现代数学基础

66

基础代数学讲义

章璞 吴泉水

高等教育出版社

现代数学基础

66

基础代数学讲义

章 璞 吴泉水

高等教育出版社·北京

内容简介

本书讲述模论、Abel 范畴上的同调代数和范畴论。内容包括模论中的几条基本定理和几类特殊的模；Abel 范畴与正合函子，同调代数基本定理，导出函子，Ext 函子和 Yoneda 扩张；拉回与推出，伴随对，函子的极限理论，伴随函子定理，Grothendieck 范畴等。

本书力求简明扼要，推导充分，既充分使用了泛性质和交换图，使得表述清晰，也充分使用了反范畴，将对偶精确化。与通常的教材有所不同，本书的同调代数建立在一般的 Abel 范畴上，而非仅在模范畴上。

本书前三章可作为数学专业研究生公共基础课的教材，第二和第四章也可独立作为范畴论的教材。本书也可供相关专业的科技工作者参考。

基础代数学讲义
Jichu Daishuxue Jiangyi

图书在版编目 (CIP) 数据

基础代数学讲义 / 章璞，吴泉水编著．—北京：高等教育出版社，2018.10
ISBN 978-7-04-050724-9
Ⅰ．①基… Ⅱ．①章… ②吴… Ⅲ．①代数学—研究生—教材 Ⅳ．①O15
中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 232285 号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 赵天夫
封面设计 赵　阳　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
http://www.hepmall.com
http://www.hepmall.cn
印刷 高教社（天津）印务有限公司

开本 787mm×1092mm 1/16
印张 17.25
字数 350 千字
版次 2018 年 10 月第 1 版
印次 2018 年 10 月第 1 次印刷
定价 69.00 元

[物 料 号 50724-00]

前　言

多年来我们分别在上海交通大学和复旦大学讲授数学专业研究生公共基础课“基础代数学”. 本书是在讲义基础上反复修改, 并增加范畴论一章而成的.

因为群表示通常已在本科阶段开设, 这门课的主要内容是模论和同调代数. 本书第一章内容是标准的, 包括模论中的几条基本定理、几类特殊的模和模范畴中的正合性引理.

同调代数起源于拓扑学. 自 Cartan-Eilenberg [CE] 以来, 包括 N. Jacobson [J], 同调代数大多在模范畴上展开. 这可利用元素和映射的具体性, 使教学变得容易. 然而, 最近几十年, 由 Eilenberg-MacLane 和 A. Grothendieck 等奠基的范畴论得到广泛应用, 成为不可避免的语言和工具. 这要求同调代数建立在一般的 Abel 范畴上. 以类似于模范畴为由, 将 Abel 范畴上的同调代数一笔带过而无细节, 已不适应以后开展这方面的研究.

要建立 Abel 范畴上的同调代数, 只能以泛性质和交换图克服“没有元素”的困难. 而某种意义上讲, 泛性质和交换图比元素和映射更本质、更普适地反映了研究对象的性质; 并且这种训练对做研究也有益. 本书第二章提供 Abel 范畴上同调代数必需的范畴论基础; 第三章则给出 Abel 范畴上同调代数中所述理论的所有细节.

第四章选择了范畴论中若干重要课题, 包括函子范畴、伴随对、极限理论、顿范畴、伴随函子定理、初对象存在定理、可表函子定理、Grothendieck 范畴, 吸取了 F. Borceux [B], S. MacLane [Mac], B. Mitchell [Mit] 和 B. Stenström [S] 之长. 这些内容应用到模范畴, 也得到模论的相应发展.

本书前三章可作为数学专业研究生公共基础课的教材. 根据授课的实际情况, 第三章的内容亦可沿用模范畴来讲解 (这样第二章可省略). 同时, 某些较长的证明可留作练习. 而第二章、第三章中的拉回与推出和第四章放在一起, 亦可作为范畴论的教材.

本书力求简明扼要, 推导充分, 既充分使用了泛性质和交换图, 使得表述清晰, 也充分使用了反范畴, 将对偶精确化.

本书的写作得到两校研究生院和数学学院的支持. 荣石在 TEX 方面给予大力帮助, 并帮忙编辑名词索引. 陈伟钊、陈小发、冯建、郭鹏、金海、罗阳、马新超、尤翰洋、朱林帮忙校对. 鲍炎红、陈惠香、陈小伍、方明、高楠、何济位、黄华林、黄兆泳、李方、李立斌、刘仲奎、卢涤明、王圣强、叶郁、张英伯、张跃辉、朱彬、朱海燕诸位教授审阅了此书 (或使用本书的预印本作为教材) 并提出修改意见. 感谢高等教育出版社赵天夫编辑的支持. 欢迎读者提出宝贵意见.

