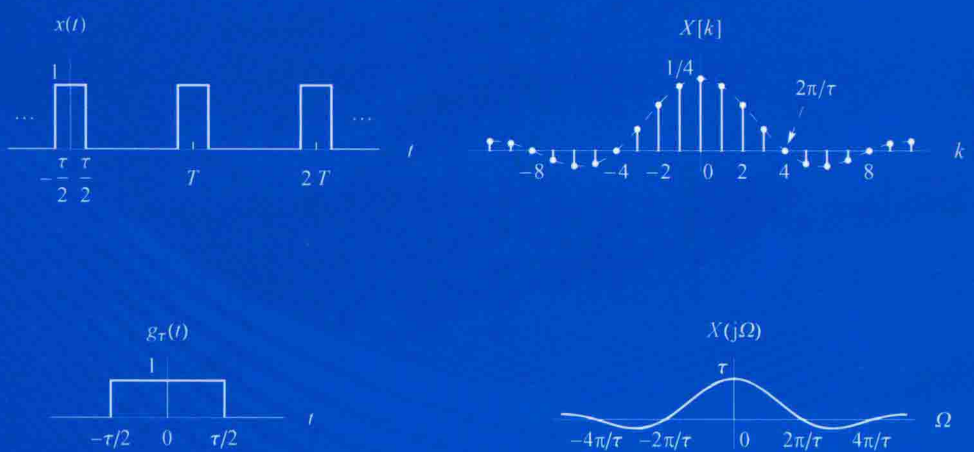
信号与系统

白桂欣　编



大连海事大学出版社

信号与系统

白桂欣　编

大连海事大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统 / 白桂欣编 . — 大连 : 大连海事大学出版社, 2019.3
ISBN 978-7-5632-3786-9

Ⅰ. ①信… Ⅱ. ①白… Ⅲ. ①信号系统 Ⅳ. ①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 047300 号

大连海事大学出版社出版

地址:大连市凌海路1号 邮编:116026 电话:0411-84728394 传真:0411-84727996
http://www.dmupress.com E-mail:cbs@dmupress.com

大连住友彩色印刷有限公司印装 大连海事大学出版社发行

2019 年 3 月第 1 版 2019 年 3 月第 1 次印刷
幅面尺寸:184 mm × 260 mm 印张:16
字数:396 千 印数:1 ~ 2000 册

出版人:徐华东

责任编辑:张宏声 责任校对:李继凯
封面设计:张爱妮 版式设计:张爱妮

ISBN 978-7-5632-3786-9 定价:36.00 元

内容简介

本书介绍信号与线性系统分析的基本理论和基本方法。全书共分 6 章:信号与系统的基本概念;线性时不变系统;信号与系统的傅里叶分析;拉普拉斯变换;z 变换;系统的状态变量分析。各章配有精选的例题、练习和习题,以利于教学和自学。

本书可作为普通高等学校电子信息类专业“信号与系统”课程的教材,也可供相关工程技术人员参考。

前　言

“信号与系统”是电子信息类专业重要的基础课，也是学习通信原理、数字信号处理、自动控制等课程的先修课程。从信号与系统中学到的普遍性质和概念，例如抽样，在几乎所有的电子信息工程技术领域里都起着重要的作用。

“信号与系统”课程主要研究确定性信号通过线性时不变系统传输和处理的基本理论和方法，研究对象涉及连续和离散时间信号与系统，研究领域包括时域分析、频域分析和复频域分析，研究方法包括输入输出描述法和状态变量描述法。

本书是为电子信息类专业学生编写的专业基础课教材，旨在有限的学时内全面系统地介绍信号与系统的基本概念和基本分析方法。编写时考虑了以下几点：

（1）在保证理论体系完整的同时，对已在高等数学、电路理论等课程中学过的内容原则上不再讲述，简化时域数学方程的经典求解。

（2）除复频域分析外，时域和频域分析采用连续与离散交叉并行的方式。这有助于读者了解两者之间的联系和区别，避免重复性的理论证明和计算，适应授课学时缩减的要求。

（3）在信号与系统分析中，无论是在理论上还是应用上，傅里叶分析方法仍然是目前使用最广泛、最基本和有效的方法。本书将连续信号与离散信号的4种傅里叶表示合并到一章，注重物理概念的阐述，强调滤波、调制、抽样等傅里叶应用，有利于读者全面掌握傅里叶分析方法，便于与后续课程“数字信号处理”及“通信原理”等的衔接。

（4）各章中重要的概念都用例题说明，并提供练习和答案，使读者能够检验其所掌握的原理。每章后的习题有利于进一步巩固所学概念。为节省篇幅，有关 Matlab 和 Simulink 仿真的练习另外安排在实验指导中。

