大学数学系列教材

数学物理方程与特殊函数

第三版

华中科技大学数学与统计学院

高等教育出版社

大学数学系列教材

数学物理方程与特殊函数

第三版

华中科技大学数学与统计学院

高等教育出版社·北京

内容提要

本书第三版是在第二版的基础上经过多年教学实践，吸取使用本书的教师和读者的宝贵意见和建议修订而成的。第三版较第二版在结构上有较大的改进，在内容上进行了更新和充实。本书的特点是以讲解方法为主线，把类型不同但求解方法类似的定解问题归纳在同一章节讲述，着重阐述方法的精髓。

全书共七章：绪论（第一章），分离变量法（第二章），行波法与积分变换法（第三章），格林函数法（第四章），贝塞尔函数（第五章），勒让德多项式（第六章）和埃尔米特多项式（第七章）；书后附有“几类线性常微分方程的求解”“常用积分变换表”和“Γ 函数”三个附录。此外，与本书配套的数字课程还提供了四套试卷及参考答案供读者练习、参考。

本书可作为高等院校理工科专业有关课程的教材使用，也可作为自学用书以及科技工作者的参考书。学习本书内容需要的预备知识包括微积分、线性代数和复变函数的基本知识。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程与特殊函数 / 华中科技大学数学与统计学院编 . -- 3 版 . -- 北京：高等教育出版社，2019. 3

ISBN 978-7-04-051181-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①华… Ⅲ. ①数学物理方程－高等学校－教材②特殊函数－高等学校－教材 Ⅳ. ① O411.1 ② O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 008926 号

策划编辑	张彦云	责任编辑	李艳馥	特约编辑	刘　荣	封面设计	李小璐
版式设计	马敬茹	插图绘制	于　博	责任校对	高　歌	责任印制	田　甜

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　刷	三河市宏图印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　本	787mm × 960mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　张	12.75	版　次	1999 年 7 月第 1 版
字　数	220 千字		2019 年 3 月第 3 版
购书热线	010-58581118	印　次	2019 年 3 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	24.40 元

物 料 号　51181-00

数学物理方程与特殊函数

第三版

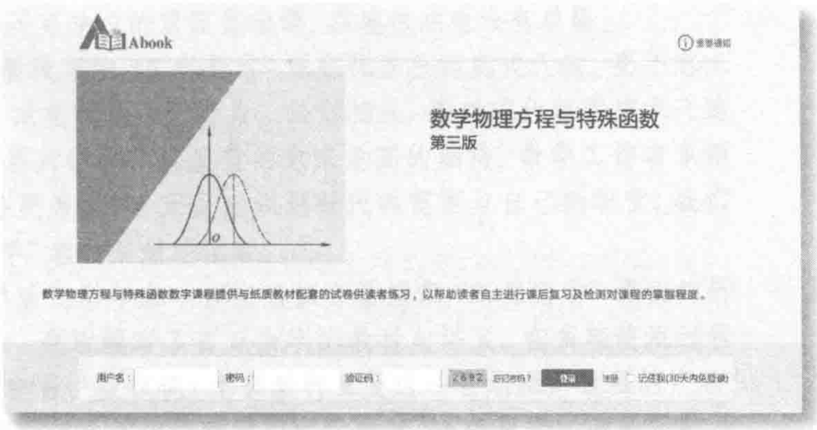
华中科技大学
数学与统计学院

1 计算机访问http://abook.hep.com.cn/12245717，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。

2 注册并登录，进入"我的课程"。

3 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。

4 单击"进入课程"按钮，开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

http://abook.hep.com.cn/12245717

第一版序

在高等学校理工科专业的数学教育体系中，“工程数学”一直是属于具有重要地位的课程系列。当前，革新之风正吹遍高等教育界，课程重组、内容改造与学时调整的呼声日益高涨。在此形势下，工程数学课程经受住了严峻的考验，作为学习现代科学技术所不可缺少的重要基础课，其地位丝毫没有动摇。