作者

2018 年春于上海

目 录

第一章　模论

模已成为数学中的基本概念. 它为许多问题提供了统一的语言, 并产生新的思想方法. 环与代数上的模是代数学研究的重要内容.

1.1 环与代数上的模

1.1.1 域上的代数　本书中的环均指有单位元 1 的非零环, 并且环同态将单位元送到单位元. 我们经常将乘法的符号 $\cdot$ 省略. 如果我们还赋予环以域上线性空间的结构, 就得到域上代数的概念.

定义 1.1.1　域 k 上的代数 A 是环, 并且 A 的加群上又有 k-线性空间的结构, 满足 $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$, $\forall\ \lambda \in k$, $\forall\ a, b \in A$. 域 k 上的代数 A 简称为 k-代数 A, 或代数 A.

若代数 A 作为环是交换环, 则称 A 是交换代数; 若代数 A 作为环是可除环, 则称 A 是可除代数.

与环相比, 域上代数 A 的结构更优: 因为代数 A 有 k-基. 如果代数 A 作为 k-线性空间是有限维的, 则称 A 是有限维 k-代数, 其维数记为 $\dim_k A$. 与环类似, 对于 k-代数 A, 我们也有如下概念: 代数 (单、满) 同态和代数同构、代数同态 $f : A \longrightarrow B$ 的核 $\operatorname{Ker} f := \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ 和像 $\operatorname{Im} f$、子代数、理想、代数 A 的两个子代数 B 与 C 的和 $B + C$、代数 A 关于理想 I 的商代数 A/I, 等等. 定义这些概念需要同时兼顾到代数的环结构和线性空间结构. 例如, k-代数 A 到 k-代数 B 的代数同态, 是指环同态 $f : A \longrightarrow B$, 并且 f 又是 k-线性映射.

例 1.1.2　域 k 上的多项式环 $k[x]$ 作成无限维 k-代数.

k-代数 A 上的 n 阶全矩阵环 $M_n(A)$ 作成 k-代数; A 上 n 阶上三角矩阵的集

合也作成 k-代数, 它是 $M_n(A)$ 的子代数.

n 维 k-向量空间 V 的自同态环 $\mathrm{End}_k(V)=\{f \mid f: V \longrightarrow V$ 是 k-线性映射$\}$ 作成 n^2 维 k-代数, 它代数同构于 $M_n(k)$.

与环相似, 我们也有如下定理.

定理 1.1.3 (代数同态基本定理) 设 $f: A \longrightarrow B$ 是代数同态. 则 $\operatorname{Ker} f$ 是 A 的理想且有典范代数同构 $A/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$, $a+\operatorname{Ker} f \longmapsto f(a)$.

(子代数对应定理) 设 I 是 k-代数 A 的理想, Γ 是 A 的包含 I 的子代数的集合, Ω 是商代数 A/I 的子代数的集合. 则存在双射 $\psi: \Gamma \longrightarrow \Omega$, 其中 $\psi(B)=B/I, \forall B \in \Gamma$; 并且 B 是 A 的包含 I 的理想当且仅当 $\psi(B)=B/I$ 是 A/I 的理想.

(第一同构定理) 设 I 是 k-代数 A 的理想, B 是 A 的子代数. 则 I 是代数 $B+I$ 的理想, $B \cap I$ 是 B 的理想, 且有典范代数同构 $(B+I)/I \cong B/(B \cap I)$.

(第二同构定理) 设 B 和 C 均为 k-代数 A 的理想, 且 C 是 B 的理想. 则有典范代数同构

$$(A/C)/(B/C) \cong A/B.$$

1.1.2 环与代数上的模

以后将 Abel 群又称为加群.

定义 1.1.4 设 R 是环. 左 R-模 M 是指加群 M 并且连同一个左 R-作用, 即映射 $R \times M \longrightarrow M$, $(r, m) \longmapsto r.m$ ($r.m$ 称为 r 在 m 上的作用; 通常将作用的符号 . 省略), 满足如下条件

(1) $1m=m$;

(2) $a(m_1+m_2)=am_1+am_2$;

(3) $(a+b)m=am+bm$;

(4) $(ab)m=a(bm)$,

其中 1 为环 R 的单位元, $a, b \in R$, $m, m_1, m_2 \in M$. 也将左 R-模 M 简记为 ${}_RM$.

