高等学校电子信息类专业平台课系列教材

（第二版）

工程随机数学基础

许贤泽　肖进胜　张燕革　蔡红涛　周晨　黄狮勇　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

高等学校电子信息类专业系

（第二版）

工程随机数学基础

许贤泽　肖进胜　张燕革　蔡红涛　周晨　黄狮勇　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程随机数学基础/许贤泽等编著．—2版．—武汉：武汉大学出版社，2018.8

高等学校电子信息类专业平台课系列教材

ISBN 978-7-307-20378-5

Ⅰ．工…　Ⅱ．许…　Ⅲ．工程数学—高等学校—教材　Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第162192号

责任编辑：胡　艳　　责任校对：汪欣怡　　版式设计：汪冰滢

出版发行：**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)

(电子邮件：cbs22@whu.edu.cn 网址：www.wdp.com.cn)

印刷：湖北民政印刷厂

开本：787×1092　1/16　印张：14.25　字数：330千字　插页：1

版次：2013年8月第1版　　2018年8月第2版

2018年8月第2版第1次印刷

ISBN 978-7-307-20378-5　　定价：30.00元

前　言

高等教育改革对人才培养目标和培养模式、专业设置和教学计划、课程体系和内涵、教学方法和手段等方面提出了新的要求．按照电子信息类专业改革“以工程设计能力培养为主线，相关课程整体优化”的总体思路，《工程随机数学基础》(第二版)是面对大学工科本科生所编写的教材，其内容包括概率论基础知识、数理统计的基本理论和方法，以及随机过程基本知识，旨在帮助电子信息类专业本科生在工程技术多领域学习和掌握随机数学的基本理论和基本方法，并将其应用于科学研究和工程实际．这是社会发展对高素质人才培养提出的必然要求．本书主要是面向电子信息类专业本科生编写的教材，但是其内容对于其他非数学类的理工科专业大学生，甚至研究生，也有很好的参考价值，也可以作为工程技术人员的参考资料．

本书包括 12 章内容．第 1 至 5 章讲述概率论基础知识；第 6 至 9 章讲述数理统计的基本理论和方法；第 10 至 12 章讲述随机过程基本知识．全书由许贤泽、蔡红涛、肖进胜、张燕革、周晨、黄狮勇编写，其中第 1 至 3 章由肖进胜编写，第 4、5 章由蔡红涛编写，第 6、10 章由张燕革编写，第 7 至 9 章由许贤泽编写，第 11、12 章由周晨、黄狮勇编写．

书中引用了许多文献资料，包括兄弟院校的同类教材，未能一一列出，在此谨致谢意．

限于作者的水平，谬误及欠妥之处在所难免，我们衷心希望广大读者提出宝贵的意见，并对书中不妥之处进行批评指正．

编　者

2018 年 6 月

目 录

第 1 章　随机事件及其概率

自然界和社会上发生的现象是多种多样的，有一类现象在一定条件下必然发生，例如，向上抛出一枚硬币必然会下落，太阳每天会从东边升起，同性电荷必相互排斥等．这类现象称为**确定性现象**．在自然界和社会上还存在着另一类现象，例如，在相同条件下抛同一枚硬币，落下后，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法确定抛掷的结果是什么；明天的最高气温是多少度，在明天到来之前无法准确预测．这类现象，在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果．但人们经过长期实践并深入研究后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，其结果却呈现出某种规律性．例如，多次重复抛掷一枚硬币得到正面朝上的次数大致占一半，一年的最高温度按照一定的规律分布，等等．这种在大量重复试验或观察中所呈现出的规律性，称为**统计规律性**.

这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，称为**随机现象**．概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1　随 机 事 件

为了研究这些随机现象，我们必须首先明确一些与确定性现象不同的基本概念.

1.1.1　随机事件的相关概念

1. 随机试验

为了弄清一个问题，经常要做一些试验．这里的试验，包括各种各样的科学实验，例如对某一事物的某一特征的观察或记录就是一种试验，试验常用大写英文字母 E 表示：

E_1：掷一骰子，观察出现的点数；

E_2：上抛硬币两次，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_3：某人手机一天收到短信的个数；

E_4：上抛硬币两次，观察正面出现的次数；

E_5：某同学早上起床的时间.

