f=f(D)=\{y|y=f(x),\ \ x\in D\}.$$

【名师点睛】 函数的两要素: 定义域和对应法则. 只有定义域和对应法则都相同时, 才是相同函数.

【例 1】 下列选项中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是相同函数的是 (　　). □□□

(A) $f(x)=x^0$, $g(x)=1$.　　(B) $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$.

(C) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$.　　(D) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

【解析】

(A) $f(x)=x^0$ 定义域为 $x\neq 0$; $g(x)=1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 故两个函数不相同.

(B) $f(x)=\lg x^2$ 定义域为 $x\neq 0$；$g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $x>0$, 故两个函数不相同.

(C) 当 $x<0$ 时, $f(x)=x$, $g(x)=|x|$, 两个函数映射法则不同, 故不是相同的函数.

(D) $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ 定义域相同, 映射法则相同, 故两个函数相同.

故选 (D).

6. 初等函数

在初等数学中已经讲过下面几类函数：

幂函数：$y=x^{\mu}(\mu\in\mathbb{R}$ 是常数)；

指数函数：$y=a^x(a>0,a\neq 1)$；

对数函数：$y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

三角函数：例如 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$ 等；

反三角函数：例如 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数. 其表达式及函数图形详见附录二.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的，可以由一个式子表示的函数，称为初等函数. 例如

$$y=2\mathrm{e}^{-x},\qquad y=\cos^2 x,\qquad y=\sqrt{1-x^2}$$

等都是初等函数.

【注】初等函数在其定义域上都是连续的.

7. 其他函数

【绝对值函数】

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=[0,+\infty)$, 称为绝对值函数 (图 1.1).

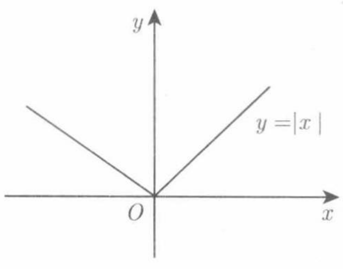

图 1.1

【符号函数】

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=\{-1,0,1\}$, 称为符号函数 (图 1.2).

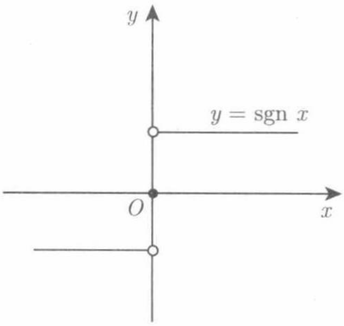

图 1.2

【取整函数】

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=Z$，称为取整函数 (图 1.3). 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

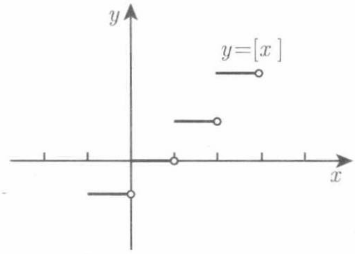

图 1.3

【狄利克雷 (Dirichlet) 函数】

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{0,1\}$，称为狄利克雷函数.

【注】 任何有理数 r 都是它的周期，狄利克雷函数没有最小的正周期.

【最值函数】

$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant g(x),\\ g(x), & f(x)<g(x).\end{cases}$$

$$G(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}g(x), & f(x)\geqslant g(x),\\ f(x), & f(x)<g(x).\end{cases}$$

【名师点睛】 最值函数之间有如下关系：

① $F(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$；$G(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$；

② $F(x)+G(x)=f(x)+g(x)$；③ $F(x)-G(x)=|f(x)-g(x)|$；④ $F(x)G(x)=f(x)g(x)$.

【隐函数】 由 $F(x,y)=0$ 确定的函数称为 $y=f(x)$ 的隐函数.

【参数函数】 称 $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 为由参数 t 确定的 $y=f(x)$ 的参数方程.

【极限函数】 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x,n)$.

【变限积分函数】 $F(x)=\displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(t)\mathrm{d}t$.

函数还有其他形式：导函数，级数的和函数，极坐标方程，极限函数，幂指函数等，以后会陆续介绍.