加群 M 的全体自同态的集合 $\mathrm{End}(M)=\{f \mid f: M \longrightarrow M$ 是群同态$\}$ 作成环, 称为加群 M 的自同态环, 其加法和乘法分别定义为

$$(f+g)(m):=f(m)+g(m), \quad (fg)(m):=f(g(m)), \quad \forall f, g \in \mathrm{End}(M), \forall m \in M.$$

左 R-模有如下的等价定义.

定义 1.1.5 设 M 是加群. 若存在环同态 $\rho: R \longrightarrow \mathrm{End}(M)$, 则称 (M,ρ) 是左 R-模, 或简称 M 是左 R-模. 又称 (M,ρ) 是环 R 的表示.

上述两种左 R-模的定义是等价的. 事实上, 如果有定义 1.1.4 中的左 R-模 M, 则得到环同态 $\rho: R \longrightarrow \mathrm{End}(M)$, 其中 $\rho(r): M \longrightarrow M$ 定义为 $\rho(r)(m) := rm$. 从而得到定义 1.1.5 意义下的左 R-模 M. 反之, 如果有定义 1.1.5 中的左 R-模 M, 只需规定左 R-作用为 $rm := \rho(r)(m)$, 即可得到定义 1.1.4意义下的左 R-模 M.

类似地, 有 k-代数上的左模的概念: 只需将环上左模的定义中加群改为 k-线性空间即可.

定义 1.1.6 设 A 是 k-代数. 左 A-模 M 是指 k-线性空间 M 并且连同一个左 A-作用, 即映射 $A \times M \longrightarrow M$, $(r,m) \longmapsto rm$, 满足如下条件

(1) $1m = m$;

(2) $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$;

(3) $(a+b)m = am + bm$;

(4) $(ab)m = a(bm)$;

(5) $\lambda(am) = a(\lambda m) = (\lambda a)m$,

其中 $a, b \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$, $\lambda \in k$.

代数上的左模也有如下的等价定义.

定义 1.1.7 设 A 是域 k 上的代数, M 是 k-线性空间. 若存在代数同态 $\rho: A \longrightarrow \mathrm{End}_k(M)$, 则称 (M,ρ) 是左 A-模, 或简称 M 是左 A-模. 又称 (M,ρ) 是 A 的表示.

类似地, 我们有环与代数上的右模的概念. 所有关于左模的讨论均适用于右模. 需要注意的是, 左 R-模 M 未必能按照如下方式作成右模, 其中 $mr := rm$, $\forall\, r \in R$, $\forall\, m \in M$. 当然, 交换环和交换代数的左模作用自动成为右模作用. 一般地, M 是左 R-模当且仅当 M 是右 R^{op}-模, 其中 R^{op} 是 R 的反环. 因此今后我们只讨论左模.

对于环上的模的讨论均能平行地移到代数上的模. 如果没有特殊性, 今后我们只讨论环上的模.

例 1.1.8 (1) 环 R 可以看作其自身上的左模 ${}_R R$ (左 R-作用即为环 R 的乘法), 称

之为正则左 R-模. 类似地, 有正则右 R-模 R_R.

(2) 设 $\mathbb{Z}$ 是整数环. 则 $\mathbb{Z}$-模恰是 Abel 群.

(3) 设 k 是域. 则 k-模恰是 k-向量空间.

(4) 设 $k[x]$ 是域 k 上的一元多项式环, T 是 k-线性空间 V 的线性变换. 对于 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in k[x]$, 定义 $f(x)$ 在 V 中元素 v 上的作用为

$$f(x)v:=a_0v+a_1T(v)+\cdots+a_nT^n(v).$$

则 V 作成 $k[x]$-模.

1.1.3 模同态定理 与群、环等类似, 对于模我们也有子模、商模的概念.

左 R-模 M 的子模 N 是 M 的子群, 并且对于 R-作用封闭 (即, $rn\in N$, $\forall\, r\in R$, $\forall\, n\in N$). 易知 N 的确作成左 R-模.