然而，这决不意味着现存的“工程数学”课程体系已经完美无缺，更不意味着数学教育界除了墨守成规之外别无所为。恰好相反，面对现代科学技术飞速发展的形势，面对教育界对数学训练质量的愈来愈高的期待，数学工作者革新“工程数学”课程的任务更为紧迫！正是意识到时代的需要与自己的职责，我们全力推出这套“工程数学”教材呈献给读者。

华中理工大学数学系几十年来一直在组织力量探索“工程数学”课程的新的内容体系与教学方法，先后编写了百万余字的教材与讲义，在多年使用过程中不断提炼，逐步趋于完善。应该说，本套教材正是这一长期探索过程的产物，它凝结了华中理工大学数学系几代教师的心血。当然，具体执笔的教师对教材的最终成型做出了决定性的贡献。

本套教材分《线性代数》《概率论与数理统计》《计算方法》《复变函数与积分变换》和《数学物理方程与特殊函数》五册出版。编者在取材上充分考虑到新世纪对科技人员数学知识的要求；在内容处理上力求联系理工科专业的实际需要，注重培养学生的基本运算能力、分析问题与解决问题的能力；在表述上力求清晰易读，便于教学与自学。本套教材配备了较丰富的例题与习题，它们大多源于教师在自身教学中的积累，既具有明显的启发性，又具有典型的应用意义。书末所附的习题答案与提示供教师与学生在教学中参考。本套教材可供高等学校理工科各专业 (非数学) 使用。

本套教材的编写自始至终得到华中理工大学教务处及数学系的支持，也得到华中理工大学数学系全体教师的协助与鼓励。高等教育出版社 CHEP-Springer 编辑室的宝贵支持，使本套教材得以顺利出版。对此，我们一并表示衷心的感谢。

刘次华

2001 年 7 月于武汉

第三版前言

数学物理方程是高等院校理工科专业本科生最重要的学科基础课之一, 也是他们在大学期间所接触的最深入最具有应用价值的数学课程之一, 与其专业知识学习和在相关领域从事科学研究息息相关。理工科专业的本科生通过本课程的学习和训练, 能够提升逻辑思维水平、培养分析和解决问题的能力。

本教材第二版已经使用十年有余, 课程组在长期的教学实践过程中体会到: 为了更好地传授知识、满足拔尖创新人才培养的需求, 对教材结构和内容进行合理更新势在必行。课程组在充分研讨和广泛征求师生意见和建议的基础上形成了修订方案。教材修订后结构上有较大变化: 其一是每一章后面设置了“本章小结及补充知识”, 一方面是对本章内容做简要回顾和总结, 便于读者复习; 另一方面是把与本章内容有关、需要或可以进一步学习的延伸知识做简要介绍, 以便引导读者继续学习有关内容。其二是教材中阐述的重要结论均以“定理”“推论”或“性质”等形式编列, 以示其重要性, 把一些有启发性的问题或需要读者进一步思考的问题以“注”的形式编目。

修订版在内容上也做了充实和改进。在第一章, §1.1.2 增加了弦振动方程第二类边界条件的详细推导过程; 为了与后续内容相衔接, §1.3 增写了用拉普拉斯方程描述静电场电位问题, §1.4.2 增补了波动方程和热传导方程定解问题提法的例子; 把傅里叶级数有关知识的复习整体上放在了“本章小结及补充知识”中。在第二章, 尽管“存在性定理”在理论上十分重要, 但本教材以讲解方法为主, 因此我们认为把这些理论结果放在补充知识里更加合理; 根据教学实践, 对 §2.4 中的部分内容的次序做了调整。为让读者对行波法有更加深入的了解, 本次修订在第三章增补了求解半无限长弦的振动问题的行波方法; 增加了齐次化原理的力学推导过程, 并在补充知识中介绍了其他类型非齐次方程定解问题的齐次化原理, 以便读者更好地理解和使用该原理; 对 §3.3 的部分内容做了重新组织并增加了有启发性的例题。在第四章, 对基本解的表达式做了修正, 以便与现行标准相统一; 增加了拉普拉斯方程狄利克雷问题的稳定性结果, 并把唯一性作为它的推论给出; 在补充知识里回顾了微积分中的格林公式, 并把它改写成便于研究二维拉普拉斯方程边值问题的形式。在第五章, 增加了亥姆霍兹 (Helmholtz) 方程所定义的固有值问题的固有值是严格正的证明方法; 通过增设例题来讲解如何把第二章的固有函数法推广到本章, 用于求解非齐次方程

