粒计算研究丛书

三支决策理论与方法

李小南　祁建军　孙秉珍　姚一豫　著

科学出版社

粒计算研究丛书

三支决策理论与方法

李小南　祁建军　孙秉珍　姚一豫　著

科学出版社

内 容 简 介

三支决策是近年来发展起来的一种新的用于复杂问题求解的有效方法。该理论一经提出就得到了广大学者的关注，现在该理论已经被广泛地应用于决策分析、聚类、信息过滤、多标记分类、医学图像重建等领域。本书是三支决策理论研究的最新总结，主要包括三支概念格、基于包含度的三支群决策、基于不确定多属性的三支群决策、三支决策与三值逻辑、三支决策与拟阵、区间集概率粗糙集、不完备信息的多粒度决策粗糙模糊集等内容。

本书可供计算机科学与技术、应用数学、管理科学与工程、智能科学与技术等专业的教师、研究生、高年级本科生阅读，也可作为科研和工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

三支决策理论与方法 / 李小南等著. —北京：科学出版社，2019.5

（粒计算研究丛书）

ISBN 978-7-03-060522-1

Ⅰ. ①三… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①决策支持系统－研究 Ⅳ. ①TP399

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 026254 号

责任编辑：任 静 高慧元 / 责任校对：王 瑞
责任印制：吴兆东 / 封面设计：华路天然

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019 年 5 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2019 年 5 月第一次印刷 印张：13 3/4
字数：257 000

定价：88.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

丛 书 序

粒计算是一个新兴的、多学科交叉的研究领域。它既融入了经典的智慧，也包括了信息时代的创新。通过十多年的研究，粒计算逐渐形成了自己的哲学、理论、方法和工具，并产生了粒思维、粒逻辑、粒推理、粒分析、粒处理、粒问题求解等诸多研究课题。值得骄傲的是，中国科学工作者为粒计算研究发挥了奠基性的作用，并引导了粒计算研究的发展趋势。

在过去几年里，科学出版社出版了一系列具有广泛影响的粒计算著作，包括《粒计算：过去、现在与展望》《商空间与粒计算——结构化问题求解理论与方法》《不确定性与粒计算》等。为了更系统、全面地介绍粒计算的最新研究成果，推动粒计算研究的发展，科学出版社推出了“粒计算研究丛书”。丛书的基本编辑方式为：以粒计算为中心，每年选择该领域的一个突出热点为主题，邀请国内外粒计算和相关主题方面的知名专家、学者就此主题撰文，来介绍近期相关研究成果及对未来的展望。此外，其他相关研究者对该主题撰写的稿件，经丛书编委会评审通过后，也可以列入该丛书。丛书与每年的粒计算研讨会建立长期合作关系，丛书的作者将捐献稿费购书，赠给研讨会的参会者。

中国有句老话，“星星之火，可以燎原”，还有句谚语，“众人拾柴火焰高”。“粒计算研究丛书”就是基于这样的理念和信念出版发行的。粒计算还处于婴儿时期，是星星之火，在我们每个人的细心呵护下，一定能够燃烧成燎原大火。粒计算的成长，要靠大家不断地提供营养，靠大家的集体智慧，靠每一个人的独特贡献。这套丛书为大家提供了一个平台，让我们可以相互探讨和交流，共同创新和建树，推广粒计算的研究与发展。本丛书受益于从事粒计算研究同仁的热心参与，也必将服务于从事粒计算研究的每一位科学工作者、老师和同学。

“粒计算研究丛书”的出版得到了众多学者的支持和鼓励，同时也得到了科学出版社的大力帮助。没有这些支持，也就没有本丛书。我们衷心地感谢所有给予我们支持和帮助的朋友们！

“粒计算研究丛书”编委会

2015年7月

前　　言

三支决策理论是加拿大里贾纳大学计算机系姚一豫教授于 2009 年提出的一种处理不确定问题的有效方法。该理论来源于在粗糙集理论研究早期，姚一豫教授将贝叶斯最小风险决策过程引入经典粗糙集模型而提出的决策粗糙集模型。经过十年的快速发展，三支决策理论已经成为一种独立的信息处理的有效方法，并在决策分析、图像处理、聚类、社交网络分析、垃圾邮件过滤等方面有着重要的应用。