左模 M 关于其子模 N 的商模 M/N 是指商群 M/N, 且 R-作用定义为 $r(m+N):=rm+N$, $\forall\, m\in M$, $\forall\, r\in R$. 易知 M/N 的确作成左 R-模.

左 R-模 M 到左 R-模 N 的模同态是指加群 M 到 N 的群同态 $f: M\longrightarrow N$, 并且对任意的 $r\in R$ 和 $m\in M$ 都有 $f(rm)=rf(m)$. 同样, 有模的单同态、模的满同态、模同构的概念.

我们把左 R-模 M 到 N 的模同态的全体记作 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$. 它有自然的 Abel 群的结构. 进一步, Abel 群 $\mathrm{End}_R(M):=\mathrm{Hom}_R(M,M)$ 对于自然的乘法 (即模同态的合成) 作成环, 称为模 M 的自同态环.

左 R-模同态 $f: M\longrightarrow N$ 的核 $\mathrm{Ker}\, f:=\{m\in M\mid f(m)=0\}$ 是 M 的子模; 像 $\mathrm{Im}\, f:=\{f(m)\mid m\in M\}$ 是 N 的子模.

对于左 R-模 M, 如果存在 M 的有限子集 X 使得 $M=\langle X\rangle:=RX:=\{rx\mid r\in R,\ x\in X\}$, 则称 M 是有限生成模. 如果存在 $m\in M$ 使得 $M=Rm$, 则称 M 是由 m 生成的循环模.

我们也有如下定理, 其验证留作习题.

定理 1.1.9 (模同态基本定理) 设 $f: M\longrightarrow M'$ 是模同态. 则有典范模同构 $M/\,\mathrm{Ker}\, f\cong \mathrm{Im}\, f$, $m+\mathrm{Ker}\, f\longmapsto f(m)$.

(子模对应定理) 设 N 是模 M 的子模, Γ 是 M 的包含 N 的子模的集合, Ω 是商模 M/N 的子模的集合. 则存在双射 $\psi:\Gamma\longrightarrow\Omega$, 其中 $\psi(L)=L/N$, $\forall\, L\in\Gamma$.

(第一同构定理) 设 L 和 N 均是模 M 的子模. 则 $L+N:=\{n+l\mid n\in$

$N, l \in L\}$ 和 $L \cap N$ 也是 M 的子模, 且有典范模同构 $(L+N)/L \cong N/(L \cap N)$.

(第二同构定理) 设 L 是模 M 的子模, N 是 L 的子模. 则有典范模同构 $(M/N)/(L/N) \cong M/L$.

例 1.1.10 (1) 对于任意环 R, 有环同构 $\mathrm{End}_R(R_R) \cong R,\ f \longmapsto f(1)$.

(2) 对于任意左 R-模 M, $\mathrm{Hom}_R({}_RR,\ {}_RM)$ 有自然的左 R-模结构, 且有左 R-模同构 $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M,\ f \longmapsto f(1)$.

习 题

1. 设 k 是域, G 是任一群. 定义 kG 为以 G 中元为基的 k-线性空间. 则 G 中的乘法 k-双线性地诱导出 kG 的乘法. 验证 kG 对于这一乘法作成 k-代数 (称为 G 在 k 上的群代数).

2. 设 $f: A \longrightarrow B$ 是代数同态. 如果 $g: A \longrightarrow C$ 是代数同态且 $g(\mathrm{Ker}\, f) = 0$, 则存在唯一的代数同态 $\tilde{g}: \mathrm{Im}\, f \longrightarrow C$ 使得 $g = \tilde{g}\tilde{f}$, 其中 $\tilde{f}: A \longrightarrow \mathrm{Im}\, f$ 是由 f 诱导的代数同态.

3. 代数闭域 k 上的有限维可除代数只有 k.

4. 实数域 $\mathbb{R}$ 上的 2 维可除代数只有复数域 $\mathbb{C}$.

5. 证明: 不存在实数域 $\mathbb{R}$ 上的 3 维可除代数.

6. 验证: 实数域 $\mathbb{R}$ 上以 e, i, j, k 为基的 4 维线性空间 $\mathbb{H}$ 按照下表定义的乘法

	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$

作成 $\mathbb{R}$-可除代数, 且同构于

$$\left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \ \middle|\ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}.$$

我们称 $\mathbb{H}$ 为 Hamilton *四元数代数*. (Hamilton 四元数代数是历史上第一个非交换有限维可除代数的例子. 它是由 W. R. Hamilton 于 1843 年发现的. F. G. Frobenius 证明了 $\mathbb{R}$ 上的有限维可除代数只有 $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{H}$ 这三种.)