本书是在大连海事大学信息科学技术学院谢公福、沈小艳、白桂欣、王彦春等编写的校内讲义的基础上整合更新而成的。齐国清教授详细审阅了全部原稿，提出了许多宝贵意见，并给予了大力支持和帮助。同时，本书参考和引用了国内外同类著作的部分内容，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指正。意见和建议邮件请发至：bgx@dlmu.edu.cn。

编者

2019 年 1 月

目　　录

第 1 章 信号与系统的基本概念

1.1 概述

信号存在于人类认识自然、社会活动以及日常生活过程的方方面面，各种物理形式的信号都是传递信息的载体，信息是信号的内涵。例如，家人和朋友之间面对面或通过电话用语音信号进行交流；船舶和飞机与岸站或灯塔之间通过无线电信号或光信号进行通信和导航；在社会生活中，商品和股票的价格波动也是许多人关心的信号，对这些信号所蕴含的信息进行分析可以帮助人们做出相应的投资选择。可以说，在通信、微电子、互联网、计算机科学与技术等已取得巨大成就的今天，信号的发生、传送、分析与处理的理论和方法，在基础科学、工程技术、生产管理等领域都有着广泛的应用。

信号理论中常涉及的概念是信号处理与信号分析。信号处理是指对信号进行某种加工和变换，主要包括削弱信号中多余的内容，滤除混杂的噪声和干扰，将信号变换成易于分析与识别的形式，估计信号的有关参数等。信号分析是指研究信号的基本特性，主要包括信号的描述、分解、变换、检测、特征提取以及信号的设计等。

信号的处理和传输需要通过系统来完成。所谓系统，是指由相互作用、相互依存的部件组合而成，具有特定功能的事物整体。它广泛存在于自然界、人类社会和工程技术领域。例如，讲话时气流激励声带发出声音，声带就是一个系统。一个简单的积分电路系统可由一个电阻和一个电容元件组成，其基本功能是对输入信号进行积分后输出。通信系统一般由发射机、信道和接收机等相互联结组合而成，以可靠的方式将语音或数据信号传输至目的地。船舶自动驾驶仪、机器人则是复杂的控制系统。尽管系统一词包罗万象，种类繁多，大小不一，但在对输入信号做出响应这一点上是相通的。

系统理论包括系统分析与系统综合两方面的内容。系统分析的任务通常是在给定系统结构和参数的情况下利用数学手段研究系统的特性，包括建立系统的数学模型；给定输入信号求解系统的输出信号；分析判断系统的特性如频率响应、稳定性等。而系统综合则是根据需要去设计制造满足性能要求的系统。分析是综合的基础，综合是分析的逆问题，它的结果不一定是唯一的。

信号与系统的关系十分密切。信号的产生、处理与传输离不开相应的系统设备，系统的分析也离不开信号的分析，有关它们的理论是密不可分的。本书主要以电信号在通信和控制中的应用为背景，介绍信号与系统分析的基本概念和基本方法。

1.2 信号的描述与分类

信号是某种变化的物理量,可用数学函数来表示。函数值随自变量变化的图像称为信号的波形。在讨论信号的有关问题时,信号与函数两个词常互相通用。

如果信号只依赖于一个独立自变量,则称该信号为一维信号。如果信号依赖于两个或多个独立自变量,则称该信号为多维信号。例如,一般天气预报中某一地区的气压值随高度变化,温度值随时间变化,即气压和温度是一维信号;若进一步精确描述该地区不同地点的气压和温度值,可以把气压和温度都看作关于时间和三维空间直角坐标的函数,则气压信号和温度信号含有多至四个独立自变量,是多维信号。

如果信号可以用一个确定的函数表示,就称其为确定信号,即当给定独立自变量值时,信号有确定的函数值,该数值随独立自变量的变化规律体现了其所包含的信息。一般而言,人为设计或生成的信号都属于确定信号,如随时间变化的正余弦信号。不能用确定性的函数表示的信号称为随机信号。随机信号的函数值是不确定的,只知道该信号在某些自变量上取某些数值的概率等统计特性。大气辐射噪声、电路中的电噪声都是随机信号。

通信传输中所涉及的信号一般都是随机信号。若传输确定信号,对于接收者来说就得不到任何新的信息,从而失去传送信号的本意。但是对确定信号的分析仍具有重要的意义,因为在一定的条件下,实际信号与确定信号有许多相似之处。例如,尽管由于雷击、线路设备故障等原因,电网电压(有效值)随时间波动,属于随机信号;但从较长的时间范围来看,电网电压仍是周期变化的,符合确定性信号的规律。也可以说确定信号实际上是近似的、理想化的随机信号。这使得实际问题的分析大为简化,适于工程应用,同时也为进一步研究随机信号奠定基础。