西安作为千年古都，历史、文化底蕴深厚。到了现代，这里高校林立，科研实力突出。在不确定性数学领域，西安地区的前辈们做出了很好的榜样。20 世纪 80 年代起，陕西师范大学王国俊教授及其弟子在模糊数学，特别是模糊拓扑学领域做出了一流的成果；西安交通大学张文修教授及其弟子在粗糙集及概念格领域也做出了诸多开创性的成果。近年来，西安高校的年轻同行开始慢慢崭露头角，做出了诸多有影响力的工作。四五年前，我们会组织不定期的聚会，在谈天说地中或介绍最近的工作，或寻找灵感。截止到 2018 年初，名为“三支决策与粒计算研讨会”的西安同行聚会已经举行了五届。和之前不同的是，2017 年研讨会上，我们有幸邀请到同济大学苗夺谦教授、重庆邮电大学于洪教授等几位省外专家。我想在今后的研讨会上，将会有更多的省外专家给西安同行带来他们的最新研究成果。

本书是西安地区三支决策研究工作的总结。无论能力还是资历，我都没有资格组织编写这样的一本书。然而，其他同行好友要么有繁重的科研任务，要么处在论文撰写的黄金时期而不便担此责任。既然我们的研讨会已经举办了多次，就应该有一个总结。加之去年暑假访问加拿大里贾纳大学时，合作导师姚一豫教授恰好提及此事，我就没有任何推脱的理由了。这里感谢姚教授将这么重要的工作交给我，也感谢参加本书编写的各位朋友对本书工作的大力支持。

本书具体章节撰写分工如下。

第 1 章：预备知识（李小南，西安电子科技大学；易黄建，西北大学）。

第 2 章：三支决策概论（姚一豫，加拿大里贾纳大学）。

第 3 章：三支概念分析基础（祁建军，西安电子科技大学；魏玲、任睿思，西北大学）。

第 4 章：基于包含度和区间值决策粗糙集的三支群决策（张红英，西安交通大学；杨淑云，长安大学）。

第 5 章：不确定多属性三支群决策（孙秉珍、胡晓元、王莹，西安电子科技大学）。

第 6 章：三支决策与三值逻辑（折延宏，西安石油大学）。

第 7 章：三支决策与拟阵（李小南，西安电子科技大学；易黄建，西北大学）。

第 8 章：基于区间集的多粒度概率粗糙集模型（马建敏、景嫄，长安大学；张文修，西安交通大学）。

第 9 章：不完备信息下的多粒度决策粗糙模糊集（杨海龙，陕西师范大学）。

需要特别指出的是，西安地区粗糙集及三支决策理论的研究工作得到了许多国内同行专家的帮助。由于人数众多，恕不一一致谢。本书的出版得到了西安电子科技大学“三个一流”项目“信息科学中的数学方法研究与数学公共课建设”、国家自然科学基金项目（项目编号：61772019，61772021，61472471，71571090）、陕西省自然科学基础研究计划项目（项目编号：2017JM1036，2018JQ6099）以及中央高校基本科研业务费项目（JB170702）的资助。

感谢我的硕士生导师陕西师范大学李生刚教授、博士生导师西安电子科技大学刘三阳教授的指导和帮助；感谢加拿大里贾纳大学姚一豫教授的关心和照顾。

还要将本书献给我们家刚出生的二宝李易晨。她的到来给全家带来了无尽的欢乐，这也是我能在纷繁的琐事中完成本书的精神源泉。最后，借用北京大学周民强教授在其著作《实变函数论》前言中的一首小诗与大家共勉：

道虽远，不行不至；

事虽难，不为不成。

李小南

2018 年 8 月

于西安电子科技大学新校区

目　录

丛书序
前言
第 1 章　预备知识 ··· 1
1.1　关系与格 ··· 1
1.1.1　关系 ··· 1
1.1.2　格 ··· 3
1.2　粗糙集 ··· 6
1.3　模糊集 ··· 9
参考文献 ··· 13
第 2 章　三支决策概论 ··· 14
2.1　认知与三支决策 ··· 14
2.2　三分而治的三支决策框架 ··· 17
2.2.1　基本思想 ··· 17
2.2.2　三分而治 TAO 框架概述 ··· 17
2.2.3　三分 ··· 19
2.2.4　治略 ··· 20
2.2.5　成效 ··· 23
2.3　三支决策与粒计算 ··· 24
参考文献 ··· 27
第 3 章　三支概念分析基础 ··· 31
3.1　形式概念分析的基本概念 ··· 32
3.1.1　形式背景 ··· 32
3.1.2　概念格 ··· 33
3.2　概念格属性约简 ··· 34
3.2.1　概念格属性约简的基本定义 ··· 34
3.2.2　属性约简的判定定理 ··· 35
3.2.3　属性约简的差别矩阵方法 ··· 37
3.2.4　关于其他属性约简理论的说明 ··· 43
3.3　三支概念格 ··· 43