7. 写出环上右模的两种定义并验证它们的等价性.

8. 设 N, K 是左 R-模 M 的子模, 定义 $(N:K) = \{a \in R \mid aK \subseteq N\}$. 证明 $(N:K)$ 是 R 的理想. 特别地 $\mathrm{Ann}(M) = (0:M) = \{b \in R \mid bx = 0,\ \forall\ x \in M\}$ 称为 M 的*零化子*. 如果 $C \subseteq \mathrm{Ann}(M)$ 也是 R 的理想, 则 M 自然地成为左 R/C-模.

9. 设 $V = \mathbb{R}^n$, 定义 V 上的线性变换 T 为

$$v = (v_1, \cdots, v_n) \longmapsto T(v) := (0, v_1, \cdots, v_{n-1}).$$

按例 1.1.8 (4) 视 V 为左 $\mathbb{R}[x]$-模. 计算 xv, $(x^2+2)v$ 以及 $(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)v$. 又满足 $x^2v=0$ 的 v 是怎样的?

10. 对于任意环 R, 有环同构 $R \cong \mathrm{Hom}_R({}_RR, {}_RR)^{\mathrm{op}}$.

11. 对于右 R-模 M_R, $\mathrm{Hom}_R(R_R, M_R)$ 有自然的右 R-模结构, 且有右 R-模同构 $\mathrm{Hom}_R(R_R, M_R) \cong M$.

12. 设 M 是左 R-模, $a \in R$. 令 $a_L : M \longrightarrow M$, $m \longmapsto am$. 证明 $\{a_L \mid a \in R\} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ 且 $\mathrm{End}_R(M)$ 恰是 $\{a_L \mid a \in R\}$ 在 $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ 中的中心化子. 又 a_L 是否属于 $\mathrm{End}_R(M)$?

13. 计算 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ $(m,\ n \geq 1)$.

1.2 模的构造

模的构造是基本的问题. 这里介绍的只是最初步的方法.

1.2.1 提升 设 R, S 是环, $f: R \longrightarrow S$ 是环同态, M 是左 S-模. 则 f 诱导出 M 上的一个左 R-模结构, 其中的 R-作用规定为

$$rm := f(r)m, \quad \forall\ r \in R, \quad \forall\ m \in M,$$

此时我们称 ${}_RM$ 是 ${}_SM$ 关于 $f: R \longrightarrow S$ 的提升. 特别地, 若 R 是 S 的子环, $f: R \longrightarrow S$ 为嵌入同态, M 是左 S-模, 则 f 诱导出的左 R-模 M 称为左 S-模在 R 上的限制.

例 1.2.1 设 R 是环, I 是 R 的理想, $\pi: R \longrightarrow R/I$ 为典范满同态. 则左 (R/I)-模恰是那些能被 I 零化的左 R-模.

1.2.2 直和 设 M_α $(\alpha \in I)$ 是一簇左 R-模, 其中 I 为指标集, I 可以为无限集. 在集合

$$\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha = \{(m_\alpha)_{\alpha \in I} \mid m_\alpha \in M_\alpha,\ \forall\ \alpha \in I,\ \text{并且只有有限多个 } m_\alpha \text{ 不为 } 0\}$$

上按分量定义加法和左 R-作用, 即

$$(m_\alpha)_{\alpha \in I} + (m_i')_{\alpha \in I} = (m_\alpha + m_\alpha')_{\alpha \in I}, \qquad r(m_\alpha)_{\alpha \in I} = (rm_\alpha)_{\alpha \in I},$$

则 $\bigoplus\limits_{\alpha \in I} M_\alpha$ 作成左 R-模, 称为 M_α $(\alpha \in I)$ 的直和.

与线性空间的直和类似, 模的直和有如下等价的刻画.

命题 1.2.2 设 M 是左 R-模, M_α $(\alpha \in I)$ 是一簇左 R-模. 则下述等价.

(i) 有模同构 $M \cong \bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$.

(ii) 存在 M 的子模 M'_α $(\alpha \in I)$, 使得 $M'_\alpha \cong M_\alpha$, $\forall\ \alpha \in I$, 并且 M 中的每个元素 m 均可唯一地表为有限和 $m = \sum\limits_{\alpha\in I} m_\alpha$ 的形式, 其中 $m_\alpha \in M'_\alpha$.