信号的幅度值(或者说函数值)可以是实数也可以是复数,分别称为实信号和复信号。实际物理可实现的信号都是实信号。复信号虽然不能实际产生,但为了理论分析的方便,常用复信号代表某些物理量。

本书仅研究含有一个独立自变量的确定信号,通常这个独立自变量为时间。按照时间自变量取值是否连续可将信号分为连续时间信号和离散时间信号(简称连续信号和离散信号)。连续时间信号是指时间自变量 t 的取值是连续的信号。该类信号在某一时间区间(或函数的定义域)内,对于所有的时间值,除了若干函数不连续点外,函数值都有确定的定义。例如,正弦波或图 1.1 所示的信号 $x(t)$。连续时间信号的函数值可以是连续的也可以是离散的(只取某些规定值),自变量和函数值都连续的信号又称为模拟信号,例如,语音信号的强度随时间连续变化。实际应用中模拟信号与连续信号两名词往往不予区分。

离散信号是指时间自变量取值是离散的信号。该类信号只在定义域内某些不连续的时间值 t_n 上给出确定的函数值,其他时间值上没有定义,形如

$$x[t_0],x[t_1],\cdots,x[t_n],\cdots \quad \text{对所有的 } t_n$$

离散时间自变量的间隔可以是均匀的,也可以是不均匀的,一般情况下采用均匀间隔。如果用 T_s 表示取值时间间隔,则离散自变量 $t_n=\cdots,-2T_s,-T_s,0,T_s,2T_s,3T_s,4T_s,\cdots$ 可以简化

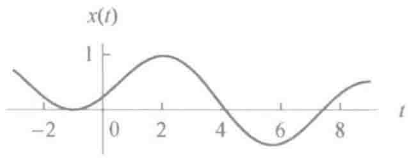


图 1.1 连续时间信号

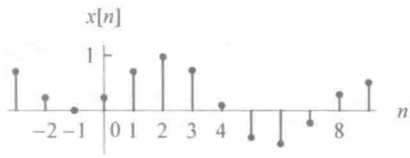


图 1.2 离散时间信号

为整数序号 $n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ 表示。这样,一个离散信号可以表示为

$$\{x[n]\} = \{\cdots, x[-2], x[-1], x[0], x[1], x[2], \cdots\}$$

即一组顺序排列的数值集合,因此离散信号也称为序列。函数符号常简写为 $x[n]$,且仅当 n 为整数时函数值才有定义。如图 1.2 所示的离散时间信号可写为

$$x[n] = \{\cdots, 0.23, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0.25}, 0.71, 1, \cdots\}$$

序列值 0.25 下面的箭头表示该序列值与序号 $n = 0$ 相对应,左右两边顺序给出 n 取负和正整数相对应的序列值。如果序列的起点在 $n = 0$,则箭头标示可以省略。

和连续信号类似,离散信号的函数值可以是连续的也可以是离散的,分别称为抽样信号和数字信号。抽样信号的函数值也称为样本值,自变量也称为样值点。

离散信号可以是自然存在的,比如银行贷款的月利率,年度国民生产总值;也可以由连续信号按一定时间间隔进行抽样后转化得到。信号抽样是连续信号数字化处理的必要手段,有关内容将在后续章节中介绍。

如果连续信号 $x(t)$ 在有限时间区间($t_1 < t < t_2$)内存在,而在该区间外,$x(t) \equiv 0$,则称为时限信号,否则为无时限信号。如果信号在 $t < t_0$ 时,$x(t) \equiv 0$,$t > t_0$ 时,$x(t) \neq 0$,则称为右边信号;如果信号在 $t > t_0$ 时,$x(t) \equiv 0$,$t < t_0$ 时,$x(t) \neq 0$,则称为左边信号;双边信号则可以看成是左边信号与右边信号的和。实际应用中,通常将信号开始产生或作用于系统的某一时刻定义为 $t_0 = 0$,此时右边信号又称为因果信号,左边信号又称为反因果信号,不满足因果信号条件的则称为非因果信号。离散信号 $x[n]$ 也有同样的分类。

在本书中,始终用 t 表示连续信号的时间,用 n 表示离散信号的时间。相应地,用圆括号 $(\cdot)$ 表示括号内的量取连续值,用方括号 $[\cdot]$ 表示括号内的量取离散值。

练习 1.1:判断以下两个序列是否相同? $x_1[n] = \{0, 1, 2, 3\}$, $x_2[n] = \{1, 2, 3\}$。

答案:否,因为同一时刻的函数值不同,如 $x_1[0] = 0$,而 $x_2[0] = 1$。

练习 1.2:判断以下说法是否正确? (1)右边信号即是因果信号; (2)左边信号即是反因果信号; (3)时限信号即是因果信号; (4)双边信号是因果信号与反因果信号的和。