3.3.1 负算子与负概念 …… 43
3.3.2 子集对的基本运算 …… 45
3.3.3 三支算子 …… 45
3.3.4 对象导出三支概念格 …… 47
3.3.5 属性导出三支概念格 …… 48
3.4 对象导出三支概念格的属性约简 …… 49
3.4.1 对象导出三支概念格属性约简的基本定义 …… 49
3.4.2 属性约简的判定定理 …… 50
3.4.3 属性约简的差别矩阵方法 …… 52
3.4.4 关于其他属性约简理论的说明 …… 55
参考文献 …… 56
第 4 章 基于包含度和区间值决策粗糙集的三支群决策 …… 58
4.1 区间分析和决策粗糙集 …… 58
4.2 两种语义下的区间值包含度 …… 60
4.2.1 合取和析取两种语义下的区间偏序 …… 60
4.2.2 两种偏序下的区间值包含度 …… 61
4.3 基于包含度和区间值决策粗糙集的三支决策 …… 62
4.3.1 基于区间值决策粗糙集的三支决策 …… 63
4.3.2 基于包含度和区间值决策粗糙集的三支决策 …… 64
4.4 基于包含度和区间值决策粗糙集的三支群决策 …… 67
4.4.1 基于包含度和区间值决策理论粗糙集的三支群决策模型 …… 67
4.4.2 基于可辨识信息粒规则和区间值决策粗糙集的三支群决策 …… 68
4.4.3 实验分析 …… 70
参考文献 …… 75
第 5 章 不确定多属性三支群决策 …… 77
5.1 基于语言偏好信息决策粗糙模糊集的三支决策 …… 78
5.1.1 语言变量及运算 …… 78
5.1.2 决策粗糙模糊集与三支决策 …… 79
5.1.3 语言偏好信息决策粗糙模糊集与三支决策 …… 81
5.2 语言偏好信息多属性群决策的粗糙模糊集模型与方法 …… 89
5.2.1 三支决策的多属性群决策描述 …… 89
5.2.2 模型与决策过程 …… 89
5.2.3 比较与讨论 …… 91
5.2.4 决策步骤 …… 92
5.3 基于双论域多粒度模糊决策粗糙集的三支群决策理论 …… 93

5.3.1　双论域多粒度模糊决策粗糙集 …… 93
5.3.2　不确定多属性三支群决策的双论域多粒度模糊粗糙集模型与方法 …… 101
5.4　结论 …… 106
参考文献 …… 106
第 6 章　三支决策与三值逻辑 …… 110
6.1　三值逻辑 …… 110
6.2　Pawlak 粗糙集与三值逻辑 …… 112
6.3　多粒度粗糙集与三值逻辑 …… 114
6.4　Kleene 三值逻辑与不完备信息 …… 118
6.5　正交对与三值逻辑 …… 120
6.5.1　真值序 …… 121
6.5.2　信息序 …… 121
6.5.3　单边序关系 …… 122
6.5.4　通过一致运算对正交对进行合成 …… 125
6.5.5　不完备信息的非真值函数性框架 …… 127
参考文献 …… 129
第 7 章　三支决策与拟阵 …… 131
7.1　粗糙集与拟阵 …… 131
7.1.1　拟阵简介 …… 132
7.1.2　近似算子的三种等价定义 …… 134
7.2　基于子集评价的三支决策模型 …… 138
7.2.1　从粗糙集到三支决策 …… 138
7.2.2　基于子集评价的 TMS …… 141
7.2.3　例子 …… 142
7.3　三支拟阵与三支模糊拟阵 …… 146
7.3.1　三支拟阵 …… 146
7.3.2　三支模糊拟阵 …… 152
参考文献 …… 157
第 8 章　基于区间集的多粒度概率粗糙集模型 …… 159
8.1　区间集概率粗糙集模型 …… 159
8.1.1　概率粗糙集 …… 159
8.1.2　区间集粗糙集 …… 162
8.1.3　区间集概率粗糙集 …… 164
8.2　多粒度区间集概率粗糙集模型 …… 166
8.2.1　多粒度粗糙集 …… 166