上面几个试验的例子，有着共同的特点．例如，试验 E_1 有 6 种可能的点数，但是在骰

子掷出之前不能确定是几点出现，此外这个试验可以在相同的条件下重复进行．又如试验 E_3，某人一天收到的短信个数 $n \geqslant 0$，但是在这一天结束之前不能具体确定收到多少条．这一试验也可以在相同条件下重复进行．总的来讲，这些试验具有以下特点：

(1) 试验可在相同条件下重复进行；

(2) 试验的可能结果不止一个，且所有可能结果是可以事先预知的；

(3) 每次试验的结果只有一个，但是不能事先预知.

在概率论中，将满足上面三个条件的试验称为**随机试验**．随机试验以后简称为试验，并常记为 E. 本书中以后提到的试验都是指随机试验，通过研究随机试验来研究随机现象．

2. 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果是已知的．将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S，也可用 Ω 表示．样本空间中的元素，即随机试验 E 的每个结果，称为**样本点**.

例如，在 E_1 中，$S=\{1,2,3,4,5,6\}$；

在 E_2 中，$S=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$；

在 E_3 中，$S=\{0,1,2,\cdots\}$；

在 E_4 中，$S=\{0,1,2\}$；

在 E_5 中，$S=\{t \mid t>0\}$.

样本空间中的元素是由试验的目的所确定的．例如，在 E_2 和 E_4 中，同是将两枚硬币连抛两次，但是由于试验的目的不同，人们关心的内容不一样，其样本空间也不一样．其中 E_2 样本点的个数为 4，E_4 样本点的个数为 3.

3. 随机事件

在进行随机试验时，人们常常关心满足某种条件的，在试验中可能出现也可能不出现的事情，称为**随机事件**. 随机事件常以大写英文字母表示.

例如，在 E_1 中，A 可表示“掷出 2 点”，B 可表示“掷出偶数点”的随机事件.

一般来说，我们称试验 E 中的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**．在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**．样本空间 S 中的样本点称为**基本事件**.

例如，在 E_1 中，用数字 1，2，…，6 表示掷出的点数，而由它们分别构成的单点集 $\{1\}$，$\{2\}$，…，$\{6\}$ 便是 E_1 中的基本事件．在 E_2 中，用 H 表示正面，T 表示反面，此试验的样本点有 (H,H)，(H,T)，(T,H)，(T,T)，其基本事件便是 $\{(H,H)\}$，$\{(H,T)\}$，$\{(T,H)\}$，$\{(T,T)\}$. 显然，任何随机事件均为某些样本点构成的集合.

由基本事件构成的事件称为**复合事件**，例如，在 E_1 中“掷出偶数点”便是复合事件．每次试验必发生的事情称为**必然事件**，记为 S，显然样本空间整体上作为一个事件也是必然事件．每次试验都不可能发生的事情称为**不可能事件**，记为 $\varnothing$.

例如，在 E_1 中，“掷出不大于 6 点”的事件便是必然事件，而“掷出大于 6 点”的事件

便是不可能事件．以后，随机事件、必然事件和不可能事件统称为**事件**.

例如，在 E_2 中样本点的个数为 4，其事件 A_1："两次出现的是同一面"，即

$$A_1=\{(H, H), (T, T)\}.$$

在 E_5 中事件 A_2："起床时间在 8 点以后"，即

$$A_2=\{t \mid t>8\}.$$

1.1.2 事件间的关系与运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与运算自然按照集合论中集合之间的关系和运算来处理．下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 S，而 A，B，$A_k(k=1, 2, \cdots)$ 是 S 的子集.

1. 包含

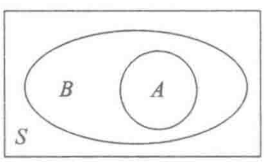
若事件 A 的发生必导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，如图 1-1 所示.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 等于事件 B，记为 $A=B$.