答案:(1)否;(2)否;(3)否;(4)是。

1.3 信号的基本运算

信号的分析与处理,经常涉及一些基本运算的组合,可以将其分为两大类不同的运算。某些运算功能可以通过物理器件直接实现。

1.3.1 对信号函数值进行的运算

幅度变换(幅度压扩) 连续信号 $x(t)$ 的幅度变换运算为

$$y(t) = ax(t) \tag{1.1}$$

即将信号 $x(t)$ 在所有时刻的函数值乘以变换系数 a 得到信号 $ax(t)$。当 $a=-1$ 时的幅度变换也称为倒相。电信号放大器就是进行信号幅度变换的物理装置。当 $x(t)$ 代表电阻电流，a 代表电阻的阻值，$y(t)$ 代表电阻两端的电压时，通过电阻即可进行幅度变换。

类似于式(1.1)，离散信号 $x[n]$ 的幅度变换为

$$y[n] = ax[n] \tag{1.2}$$

相加 N 个连续信号 $x_i(t)$ 的相加运算为

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_N(t) \tag{1.3}$$

即结果在任一时刻的函数值是所有信号 $x_i(t)$ 在同一时刻的函数值相加。例如，混音器可将伴奏音乐和语音混合到一起后输出。

类似于式(1.3)，离散信号的相加运算为

$$y[n] = \sum_{i=1}^{N} x_i[n] = x_1[n] + x_2[n] + \cdots + x_N[n] \tag{1.4}$$

相乘 N 个连续信号 $x_i(t)$ 的相乘运算为

$$y(t) = \prod_{i=1}^{N} x_i(t) = x_1(t)x_2(t)\cdots x_N(t) \tag{1.5}$$

即结果在任一时刻的函数值是各信号 $x_i(t)$ 在同一时刻的函数值的乘积。通信系统中的抽样器和调制器，都是实现信号相乘运算的器件。

同样，离散信号的相乘运算为

$$y[n] = \prod_{i=1}^{N} x_i[n] = x_1[n]x_2[n]\cdots x_N[n] \tag{1.6}$$

微分与差分 连续信号 $x(t)$ 的微分运算为

$$y(t) = x'(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.7}$$

即求信号 $x(t)$ 对时间 t 的导数。例如，通过电感能进行微分运算。如图 1.3 所示，设流过电感 L 的电流为 $i_L(t)$，则电感两端的电压 $v_L(t)$ 为

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.8}$$

离散信号 $x[n]$ 用差分运算表示离散样本间的梯度关系，表示为

$$y[n] = \nabla x(n) = x[n] - x[n-1] \tag{1.9}$$

也称为后向差分。

积分与累加 连续信号 $x(t)$ 的积分运算为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.10}$$

结果是其时间上限变量 t 的函数。例如，通过电容能进行积分运算。如图 1.4 所示，设流过电容 C 的电流为 $i_C(t)$，则电容两端的电压 $v_C(t)$ 为

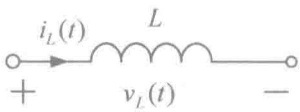


图 1.3　电感模型

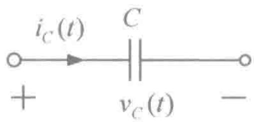


图 1.4　电容模型

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{1.11}$$

类似地,离散信号用前 n 项的和表示累加运算

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \tag{1.12}$$

练习 1.3:若 $\int_{-\infty}^{t} x'(\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t)$ 成立,则信号 $x(t)$ 应满足什么条件?

答案: $x(-\infty) = 0$ 或 $x(t)$ 为右边信号。

1.3.2　对信号时间自变量进行的运算

时间移位(时移)　连续信号 $x(t)$ 的时移运算为

$$y(t) = x(t - t_0) \tag{1.13}$$

即时移信号 $x(t - t_0)$ 是将 $x(t)$ 的函数式及其定义域中的自变量 t 替换为 $t - t_0$,函数值不变。式中 t_0 是时移量,当 $t_0 > 0$,$x(t - t_0)$ 的波形由 $x(t)$ 沿时间轴向右平移得到;当 $t_0 < 0$,则 $x(t)$ 的波形沿时间轴向左平移。

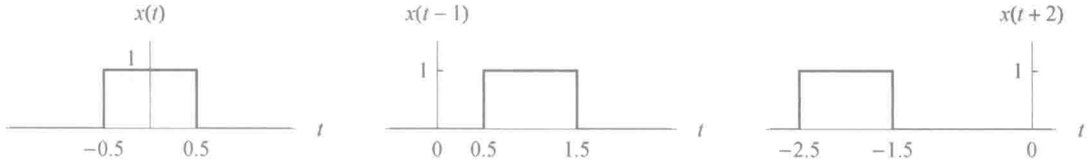
对于离散信号 $x[n]$,时移运算为

$$y[n] = x[n - n_0] \tag{1.14}$$

其中的时移量 n_0 必须是整数。

例 1.1:图 1.5 (a) 表示一个关于纵轴对称、具有单位宽度和单位幅度的矩形脉冲 $x(t)$,试画出时移信号 $x(t-1)$ 和 $x(t+2)$ 的波形。