8.2.2　多粒度概率粗糙集 …… 168
8.2.3　多粒度区间集概率粗糙集 …… 171
8.3　可变多粒度区间集概率粗糙集模型 …… 177
8.3.1　可变多粒度粗糙集 …… 177
8.3.2　可变多粒度区间集粗糙集 …… 178
8.3.3　可变多粒度概率粗糙集 …… 179
8.3.4　可变多粒度区间集概率粗糙集 …… 180
参考文献 …… 181
第 9 章　不完备信息下的多粒度决策粗糙模糊集 …… 183
9.1　引言及预备知识 …… 183
9.2　不完备信息下的三种类型的多粒度决策粗糙模糊集 …… 184
9.2.1　不完备信息下的加权平均多粒度决策粗糙模糊集 …… 184
9.2.2　不完备信息下的乐观多粒度决策粗糙模糊集 …… 188
9.2.3　不完备信息下的悲观多粒度决策粗糙模糊集 …… 194
9.3　模型的应用 …… 201
参考文献 …… 204

第1章 预备知识

本章介绍阅读本书需要的预备知识，主要包括关系与格、粗糙集的约简及各种扩展模型、模糊集及其各种推广等基本概念。

1.1 关系与格

1.1.1 关系

设X是一个集合，Y、Z是X的子集，则集合的交、并、差、补运算分别定义为

$$Y\bigcap Z=\{x|x\in Y\text{且}x\in Z\}$$

$$Y\bigcup Z=\{x|x\in Y\text{或}x\in Z\}$$

$$Y-Z=\{x|x\in Y\text{且}x\notin Z\}$$

$$Y'=X-Y$$

上述集合运算产生了新集合，下面介绍另一种产生新集合的方法。两个集合Y和Z的笛卡儿积（或直积）定义为

$$Y\times Z=\{(a,b)|a\in Y\text{且}b\in Z\}^{①} \tag{1-1}$$

非空集合E上一个（二元）关系R是指$E\times E$的一个子集，即$R\subseteq E\times E$。

我们通常关心的是满足一定性质的关系。

设R是论域上的关系，$\forall x,y,z\in X$，若$(x,x)\in R$，则称R是自反关系；若$(x,y)\in R$，有$(y,x)\in R$，则称R是对称关系；若$(x,y)\in R$且$(y,x)\in R$，有$x=y$，则称R是反对称关系；若$(x,y)\in R$且$(y,z)\in R$，有$(x,z)\in R$，则称R是传递关系。

定义 1.1.1 论域X上自反、对称、传递的关系称为等价关系；自反、反对称、传递的关系称为偏序关系。

设R是X上的等价关系，$x\in X$。令$[x]_R=\{y\in X|(x,y)\in R\}$，称为以$x$为代表元的等价类。$\forall x,y\in X$，容易验证：

---

① $Y\times Z$中的元素称为有序对。若$a\neq b$，则$(a,b)\neq(b,a)$。如同集合的概念一样，我们这里把有序对看成不加定义的原始概念。

（1）

$$(x,y)\in R\Rightarrow[x]_R=[y]_R,\quad (x,y)\notin R\Rightarrow[x]_R\cap[y]_R=\varnothing \tag{1-2}$$

（2）

$$\bigcup_{x\in X}[x]_R=X \tag{1-3}$$

定义 1.1.2　设 $\pi=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$ 是 X 的非空子集构成的集合（非空子集族），若

（1）

$$X_i\cap X_j=\varnothing,\quad \forall i,j=1,2,\cdots,m且i\neq j \tag{1-4}$$

（2）

$$\bigcup_{i=1}^{m}X_i=X \tag{1-5}$$

则称 π 是 X 的一个划分。

等价关系和划分可以看作等同的概念。一方面，不难发现集合 X 上的等价关系 R 产生的所有等价类（记为 X/R ）构成了 X 的划分。另一方面，若 π 是 X 上的划分，定义 X 上的关系 R 为 $\forall x,y\in X,(x,y)\in R\Leftrightarrow$ 存在 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得 $x,y\in X_i$ ，则不难验证 R 是 X 上的等价关系。