(iii) 存在 M 的子模 M'_α $(\alpha \in I)$, 使得 $M'_\alpha \cong M_\alpha$, $\forall\ \alpha \in I$, M 中的每个元素 m 均可表为有限和 $m = \sum\limits_{\alpha\in I} m_\alpha$ 的形式, 其中 $m_\alpha \in M'_\alpha$, 并且 $M'_\alpha \cap \sum\limits_{\beta\neq\alpha} M'_\beta = \{0\}$, $\forall\ \alpha \in I$.

1.2.3 直积 设 M_α $(\alpha \in I)$ 是一簇左 R-模, 其中 I 为指标集, I 可以为无限集. 在集合

$$\prod_{\alpha\in I} M_\alpha = \{(m_\alpha)_{\alpha\in I} \mid m_\alpha \in M_\alpha,\ \forall\ \alpha \in I\}$$

上按分量定义加法和左 R-作用. 则 $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ 作成左 R-模, 称为 M_α $(\alpha \in I)$ 的直积.

显然, 直和 $\bigoplus\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$ 可以自然地嵌入到直积 $\prod\limits_{\alpha\in I} M_\alpha$; 这个嵌入是同构当且仅当 I 是有限集.

引理 1.2.3 我们有如下 Abel 群的典范同构 (下面的 e_i 均指相应的嵌入, p_i 均指相应的投影):

$$\mathrm{Hom}_R(M, \bigoplus_{1\le i\le n} N_i) \cong \bigoplus_{1\le i\le n} \mathrm{Hom}_R(M, N_i), \quad f \longmapsto (p_1 f, \cdots, p_n f);$$

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{1\le i\le n} M_i, N) \cong \bigoplus_{1\le i\le n} \mathrm{Hom}_R(M_i, N), \quad f \longmapsto (fe_1, \cdots, fe_n);$$

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N), \quad f \longmapsto (fe_i)_{i\in I};$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, \prod_{i\in I} N_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M, N_i), \quad f \longmapsto (p_i f)_{i\in I}.$$

注记 1.2.4 我们也有如下 Abel 群的典范同态:

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M, N_i) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \bigoplus_{i\in I} N_i), \quad (f_i)_{i\in I} \longmapsto \sum_{i\in I} e_i f_i;$$

$$\mathrm{Hom}_R(M, \bigoplus_{i\in I} N_i) \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M, N_i), \quad f \longmapsto (p_i f)_{i\in I};$$

$$\mathrm{Hom}(\prod_{i\in I} M_i, N) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N), \quad f \longmapsto (fe_i)_{i\in I};$$

$$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(M_i,N)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\prod_{i\in I}M_i,N),\ (f_i)_{i\in I}\longmapsto \sum_{i\in I}f_ip_i.$$

但是, 当 I 是无限集时, 这四个典范同态一般来说均非同构.

1.2.4 模同态的矩阵表达 我们经常要用模同态的矩阵表达: 其好处就是同态的合成与矩阵的运算法则完全一致.

设有模同态 $f: X\longrightarrow U$ 和 $g: X\longrightarrow V$. 记 $\binom{f}{g}: X\longrightarrow U\oplus V$ 是模同态 e_1f+e_2g, 其中 $e_1: U\longrightarrow U\oplus V$ 和 $e_2: V\longrightarrow U\oplus V$ 均为嵌入, 即 $e_1(u)=(u,0)$, $e_2(v)=(0,v)$. 任意模同态 $h: X\longrightarrow U\oplus V$ 均可唯一地写成 $\binom{f}{g}$ 这种形式, 其中 $f=p_1h$, $g=p_2h$, 这里 $p_1: U\oplus V\longrightarrow U$ 和 $p_2: U\oplus V\longrightarrow V$ 是投影, 即 $p_1(u,v)=u$, $p_2(u,v)=v$.

设有模同态 $a: U\longrightarrow Y$ 和 $b: V\longrightarrow Y$. 记 $(a,b): U\oplus V\longrightarrow Y$ 是模同态 ap_1+bp_2. 任意同态 $h: U\oplus V\longrightarrow Y$ 均可唯一地写成 (a,b) 这种形式, 其中 $a:=he_1: U\longrightarrow Y$, $b:=he_2: V\longrightarrow Y$.