解:将 $x(t)$ 沿时间轴右移 1 个时间单位得到 $x(t-1)$,其波形如图 1.5 (b)所示;将 $x(t)$ 沿时间轴左移 2 个时间单位得到 $x(t+2)$,其波形如图 1.5 (c)所示。时移信号 $x(t-1)$ 和 $x(t+2)$ 的波形形状与原矩形脉冲 $x(t)$ 完全相同,只是沿着时间轴平移了不同的时间单位。



(a)单位矩形脉冲 $x(t)$　　(b) $x(t)$ 右移 1 个时间单位　　(c) $x(t)$ 左移 2 个时间单位

图 1.5　连续信号的时移运算

时移信号在实际应用中有很多实例。对着高山喊话产生的回声,就是你发出的语音信号的延迟信号(同时有衰减),测量延迟的时间,就可以知道你与高山间的距离。雷达和声呐也是根据同样的原理,分别利用电磁波和声波的回波来测量目标距离的。

时间反转(反折)　连续信号的反折运算为

$$y(t) = x(-t) \tag{1.15}$$

即反折信号 $x(-t)$ 是将 $x(t)$ 的函数式及其定义域中的自变量 t 替换为 $-t$，函数值不变。$x(-t)$ 的波形是将 $x(t)$ 的波形以纵坐标轴为轴反转。对于任一时刻 t_0，时间反转变换的作用是使 $y(t_0) = x(-t_0)$ 或 $y(-t_0) = x(t_0)$，这意味着将“未来”与“过去”互换，显然不能用硬件来实现。但它具有理论意义，在今后的卷积运算以及变换域分析中会用到。实际应用中，若将记录的影片倒序播放，可以得到反转的效果。

对于离散信号 $x[n]$，可类似地定义反折运算

$$y[n] = x[-n] \tag{1.16}$$

例 1.2：考虑图 1.6(a)所示的锯齿形脉冲 $x(t)$，画出反折信号 $x(-t)$ 的波形。

解：将 $x(t)$ 的波形以纵坐标轴为轴反转，得到 $x(-t)$ 的波形，如图 1.6(b)所示。

(a)锯齿形脉冲 $x(t)$　　(b) $x(t)$ 的反折

图 1.6　连续信号的反折运算

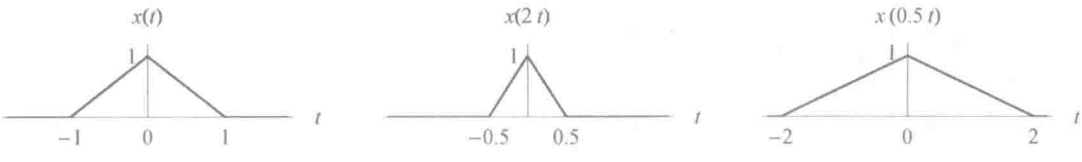
时间尺度变换(时间压扩)　连续信号 $x(t)$ 的时间尺度变换运算为

$$y(t) = x(at), a > 0 \tag{1.17}$$

即以 at 替换 $x(t)$ 函数式及其定义域中的自变量 t，函数值不变。式中的变换系数 a 是正实数。当 $a > 1$，则 $x(at)$ 是将 $x(t)$ 沿时间轴向 $t = 0$ 处压缩；当 $0 < a < 1$，$x(at)$ 是将 $x(t)$ 沿时间轴以 $t = 0$ 为中心扩展。

例 1.3：图 1.7 (a)表示一个三角形脉冲 $x(t)$，画出信号 $x(2t)$ 和 $x(0.5t)$ 的波形。

解：将 $x(t)$ 沿时间轴按系数 $a = 2$ 压缩得到 $x(2t)$ 的波形图 1.7 (b)，将 $x(t)$ 沿时间轴按系数 $a = 0.5$ 扩展得到 $x(0.5t)$ 的波形图 1.7 (c)。