例如，在 E_1 中，令 A 表示"掷出 2 点"的事件，即 $A=\{2\}$，B 表示"掷出偶数"的事件，即 $B=\{2, 4, 6\}$，C 表示"掷出小于 3 的偶数"，则 $A\subset B$，$A=C$.

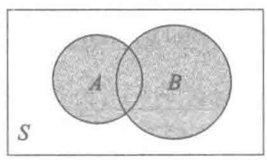
2. 和

称事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件为 A 与 B 的和事件，简称为和，记为 $A\cup B$ 或 $A+B$，如图 1-2 所示.



$A\subset B$

图 1-1 包含关系



$A\cup B$

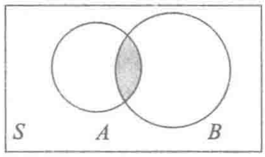
图 1-2 和关系

例如，甲，乙两人向目标射击，令 A 表示"甲击中目标"的事件，B 表示"乙击中目标"的事件，则 $A\cup B$ 表示"目标被击中"的事件.

推广：任意有限个：$\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生$\}$，无穷可列个：$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots=\{A_1, A_2, \cdots$ 至少有一个发生$\}$.

3. 积

称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为 A 与 B 的积事件，简称为积，记为 $A\cap B$ 或 AB，如图 1-3 所示.



$A\cap B$

图 1-3　积关系

例如，在 E_3 中，即观察某天收到的短信个数中，令 $A=\{$收到偶数次短信$\}$，$B=\{$收到 3 的倍数次短信$\}$，则 $A\cap B=\{$收到 6 的倍数次短信$\}$.

推广：任意有限个：$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生$\}$，无穷可列个：$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots=\{A_1, A_2, \cdots$ 同时发生$\}$.

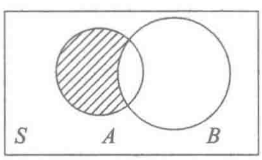
4. 差

称事件 A 发生但事件 B 不发生的事件为 A 减 B 的差事件，简称为差，记为 $A-B$. 如图 1-4 所示.

例如，测量晶体管的 β 参数值，令 $A=\{$测得 β 值不超过 $50\}$，$B=\{$测得 β 值不超过 $100\}$，则，$A-B=\varnothing$，$B-A=\{$测得 β 值为 $50<\beta\leqslant 100\}$.

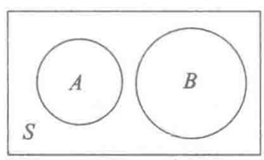
5. 互不相容

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 是互不相容的. 基本事件是两两互不相容的，如图 1-5 所示.



$A-B$

图 1-4　差关系



$AB=\varnothing$

图 1-5　互不相容关系

例如，观察某路口在某时刻的红绿灯：若 $A=\{$红灯亮$\}$，$B=\{$绿灯亮$\}$，则 A 与 B 便是互不相容的.

6. 对立

称事件 A 不发生的事件为 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$，显然 $A\cup\overline{A}=S$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$. 对立事件又称为逆事件，如图 1-6 所示.

例如，从有 3 个次品，7 个正品的 10 个产品中任取 3 个，若令 $A=\{$取得的 3 个产品中

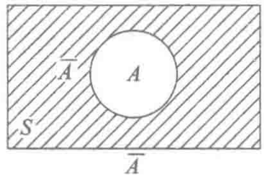


图 1-6 对立关系

至少有一个次品}，则 $\overline{A}$ ={取得的 3 个产品均为正品}.

1.1.3 事件的运算规律

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$.

(2) 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3) 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(4) 对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$(对偶律又叫德 · 摩根律).

此外，还有一些常用性质，如：

$A \cup B \supset A$，$A \cup B \supset B$；$A \cap B \subset A$，$A \cap B \subset B$.

若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$，$A \cap B = A$，$A - B = A - AB = A \cap \overline{B} = \varnothing$，等等.