题型1 求函数的表达式

【例 1】 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)$________；其定义域为________.

□□□

【解析】 由题得

$$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2,$$

解得 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$, 其定义域为 $\left|1-x^2\right|\leqslant 1$, 即 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

【例 2】 已知 $3f(x)+f(2-x)=x^2$, 求 $f(x)$. □□□

【解析】 令 $2-x=t$, 代入原等式得

$$3f(2-t)+f(t)=(2-t)^2,$$

即 $3f(2-x)+f(x)=(2-x)^2$, 与原方程联立,

$$\begin{cases}3f(x)+f(2-x)=x^2,\\3f(2-x)+f(x)=(2-x)^2,\end{cases}$$

解得

$$f(x)=\frac{1}{8}(3x^2-(2-x)^2)=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}.$$

【例 3】 函数 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+x^3}{1+x^4}$, 求 $f(x)$. □□□

【解析】 由题设得

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+\dfrac{1}{x}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{x+\dfrac{1}{x}}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2},$$

令 $x+\dfrac{1}{x}=t$, 则有 $f(t)=\dfrac{t}{t^2-2}$, 即 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}, x\neq\pm\sqrt{2}$.

【例 4】 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$, 求 $f(x)$. □□□

【解析】 由倍角公式得

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=1+\cos x=1+1-2\sin^2\frac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right),$$

令 $\sin\dfrac{x}{2}=t$, 则

$$f(t)=2(1-t^2),$$

即 $f(x)=2(1-x^2)$.

8. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,

如果对于 $x\in D$, 则 $f(-x)=f(x)$ 成立, 称 $f(x)$ 为偶函数, 图像关于 y 轴对称.

如果对于 $x\in D$, 则 $f(-x)=-f(x)$ 成立, 称 $f(x)$ 为奇函数, 图像关于原点 O 对称.

关于函数的奇偶性, 有以下结论:

(1)　奇 $\times$ 奇 $=$ 偶; 奇 $\times$ 偶 $=$ 奇; 偶 $\times$ 偶 $=$ 偶.

　　奇 $\pm$ 奇 $=$ 奇; 奇 $\pm$ 偶 $=$?; 偶 $\pm$ 偶 $=$ 偶.

(2) 任何一个定义域关于原点对称的函数, 都可以写成偶函数和奇函数的和, 即

$$f(x)=g(x)+h(x),$$

其中 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 是偶函数, $h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 是奇函数.

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上可导, 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $f'(x)$ 是奇函数.

设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上可导, 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f'(x)$ 是偶函数.

(4) 设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上连续, 原函数为 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

若 $f(x)$ 是偶函数, 当 $a=0$ 时, $F(x)$ 是奇函数; 当 $a\neq 0$ 时, $F(x)$ 不是奇函数.

若 $f(x)$ 是奇函数, 则原函数 $F(x)$ 是偶函数.

(5) 设 $f(x)$, $g(x)$ 为奇函数, 则复合函数 $f(g(x))$ 是奇函数. 类似其他三种复合函数都是偶函数.

【例 1】 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性. □□□

【解析 1】 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 关于原点对称.

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x),\end{aligned}$$

故 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 是奇函数.

【注】 有理化的技巧 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, 多用在求反函数, 极限, 导数, 积分等题目中.

【解析 2】 由题设得

$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\\&=\ln(x^2+1-x^2)=\ln 1=0,\end{aligned}$$

故 $f(-x)=-f(x)$ 是奇函数.

【例 2】 $f(x)=|x\sin x|\,\mathrm{e}^{\cos x}$, $-\infty<x<+\infty$ 是 ( ). □□□

(A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

【解析】 因为 $f(-x)=|-x\sin(-x)|\,\mathrm{e}^{\cos(-x)}=|x\sin x|\,\mathrm{e}^{\cos x}=f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶数, 故选 (D).

9. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I\subset D$, 如果对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2,

(1) 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$, 称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的.

(2) 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1)>f(x_2)$, 称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减的.

【注】 说明函数单调性时, 要指明单调的区间, 未指明区间的时候, 一般是指定义域.