(a)三角形脉冲 $x(t)$　　(b) $x(t)$ 按系数 2 压缩　　(c) $x(t)$ 按系数 0.5 扩展

图 1.7　连续信号的时间尺度变换

对于离散信号 $x[n]$，其时间尺度变换定义为

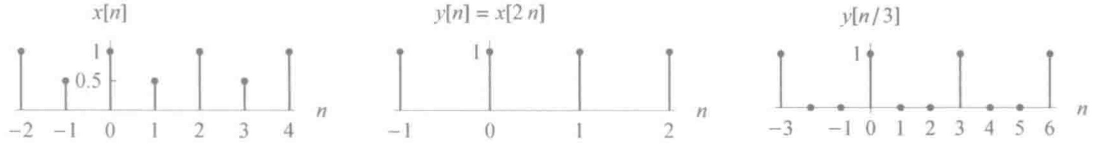
$$y[n] = x[an], a > 0 \tag{1.18}$$

这里的 $a = k$ 或 $a = 1/k$，其中 k 为正整数。相应地，$x[kn]$ 称为抽取，$x[n/k]$ 称为插值。

例 1.4：离散信号如图 1.8 (a) 所示，画出信号 $y[n] = x[2n]$ 和 $y[n/3]$ 的波形。

解：抽取系数 $k = 2$，$x[2n]$ 是对信号 $x[n]$ 每隔 $k-1 = 1$ 个样点抽取一个样值，结果 $y[n]$ 示于图 1.8 (b)。从图中可以看出 $x[n]$ 抽取后奇数点样本值丢失了。对于 $y[n/3]$，插值系数 $k = 3$，由于 n/k 不为整数时的样值在图 1.8(b)的 $y[n]$ 中没有定义，所以应补入 $k-1 = 2$

个零值，结果示于图 1.8（c）。



(a)离散信号 $x[n]$　　(b) $x[n]$ 按系数 2 抽取　　(c) $y[n]$ 按系数 3 插值

图 1.8 离散信号的抽取和插值

连续信号压缩后，可以通过扩展运算来恢复原信号，反之亦然。例如，把图 1.7（b）中的信号 $x(2t)$ 扩展 2 倍即可得到原信号 $x(t)$，同样把图 1.7（c）中的信号 $x(0.5t)$ 压缩一半也可得到 $x(t)$。而离散信号 $x[n]$ 经过抽取后丢失了原信号的一些样本值，再进行插值时并不能保证恢复原信号。

信号的时间尺度变换在影视画面中经常能看到其应用：鲜花能瞬间开放，是信号时域压缩的效果；竞跑录像回放时让选手缓慢跨越终点线，是信号时域扩展的效果。

以上三种时间变换若同时作用于连续信号，即

$$y(t) = x(at - b) \tag{1.19}$$

则变换不同的运算顺序其结果是相同的。而离散信号时间自变量的综合运算

$$y[n] = x[an - b], \quad a \text{ 为整数或整数的倒数}, b \text{ 为整数} \tag{1.20}$$

需按先时移后时间尺度变换的运算顺序才能得出正确的结果。

例 1.5：已知信号 $x(t)$ 的波形如图 1.9(a) 所示，试画出信号 $x(1-2t)$ 的波形。

解：信号 $x(1-2t)$ 包含了三种时间变换，共有六种运算顺序，图 1.9 中画出了两种顺序图。顺序一：$x(t)$ 左移得到 $x(t+1)$，次反折得到 $x(1-t)$，再压缩 2 倍得到 $x(1-2t)$。顺序二：$x(t)$ 反折得到 $x(-t)$，次压缩 2 倍得到 $x(-2t)$，再右移 0.5 得到 $x(1-2t)$。二者结果相同，读者可用其余四种顺序再求解之。

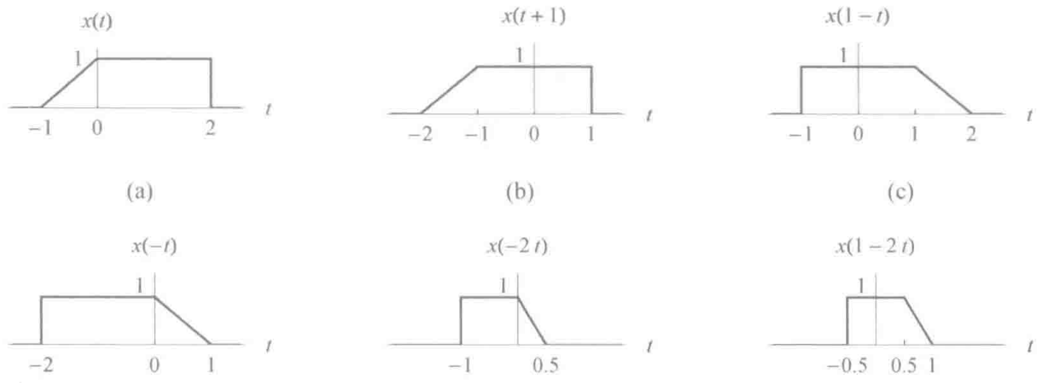


图 1.9 连续信号时间变换的运算顺序示意图

练习 1.4：自己用计算机记录一段声音信号，分别快速和慢速播放，指出它们经过了哪种信号运算。

练习 1.5：已知离散信号 $x[n] = \{-1, -1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{0}, 1, 1\}$，试求 $y[n] = x[3n-2]$。