设 $\mathscr{R}$ 是 X 上的一族等价关系，则 $\mathscr{R}$ 中所有等价关系的交也是一个等价关系，称为 $\mathscr{R}$ 的不可分辨关系，记为 $\mathrm{IND}(\mathscr{R})$ 。为简单起见，$U/\mathrm{IND}(\mathscr{R})$ 常记为 $U/\mathscr{R}$ 。$\forall x\in X$ ，有

$$[x]_{\mathrm{IND}(\mathscr{R})}=\bigcap_{R\in\mathscr{R}}[x]_R$$

例 1.1.1　表 1.1 是一个关于房子信息的表格（信息表）。论域（即所讨论问题的对象的全体）由 6 个房子构成。信息表从“尺寸”“价格”“位置”“新旧程度”等 4 个方面（称为属性，记此信息表属性的集合为 C ）来刻画房子。每个属性产生一个等价关系（划分）。例如，尺寸产生的划分为 $\{\{x_1,x_5\},\{x_2,x_3,x_4,x_6\}\}$ ，所有属性构成的不可分辨关系产生的划分为

$$U/\mathrm{IND}(C)=\{\{x_1\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_3,x_6\}\}$$

表 1.1　房子的信息表

房子	尺寸	价格	位置	新旧程度
x_1	大	中	郊区	新
x_2	中	中	市中心	新

续表

房子	尺寸	价格	位置	新旧程度
x_3	中	中	市中心	旧
x_4	中	高	市中心	新
x_5	大	高	郊区	新
x_6	中	中	市中心	旧

1.1.2 格

下面来介绍一类特殊的偏序集——格。为此先做一些准备工作。论域X上的偏序关系常用符号“$\leqslant$”表示[①]，我们称$(X,\leqslant)$为偏序集。

设$(X,\leqslant)$为偏序集，$x,y\in X$。若$(x,y)\in\leqslant$（常记为$x\leqslant y$）或$y\leqslant x$，则称x和y是可比较的，否则称x和y是不可比较的。X的任意两个元素都可（不可）比较的子集称为（反）链。若$x\leqslant y,x\neq y$，且对任意满足$x\leqslant z\leqslant y$的元素z都有$z=x$或$z=y$，则称y覆盖x，记为$x\prec y$。偏序集$(X,\leqslant)$可以用 Hasse 图直观地表示：用小圆圈或黑圈点表示X中的元素；若$x\prec y$，则在x和y之间用线段相连，且y在x的上方。

例 1.1.2 设$X=\{a,b,c\},\leqslant=\{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c),(b,c)\}$，则不难验证$\leqslant$是$X$上的偏序关系且偏序集$(X,\leqslant)$的 Hasse 图如图 1.1（a）所示。

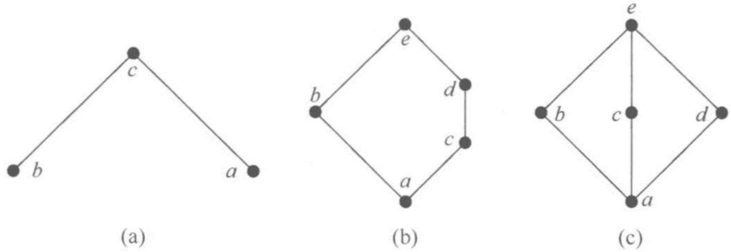

图 1.1 三个偏序集

设$(X,\leqslant)$为偏序集，且$a\in X,Y\subseteq X$。$\forall y\in Y$，有$y\leqslant a$，则称a是Y的上界；进一步，对于Y的任意上界b，有$a\leqslant b$，则称a是Y的最小上界，记为$a=\vee_{y\in Y}y$，或简单记为$\vee Y$。类似地，可以定义最大下界。

① “$\leqslant$”为人熟知是因为我们用这个符号表示实数集中的大小关系，而这个大小关系显然是偏序关系。现在我们就用这个特殊偏序关系的符号来表示一般的偏序关系。

定义 1.1.3　设$(X,\leqslant)$为偏序集。若对于任意的$Y\subseteq X$，$\vee Y$和$\wedge Y$存在，则称$(X,\leqslant)$为完备格。若X中任意两个元素的最小上界和最大下界都存在，则称$(X,\leqslant)$是格。在无须指明序关系时，常简称X是格。