定解问题; 由于汉克尔 (Hankel) 函数在本章没有直接用到, 在这一版我们把对它的讨论放在了补充知识里; 考虑到内容的完备性以及在实际应用中的广泛性, 我们在补充知识里详细介绍了非圆对称瞬时热传导问题的分离变量法 (可以推广到圆形膜的振动问题和圆柱体电容器问题)。第六章和第七章与第二版基本保持一致。另外, 本次修订增加了 “几类线性常微分方程的求解” 和 “常用积分变换表” 两个附录, 以便读者查阅, 并在数字课程网站提供了四套试卷及参考答案供读者练习、参考。

张显文负责组织本次修订工作并参与各章节的具体修订, 张光辉参与第一章、第二章及附录的修订, 魏金波和徐浩渊参与第三章的修订, 段志文和黄山林参与第四章的修订, 尹慧和雷远杰参与第五章的修订, 严凯参与第六章的修订, 杨美华参与第七章的修订。最后由张显文统稿并对全书的行文进行润色。本次修订得到了华中科技大学数学与统计学院的大力支持。

由于我们的水平有限, 修订版中不当之处在所难免, 敬请使用本教材的教师和读者批评指正。

编者

2017 年 12 月于华中科技大学

第二版前言

第二版是在孙金海老师所编写的本书第一版的基础上，广泛吸取课程老师的意见后改编而成。考虑到教学的连贯性和学生学习这一课程的实际情况，在保持全书的结构不变的同时，我们在第一章增添傅里叶级数等相关知识；第二章加了一个存在性定理说明用分离变量得解是形式解而不一定是古典解；第三章第二节，给出形式解的推导，第三节加了一小节积分变换；第四章第二节，细证了格林函数的性质；另外对几个例子和一些说法进行了必要的修订；对涉及常微分方程和球面积分等学生难于接受的内容，我们行文时尽量详述而不单独列出。令人遗憾的是，由于涉及过多的数学专门知识，我们没有详述特征值（固有值）问题，希望学习者能仔细体会第二章第六节所述特征值问题的结论，从而更好地了解分离变量法。在编写过程中得到了课题组老师们的关心与支持，在此表示衷心的感谢。

新版中如有不妥之处，敬请批评指正，以便进一步修订。

编者

2007 年 2 月于华中科技大学

第一版前言

在数学物理中, 需要研究各种物理过程——当研究像弹性体的振动、电磁波的传播、热的传导、粒子的扩散等物理过程和状态时, 就归结出一些偏微分方程。由于这些方程是来自物理学、力学与工程技术问题中, 所以就称为数学物理方程。数学物理方程是工科类高校有关专业的一门基础课, 通过本课程的学习, 使学生获得有关偏微分方程的一些基本概念, 掌握三个典型方程的定解问题的解法, 了解贝塞尔函数及勒让德多项式的一些基本知识与应用, 为学习后继课程和进一步扩大数学知识面提供必要的数学基础。

编者

2001 年 7 月于武汉

目　录

第一章

绪　论

本章将从几个不同的物理模型出发，建立数学物理中的三类典型方程；并根据系统的边界所处的物理条件及系统的初始状态列出定解条件；然后提出相应的定解问题.

为了建立方程，首先根据需要选定某个作为过程表征的物理量 u. 例如在研究某个系统的振动过程时，我们就选取系统中各处的位移，当研究某个系统的传热过程时，自然就选取系统中各处的温度，等等. 其次从所研究的系统中任取一小部分，分析邻近部分与这个小部分的相互作用，通过物理量 u 以算式表达这个作用，并将算式适当整理与简化，这就是数学物理方程了. 由于方程是邻近时间邻近点之间的联系，所以在建立方程时完全不必管边界上的物理条件和系统的初始状态. 因此同一类物理过程，不论其具体条件如何的不同，都具有同样的数学物理方程.