答案：$y[n] = \{-1, 1\}$。

1.4 信号的基本特性

在时域，信号的特性除了幅值和定义域之外，还有对称性、周期性、能量或功率特性等，这些性质将在信号分析中用到。

1.4.1 偶信号与奇信号

如果一个连续信号 $x(t)$ 满足

$$x(-t) = x(t) \quad 对所有的 t \tag{1.21}$$

则称该连续信号为偶信号。

如果一个连续信号 $x(t)$ 满足

$$x(-t) = -x(t) \quad 对所有的 t \tag{1.22}$$

则称该连续信号为奇信号。亦即：偶信号关于纵坐标轴或时间原点对称，而奇信号关于时间原点反对称。例如 $x_1(t) = \cos(\Omega t)$ 是偶信号，而 $x_2(t) = \sin(\Omega t)$ 是奇信号。

任一连续信号 $x(t)$ 都可以分解为偶分量 $x_e(t)$ 和奇分量 $x_o(t)$ 的和，即有

$$x(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] + \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] = x_e(t) + x_o(t) \tag{1.23}$$

其中

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \tag{1.24}$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \tag{1.25}$$

显然，$x_e(-t) = x_e(t)$ 是偶函数；而 $x_o(-t) = -x_o(t)$ 是奇函数。

类似地，任一离散信号 $x[n]$ 也可以分解为偶分量 $x_e[n]$ 和奇分量 $x_o[n]$ 的和，即有

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n] \tag{1.26}$$

其中

$$x_e[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x[-n] \tag{1.27}$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[-n]) \tag{1.28}$$

例 1.6：信号 $x(t)$ 如图 1.10(a)所示，画出其偶分量和奇分量的波形。

解：首先由 $x(t)$ 画出反折信号 $x(-t)$ 的波形，如图 1.10 (b)所示；根据式(1.24)将二者相加并将幅值减半就可得到偶分量，如图 1.10 (c)所示。同样，根据式(1.25)将两个信号相减并将幅值减半就可得到奇分量，如图 1.10(d)所示。若将图 1.10(c)与图 1.10 (d)相加即可恢复原信号。

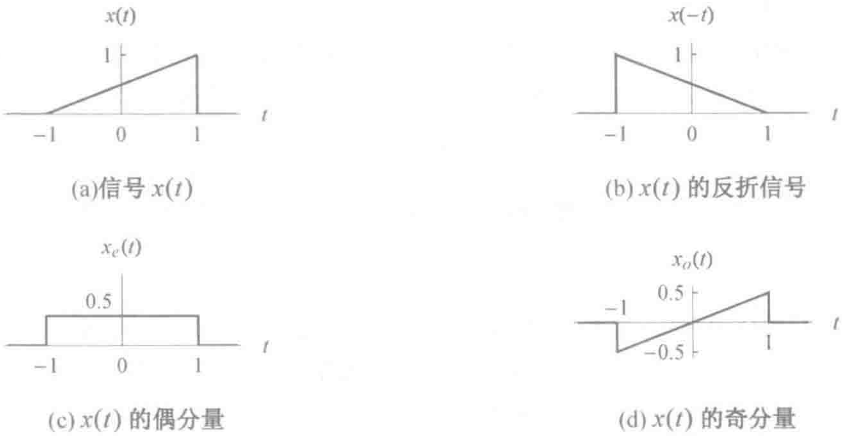


图 1.10　信号的奇偶分解

对于复信号,也可以定义其对称性。如果一个复信号 $x(t)$ 满足

$$x(-t) = x^*(t) \quad \text{对所有的 } t \tag{1.29}$$

则称该复信号是共轭对称信号。

如果一个复信号 $x(t)$ 满足

$$x(-t) = -x^*(t) \quad \text{对所有的 } t \tag{1.30}$$

则称该复信号是共轭反对称信号。式中星号（ * ）表示复共轭,记为

$$x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$$

其中 $x_r(t)$ 是 $x(t)$ 的实部, $x_i(t)$ 是 $x(t)$ 的虚部,则复共轭为

$$x^*(t) = x_r(t) - jx_i(t)$$

将 $x(t)$ 和 $x^*(t)$ 代入式(1.29),可得

$$x_r(-t) + jx_i(-t) = x_r(t) - jx_i(t)$$

比较该等式两边的实部和虚部可以得到结论:如果一个复信号的实部是偶函数而虚部是奇函数,则该信号就是共轭对称信号。同理,由式(1.30)可知:如果一个复信号的实部是奇函数,而虚部是偶函数,则该信号是共轭反对称的。离散时间复信号 $x[n]$ 也具有类似的特性。