注 1.1.1　（1）对于任意的$Y\subseteq X$，$\vee Y$存在（蕴含了$\vee\varnothing=0$）等价于$\wedge Y$存在（蕴含$\wedge\varnothing=1$）。故完备格是有界格（即最大元1和最小元0存在的格）。

（2）有限格（即X是有限集）显然都是完备格。

（3）$\vee\{x,y\},\wedge\{x,y\}$常记为$x\vee y,x\wedge y$，并分别称为$x$和$y$的并和交。

例 1.1.3　（1）对于图1.1中的三个偏序集，图（a）不是格，因为$a\wedge b$不存在。图（b）、图（c）两个偏序集都是格，分别记为N_5和M_3。

（2）集合X的所有子集构成的集合称为X的幂集，记为2^X。容易验证X在包含关系下的偏序集$(2^X,\subseteq)$是一个格，称为X的幂集格。$\forall Y,Z\in 2^X$有

$$Y\vee Z=Y\bigcup Z,\quad Y\wedge Z=Y\bigcap Z$$

即幂集格中元素的交即集合的交，并即集合的并。

（3）设C是拓扑空间中所有闭集(X,T)构成的集合。则在包含关系下，偏序集$(C,\subseteq)$是一个格，称为拓扑空间的闭集格。容易验证$Y\vee Z=\mathrm{cl}(Y\bigcup Z),Y\wedge Z=Y\bigcap Z(\forall Y,Z\in 2^X)$，其中，cl为拓扑空间的闭包算子。

下面介绍X中的一些特殊元素和子集。若$Y\subseteq X$，且Y对X中的交和并运算封闭（$\forall x,y\in Y\Rightarrow x\wedge y,x\vee y\in Y$），则称$Y$是$X$的一个子格。设$x(\neq 0)\in X$，若$x=a\vee b\Rightarrow x=a或x=b(\forall a,b\in X)$，则称$x$是并不可约的（join-irreducible）。对偶地，可定义交不可约元。X上并不可约元和交不可约元的全体分别记为$\mathcal{J}(X)$和$\mathcal{M}(X)$。若$0\prec x$，则称x为原子，原子的全体记为$\mathcal{A}(X)$，显然$\mathcal{A}(X)\subseteq\mathcal{J}(X)$。设$X$是有界格，$x\in X$，若$x\vee y=1$且$x\wedge y=0$，则称$y$是$x$的补元，记为$x'$。

显然幂集格中的原子是单点集，这样幂集格中任意的元素都可以表示为原子的并（这样的格称为原子格）。但即便是有限格都未必是原子格。例如，图1.1（b）中的格不是原子格（因为d不是某些原子的并）。若从原子扩大范围到并不可约元，就可以证明有限格中任意元素都是若干并不可约元的并①。下面介绍几种常见的格。

设X是格。$\forall x,y,z\in X$，若$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$，则称$X$是分配格。若$x\geqslant y\Rightarrow x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee z$，则称$X$是模格。若$X$是有界的分配格，且$\forall x\in X,x'$存在，则称$X$是布尔格。设$f$是格$X$和$Y$之间的映射，若$f$保持并和交运算（即$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y),\ f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y),\forall x,y\in X$），则称$f$是

① 任意正整数可以分解为质数的乘积。并不可约元起着类似“质数”的作用，使得有限格中任意元素都可以分解为并不可约元的并。

一个格同态。若格同态 f 是一个单射，则称 f 是一个格嵌入；若格同态 f 是一个双射，则称 f 是一个格同构①。

注 1.1.2 （1）显然分配格是模格。图 1.1（c）所示的格 M_3 是模格而并非分配格，图 1.1（b）所示的格 N_5 不是模格。这两个特殊的格可以刻画分配格和模格：格是分配格当且仅当 X 不含同构于 M_3 或 N_5 的子格；格 X 是模格当且仅当 X 不含同构于 N_5 的子格。

（2）幂集格 $(2^X,\subseteq)$ 显然是布尔格。有限布尔格同构于其原子之集构成的幂集格。

定义 1.1.4 设 X 是非空集合且 $A\subseteq 2^X$。若 $\forall \mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$，有 $\bigcap\limits_{B\in\mathscr{B}} B\in\mathscr{A}$，则称 $\mathscr{A}$ 是闭包系统（或交结构）。