设有模同态 $\binom{f}{g}: X\longrightarrow U\oplus V$ 和 $(a,b): U\oplus V\longrightarrow Y$. 则其合成恰为 $(a,b)\binom{f}{g}=af+bg$.

设有模同态 $a: U\longrightarrow X$, $b: U\longrightarrow Y$, $c: V\longrightarrow X$, $d: V\longrightarrow Y$. 用 $\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right): U\oplus V\longrightarrow X\oplus Y$ 记模同态

$$\begin{pmatrix}(a,c)\\(b,d)\end{pmatrix}=\left(\left(\begin{smallmatrix} a\\ b\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix} c\\ d\end{smallmatrix}\right)\right)=\left(\begin{smallmatrix} a\\ b\end{smallmatrix}\right)(\mathrm{Id}_U,0)+\left(\begin{smallmatrix} c\\ d\end{smallmatrix}\right)(0,\mathrm{Id}_V)=\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Id}_X\\ 0\end{smallmatrix}\right)(a,c)+\left(\begin{smallmatrix} 0\\ \mathrm{Id}_Y\end{smallmatrix}\right)(b,d),$$

即 $\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right)$ 将 $\binom{u}{v}$ 映到 $\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right)\binom{u}{v}=\binom{a(u)+c(v)}{b(u)+d(v)}$. 而且, 任意模同态 $U\oplus V\longrightarrow X\oplus Y$ 均可唯一地写成 $\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right)$ 这种形式.

设有模同态 $\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right): U\oplus V\longrightarrow X\oplus Y$ 和模同态 $\left(\begin{smallmatrix} a' & c'\\ b' & d'\end{smallmatrix}\right): X\oplus Y\longrightarrow W\oplus Z$. 则其合成恰为

$$\left(\begin{smallmatrix} a' & c'\\ b' & d'\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a'a+c'b & a'c+c'd\\ b'a+d'b & b'c+d'd\end{pmatrix}: U\oplus V\longrightarrow W\oplus Z.$$

设有模同态 $\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right): U\oplus V\longrightarrow X\oplus Y$ 和 $\left(\begin{smallmatrix} a' & c'\\ b' & d'\end{smallmatrix}\right): U\oplus V\longrightarrow X\oplus Y$. 则

$$\left(\begin{smallmatrix} a & c\\ b & d\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix} a' & c'\\ b' & d'\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a+a' & c+c'\\ b+b' & d+d'\end{pmatrix}: U\oplus V\longrightarrow X\oplus Y.$$

验证均留作习题. 这里仅是对两个模的直和表述模同态的矩阵表达. 对于有限个模的直和, 模同态也有类似的矩阵表达.

1.2.5 模的直和的自同态环 设左 R-模 M 有直和分解 $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$. 按照上述记法, 任意 $f \in \mathrm{End}_R(M)$ 均可唯一地写成

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}$$

的形式, 其中左 R-模同态 $f_{ji} := p_j f e_i : M_i \longrightarrow M_j$, $e_i : M_i \longrightarrow M$ 是嵌入, $p_j : M \longrightarrow M_j$ 是投影. 于是我们得到

引理 1.2.5 我们有环同构

$$\mathrm{End}_R(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix} \middle| \ f_{ij} \in \mathrm{Hom}_R(M_j, M_i), \ \ 1 \le i, \ j \le n \right\},$$

其中右边集合的代数运算按矩阵运算法则进行.

特别地, 若 $\mathrm{Hom}_R(M_i, M_j) = 0, 1 \le i \ne j \le n$, 则

$$\mathrm{End}_R(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) \cong \mathrm{End}_R(M_1) \times \cdots \times \mathrm{End}_R(M_n).$$

在上述引理中取 $M_1 \cong \cdots \cong M_n \cong L$, 即 $M \cong nL$, 则得到

推论 1.2.6 我们有环同构 $\mathrm{End}_R(nL) \cong M_n(B)$, 其中 $B := \mathrm{End}_R(L)$, $M_n(B)$ 是环 B 上的 n 阶全矩阵环.

1.2.6 有限维不可分解模的分类: 一个例子 称非零左 R-模 M 不可分解, 如果由 $M \cong M_1 \oplus M_2$ 可推出 $M_1 = 0$ 或 $M_2 = 0$.

例 1.2.7 设 k-代数 $A = k[x]/\langle x^n \rangle$. 下面确定所有有限维不可分解 A-模.