例 1.7:试分析信号 $x(t) = e^{j(\Omega t+0.5\pi)}$ 的对称性。

解:由 $x^*(t) = e^{-j(\Omega t+0.5\pi)} = -e^{j(0.5\pi-\Omega t)} = -x(-t)$ 可知, $x(t)$ 是共轭反对称的;或者由 $x(t) = -\sin(\Omega t) + j\cos(\Omega t)$ 知, $x(t)$ 的实部是奇函数,虚部是偶函数,因此 $x(t)$ 共轭反对称。

练习 1.6:若信号 $x(t)$ 的实部如图 1.10(c),虚部如图 1.10(d)所示,则 $x(t)$ 具有何种对称性?

答案: $x(t)$ 共轭对称。

1.4.2　周期信号

如果一个连续信号 $x(t)$ 满足

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{对所有的 } t \tag{1.31}$$

即在整个时间区间内, $x(t)$ 的函数值间隔固定的时间 T 周期性重复,称为周期信号,其中 T 是

正实数。满足式(1.31)的最小正实数 T 称为周期信号 $x(t)$ 的基本周期。基本周期定义了信号函数值完整变化一周所需要的持续时间,反映了周期信号的基本特性。基本周期的倒数称为周期信号 $x(t)$ 的基本频率,简称基频,它描述的是周期信号重复的快慢,记为

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.32}$$

若周期的单位为秒(s),则频率的单位为赫兹(Hz)或周/秒。基本频率也可用角频率 Ω 表示

$$\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{1.33}$$

其量纲为弧度/秒(rad/s)。在不引起混淆的情况下,以下直接将角频率简称为频率。

图 1.11 是一个周期性方波信号,其周期 $T = 4$ s,基本频率 $f = 0.25$ Hz 或 $\Omega = 0.5\pi$rad/s。图 1.12 所示周期性锯齿波信号的周期 $T = 2$ s。

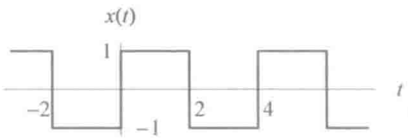


图 1.11 周期性方波

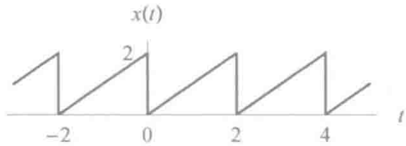


图 1.12 周期性锯齿波

不满足式(1.31)的信号则称为非周期信号。若令周期信号的周期 $T \to \infty$,则变为非周期信号。如图 1.5(a)所示的矩形脉冲和图 1.6(a)所示的锯齿形脉冲都是非周期的。实际中不存在无始无终的理想周期信号,应用时只要在相当长的时间范围内符合周期变化规律的就认为是周期的。例如,实验室中信号源产生的正弦波、一段音乐中的单个音符以及地球的自转都近似是周期的。

如果一个离散信号 $x[n]$ 满足

$$x[n] = x[n + N] \quad 对所有的整数\ n \tag{1.34}$$

则称 $x[n]$ 具有周期性,式中 N 为正整数,满足式(1.34)的最小 N 值称为离散信号 $x[n]$ 的基本周期,表示 $x[n]$ 的单个循环所包含样本值的数目。当周期 $N \to \infty$时变为非周期信号。

同样可以定义离散周期信号的基本频率为

$$\omega = \frac{2\pi}{N} \tag{1.35}$$

其量纲为弧度/周(rad),这一点与连续周期信号不同。

图 1.13 是一个离散周期方波信号,其周期 $N = 6$,基本频率 $\omega = \pi/3$ rad。图 1.14 的离散信号没有周期性。

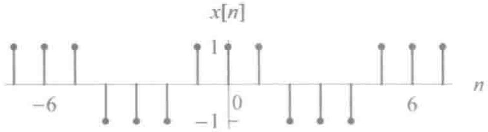


图 1.13 离散周期方波信号

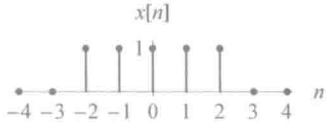


图 1.14 离散非周期信号

连续周期信号有一个特例,即 $x(t) = A$ 为常量。显然,对于任意正实数 T,常量满足周期信号的定义 $x(t) = x(t + T)$,但由于 T 没有最小值,无法定义一个常量信号的基本周期。为方便通常将常量 $x(t) = A$ 看作余弦信号 $x(t) = A\cos(\Omega t)$ 在 $\Omega \to 0$ 时的极限情况,此时,周期