例 1.1 从一批产品中每次取一件进行检验，令 A_i ={第 i 次取得合格品}，$i=1, 2, 3$，试用事件的运算符号表示下列事件：A ={三次都取得合格品}，B = {三次中至少有一次取得合格品}，C = {三次中恰有两次取得合格品}，D = {三次中最多有一次取得合格品}.

解：$A = A_1A_2A_3$，$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$，$C = A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3$，$D = \overline{A_1}\,\overline{A_2} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_2}\,\overline{A_3}$. 事件的表示方法常常不唯一，如事件 B 又可表为 $B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 \cup \overline{A_1}A_2A_3 \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup A_1A_2\overline{A_3} \cup A_1A_2A_3$或 $B = \overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}}$.

例 1.2 如图 1-7 所示的电路中，以 A 表示“信号灯亮”这一事件，以 B，C，D 分别表示继电器接点 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 闭合，试写出事件 A，B，C，D 之间的关系 .

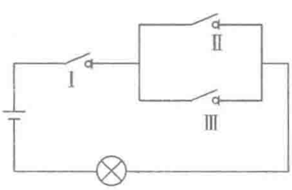


图 1-7 电路示意图

解：不难看出有如下一些关系：

$BC \subset A$，$BD \subset A$，

$BC \cup BD = A$，$\overline{B}A = \varnothing$.

1.2　事件的概率

对于一个事件(除必然事件和不可能事件外)，它在一次试验中可能发生，也可能不发生．某些事件在一次实验中发生的可能性究竟有多大，经常是我们要关心的问题．例如，为了确定水坝的高度，就要知道在造水坝河段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小，我们希望找到一个合适的数来表征事件在一次实验中发生的可能性大小，这就是事件的概率.

1.2.1　频率和概率

这里，首先引入事件频率的概念，它描述了事件发生的频繁程度，进而引进表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数 —— 概率.

频率：在 n 次重复试验中，设事件 A 出现的次数为 n_A，称为事件 A 发生的频数. 比值 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**.

不难证明频率有以下基本性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(S)=1$.

(3) 若 A_1，A_2，…，两两互不相容，则 $f_n\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(A_n)$.

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发生的频繁程度．频率大，事件 A 发生就频繁，A 在一次试验中发生的可能性就大，反之亦然．因此，直观的想法就是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

表 1-1 是历史上著名的几次抛掷硬币的实验数据.

表 1-1　　**抛硬币实验结果**

试验者	抛硬币次数 n	正面(A)出现次数 n_A	正面(A)出现的频率 $f_n(A)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 0
浦丰	4 040	2 148	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

从表 1-1 可以看出：正面出现的频率 $f_n(A)$ 在 0 和 1 之间波动，但是当 n 逐渐增大时

$f_n(A)$ 逐渐稳定在 0.5 处，频率表现出稳定性.

大量试验证实，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数．这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性．但是，我们不可能对每个事件都做大量的试验，求其频率．为了理论研究的需要，从频率的稳定性和频率的性质抽象得到表征事件发生可能性大小的概率的定义.

在相同条件下，将试验重复 n 次，如果随着重复试验次数 n 的增大，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 越来越稳定地在某一常数 p 附近波动，则称常数 p 为事件 A 的**概率**.

概率：设某试验的样本空间为 S，对其中每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$，如果它同时满足下列三个条件：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(S)=1$；

(3) 可列可加性：若 A_1，A_2，… 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\text{（简称可加性）},$$

则称 $P(A)$ 为 A 的**概率**.

在后面章节中将证明，当 $n\to\infty$ 时，频率 $f_n(A)$ 在一定意义下收敛于概率 $P(A)$. 我们可以用概率 $P(A)$ 来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小，即事件 A 发生可能性程度的数值度量.

1.2.2 古典概型

在 1.1.1 节中的试验 E_1 和 E_4，都具有如下两个特点：

(1) 所有基本事件是有限个；

(2) 各基本事件发生的可能性相同.

满足上面两个条件的试验很普遍，这些试验模型称为**古典概型**，又叫**等可能概型**.