定义 1.1.5 设偏序集 P 上的映射 $\mathrm{cl}:P\to P$ 满足如下性质 $(\forall p,q\in P)$：① $p\leqslant \mathrm{cl}(p)$；② $p\leqslant q\Rightarrow \mathrm{cl}(p)\leqslant \mathrm{cl}(q)$；③ $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(p))=\mathrm{cl}(p)$，则称 cl 是 P 上的一个闭包算子。

注 1.1.3 （1）显然闭包系统构成一个完备格。反之任何一个完备格都可以通过这种方式产生，即任意完备格都是某个闭包算子生成的闭集格。

（2）设 L 是完备格。若 cl 是 L 上的一个闭包算子，则 $\{p\mid \mathrm{cl}(p)=p,p\in L\}$ 是闭包系统。由（1）可知，它是一个完备格，称为 cl 的闭集格。另外，若 C 是完备格 L 上的闭包系统，令 $f(p)=\{c\in C\mid p\leqslant c\}(\forall p\in L)$，则 f 是 L 上的闭包算子。不难验证 L 上的闭包系统和闭包算子存在一一对应关系（文献[1]中定理 3.8）。

定义 1.1.6 设 P 和 Q 是偏序集，$f:P\to Q$ 和 $g:Q\to P$ 是映射。若 $\forall p,p_1,p_2\in P$，$q,q_1,q_2\in Q$，有

（1）

$$p_1\leqslant p_2\Rightarrow f(p_1)\geqslant f(p_2)\text{且}q_1\leqslant q_2\Rightarrow g(q_1)\geqslant g(q_2) \tag{1-6}$$

（2）

$$p\leqslant g(f(p))\text{且}q\leqslant f(g(q)) \tag{1-7}$$

则称 f 和 g 是 P 和 Q 之间的一对伽罗瓦联络。

注 1.1.4 （1）这里的定义是逆序的，伽罗瓦联络还有保序版本的定义。但本质上说两者是等价的。

（2）在定义 1.1.6 下，gf 和 fg 分别为 P 和 Q 上的闭包算子。

关于偏序集和格论更多的知识，可参考文献[1]和[2]。

① 为了研究两个对象之间的联系，我们需要借助对象之间的映射。这种映射一般传递对象间某些性质的信息。例如，拓扑空间之间的连续映射，代数系统之间保持运算的同态映射等。同构的格可以等同起来，这样有助于我们借助熟悉、具体的格去理解抽象、陌生的格。例如，有限布尔格就同构于其所有原子构成的幂集格。

1.2 粗 糙 集

定义 1.2.1 信息表是一个四元组(U,A,V,f)。U为非空有限集合，即论域。A为属性构成的非空有限集合。V为属性的取值构成的集合，即$V=\bigcup_{a\in A}V_a$（V_a表示a的值域）。f为$U\times A$到V的映射，即为每个对象的每个属性赋值。若信息表的属性由条件属性和决策属性两部分构成，则称此信息表为决策表。表 1.1 是一个信息表，表 1.2 是一个决策表。

例 1.2.1[3] 表 1.2 给出了一个关于流感的决策表。条件属性集$C=\{c_1,c_2,c_3\}$，决策属性集$D=\{d\}$。

表 1.2 关于流感的决策表（一）

患者	头痛 c_1	肌肉痛 c_2	体温 c_3	流感 d
x_1	是	是	正常	否
x_2	是	是	高	是
x_3	是	是	很高	是
x_4	否	是	正常	否
x_5	否	否	高	否
x_6	否	是	很高	是
x_7	否	否	高	是
x_8	否	是	很高	否

注 1.2.1 （1）根据决策表中的每个对象可以得到决策规则。例如，由患者x_1可知，（头痛 = 是）$\wedge$（肌肉痛 = 是）$\wedge$（体温 = 正常）$\Rightarrow$（流感 = 否）。但有时表中信息完全相同（即所有条件属性的取值相同）的两个对象的决策属性的取值不同（如表 1.2 中x_6和x_8），这样的决策表称为不一致决策表，否则称为一致决策表。

（2）信息表中有些信息是冗杂的（如表 1.1 中尺寸和位置这两个属性，对对象的分类能力来说是完全一样的），因此对信息表进一步处理之前，我们常常要简化信息表，即对信息表进行属性约简。

下面我们介绍相对约简的概念，它对应于决策表的属性约简。设P和Q是U上的两个等价关系，则Q的P正域