令 $M_m := \langle x^{n-m} \rangle / \langle x^n \rangle$, $m = 1, \cdots, n$. 则 M_m 均是 A-模且 $\dim_k M_m = m$, $m = 1, \cdots, n$. 令 $e_i := \overline{x^{n-m+i-1}} \in M_m$, $i = 1, \cdots, m$. 则 $e_1 = \overline{x^{n-m}}, \cdots, e_m = \overline{x^{n-1}}$ 是 M_m 的一组基, 且有

$$\bar{x}e_1 = e_2, \ \bar{x}e_2 = e_3, \ \cdots, \ \bar{x}e_{m-1} = e_m, \ \bar{x}e_m = 0.$$

首先, 我们断言每个 M_m 都是不可分解 A-模. 事实上, 若 N 是 M_m 的非零子模, 则存在 t, $1 \le t \le m$, 使得 N 含有非零元 $n := \lambda_t e_t + \cdots + \lambda_m e_m$, 其中 $\lambda_t \ne 0$. 不妨设 $\lambda_t = 1$. 则 $e_m = x^{m-t} n \in N$. 这就证明了 M_m 是不可分解 A-模.

其次, 我们断言 $M_1, \cdots, M_n$ 就是所有两两互不同构的有限维不可分解 A-模. 事实上, 因为 $\dim_k M_m = m$, 所以 $M_1, \cdots, M_n$ 是两两互不同构的有限维不可分

解 A-模. 假设 V 是 s 维不可分解 A-模. 则有线性变换 $\bar{x}: V \longrightarrow V, v \longmapsto \bar{x}v$, 且 $\bar{x}^n = 0$. 根据线性变换的 Jordan 标准形的理论, 存在 V 的一组基, 使得 $\bar{x}$ 在这组基下的矩阵是若干个 Jordan 块的直和. 因为 V 是不可分解 A-模, 从而 $\bar{x}$ 在这组基下的矩阵只能是一个 Jordan 块. 又因为 $\bar{x}^n = 0$, 故 $s \leq n$. 即有 V 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_s\}$, 使得 $\bar{x}$ 在这组基下的矩阵是 Jordan 块

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_{s\times s} \quad \text{(其中未标出的元素均为 0).}$$

从而

$$\bar{x}e_1 = e_2,\ \bar{x}e_2 = e_3,\ \cdots,\ \bar{x}e_{s-1} = e_s,\ \bar{x}e_s = 0.$$

于是 $V \cong M_s$.

综上所述, $M_1, \cdots, M_n$ 是所有两两互不同构的有限维不可分解 A-模, 且有子模链 $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n$, 使得 $M_{i+1}/M_i \cong M_1$, $1 \leq i \leq n-1$.

1.2.7 双模 设 R 和 S 是环. 如果 M 既是左 R-模, 也是右 S-模, 并且

$$(rm)s = r(ms),\ \ \forall\, r \in R,\ s \in S,\ m \in M,$$

则称 M 是 R-S-双模. 记为 ${}_RM_S$. 如果 $f: {}_RM_S \longrightarrow {}_RM'_S$ 既是左 R-模同态, 也是右 S-模同态, 则称 f 是 R-S-双模同态.

例 1.2.8 (1) 环 R 作成 R-R-双模, 作用均是 R 的乘法.

(2) 任一左 R-模 M 可视为 R-$\mathbb{Z}$-双模. 任一 k-代数 A 上的左模 M 可视为 A-k-双模.

(3) 设 M 是右 R-模. 令 $S := \mathrm{End}_R(M)$. 则 M 作成 S-R-双模, 其中左 S-模的结构为 $fm := f(m)$, $\forall\, f \in \mathrm{End}_R(M)$, $m \in M$.

设 M 是左 R-模. 令 $S := \mathrm{End}_R(M)^{\mathrm{op}}$. 则 M 作成 R-S-双模, 其中右 S-模的结构为 $mf := f(m)$, $\forall\, f \in S$, $m \in M$.

(4) 设有双模 ${}_RM_S$ 和左 R-模 ${}_RN$. 则 $\mathrm{Hom}_R({}_RM_S, {}_RN)$ 作成左 S-模: $(sf)(m) := f(ms)$.

设有左 R-模 ${}_RM$ 和双模 ${}_RN_T$. 则 $\mathrm{Hom}_R({}_RM, {}_RN_T)$ 作成右 T-模: $(ft)(m) := f(m)t$.