例如：掷一匀称的骰子，令 $A=\{$掷出 2 点$\}=\{2\}$，$B=\{$掷出偶数点$\}=\{2, 4, 6\}$. 此试验样本空间为 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，于是，应有 $1=P(S)=6\times P(A)$，即 $P(A)=\dfrac{1}{6}$.

而 $P(B)=3\times P(A)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{B\text{ 所含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$.

在古典概型中，设其样本空间 S 所含的样本点总数，即试验的基本事件总数为 N_S，而事件 A 所含的样本数，即导致事件 A 发生的基本事件数为 N_A，则事件 A 的概率便定义为：

$$P(A)=\frac{N_A}{N_S}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}.$$

例 1.3 将一枚质地均匀的硬币连抛三次，求恰有一次正面向上的概率.

解：用 H 表示正面，T 表示反面，则该试验的样本空间

$$\begin{aligned}S=\{&(H, H, H)(H, H, T)(H, T, H)(T, H, H)(H, T, T)\\&(T, H, T)(T, T, H)(T, T, T)\}.\end{aligned}$$

可见 $N_S=8$. 令 $A=\{$恰有一次出现正面$\}$，则 $A=\{(H,T,T)(T,H,T)(T,T,H)\}$.

可见，$N_A=3$，故 $P(A)=\dfrac{N_A}{N_S}=\dfrac{3}{8}$.

例 1.4(取球问题)　袋中有 5 个白球，3 个黑球，分别按下列三种取法在袋中取球.

(1) 有放回地取球：从袋中取三次球，每次取一个，看后放回袋中，再取下一个球；

(2) 无放回地取球：从袋中取三次球，每次取一个，看后不再放回袋中，再取下一个球；

(3) 一次取球：从袋中任取 3 个球.

在以上三种取法中均求 $A=\{$恰好取得 2 个白球$\}$ 的概率.

解：(1) 有放回地取球：$N_S=8\times8\times8=512$，$N_A=C_3^2\times5\times5\times3=\dbinom{3}{2}\times75=225$，故 $P(A)=\dfrac{N_A}{N_S}=\dfrac{225}{512}=0.44$.

(2) 无放回地取球：$N_S=P_8^3=8\times7\times6=336$，$N_A=C_3^2\times5\times4\times3=\dbinom{3}{2}\times60=180$，故 $P(A)=\dfrac{N_A}{N_S}=\dfrac{180}{336}=0.54$.

(3) 一次取球：$N_S=C_8^3=\dbinom{8}{3}=\dfrac{8!}{3!\ 5!}=56$，$N_A=C_5^2C_3^1=\dbinom{5}{2}\dbinom{3}{1}=30$，故 $P(A)=\dfrac{N_A}{N_S}=\dfrac{30}{56}=0.54$.

属于取球问题的一个实例：

设有 100 件产品，其中有 5% 的次品，今从中随机抽取 15 件，则其中恰有 2 件次品的概率便为 $P=\dfrac{C_5^2C_{95}^{13}}{C_{100}^{15}}=\dbinom{5}{2}\dbinom{95}{13}\Big/\dbinom{100}{15}=\dfrac{7\ 055}{51\ 216}=0.137\ 7$(属于一次取球模型).

例 1.5(分球问题)　将 n 个球放入 N 个盒子中去，试求恰有 n 个盒子各有一球的概率 $(n\leqslant N)$.

解：基本事件的总数 $N_S=\underbrace{N\ N\cdots N}_{n}=N^n$，令 $A=\{$恰有 n 个盒子各有一球$\}$，先从 N 个盒子里选 n 个盒子，然后在 n 个盒子里对 n 个球全排列，则 $N_A=C_N^nP_n^n=\dbinom{N}{n}n!$.

故

$$P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}=\frac{\dbinom{N}{n}n!}{N^n}.$$

下面是属于分球问题的一个实例：

全班有 40 名同学，问他们的生日皆不相同的概率为多少？令 $A=\{40$ 个同学生日皆不相同$\}$，则有 $N_S=365^{40}$，$N_A=\dbinom{365}{40}40!$ (可以认为有 365 个盒子，40 个球)，故