§1.1　弦振动方程与定解条件

§1.1.1　弦的微小横振动方程

设有一根拉紧时长度为 l 的柔软的均匀弦. 柔软的含义是：发生于弦中的张力的方向，总是沿着弦的瞬时侧影的切线方向. 该条件表示弦不抵抗弯曲. 由于弦被拉紧，弦上出现张力，因此弦就呈直线形状而静止. 一旦弦上有任何一部分不是直线形状或不静止，由于张力的作用，弦就开始振动. 我们研究弦作微小横振动的规律. 由于弦中的张力很大，以至于重力对弦的作用可以忽略不计.

为了导出弦的横振动方程，选择如图 1.1 所示的坐标系，弦的平衡位置为 x 轴，两端分别固定在 $x = 0$ 及 $x = l$ 处. 所谓横振动是指弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点沿着垂直于 x 轴的方向移动. 所谓微小指的是弦振动的幅度及弦上任意点切线的倾角都很小. 设 $u(x,t)$ 是弦上横坐标为 x 的点在时刻 t 时的位移.

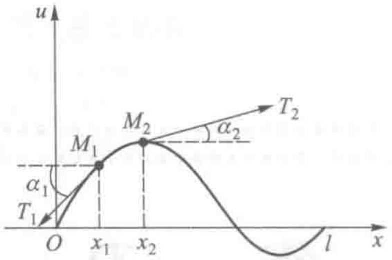


图 1.1

我们首先证明张力为常数, 为此在弦上任取一小段弧 $\widehat{M_1M_2}$, 它的长度假定为 Δs, 则

$$\Delta s=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x^2}\mathrm{d}x,$$

其中 $u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$. 由假定, 弦只作微小振动, u_x^2 与 1 相比可以忽略不计, 从而 $\Delta s\approx x_2-x_1$. 这样我们可以认为这段弦在振动过程中并未伸长, 因此由胡克 (Hooke) 定律知道, 弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变, 即张力与时间无关. 我们分别把点 M_1, M_2 处的张力记作 T_1 和 T_2, 由前所述知它们的方向分别是沿着弦在点 M_1, M_2 处的切线方向. 由假定弦只作横向振动, 因此张力在 x 轴方向分量的代数和为零, 即有

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=0,$$

这里的 α_1 和 α_2 是曲线 $u(x,t)$ 的切线与 x 轴所成之角. 对于微小振动, $\alpha_1\approx 0$, $\alpha_2\approx 0$, 所以 $\cos\alpha_1\approx 1$, $\cos\alpha_2\approx 1$, 于是上式可写成 $T_2=T_1$. 这就是说, 张力也不随位置而异. 综上所述知, 张力是常数, 以 T_0 记之.

现在来导出弦的横振动方程. 张力在 u 轴方向分量的代数和为

$$T_0\sin\alpha_2-T_0\sin\alpha_1=T_0(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1).$$

对于小振动, 有 $\sin\alpha_2\approx\tan\alpha_2=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2}$, $\sin\alpha_1\approx\tan\alpha_1=\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}$, 应用微分中值定理, 上式可化成

$$T_0\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}\right]=T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\xi}(x_2-x_1)\quad(x_1<\xi<x_2).$$

设弦的线密度为 ρ, 由于弦段 (x_1,x_2) 很小, 其上每点的加速度相差也不会太大, 因此可用其中任一点 η 处的加速度 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}$ 代替, 于是该小段弦的质量与

加速度的乘积为

$$\rho(x_2-x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_\eta \quad (x_1<\eta<x_2).$$

当弦不受外力作用时, 应用牛顿 (Newton) 第二定律, 得

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_\eta (x_2-x_1)=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_\xi (x_2-x_1). \tag{1.1}$$

消去 x_2-x_1, 并令 $x_2\to x_1$, 上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.2}$$

其中 $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$. 这个方程称为弦的**自由横振动方程**.

若还有外力作用到弦上, 其方向垂直于 x 轴, 设其力密度为 $F(x,t)$. 由于弦段 (x_1,x_2) 很小, 其上各点处的外力近似相等, 因此作用在该段上的外力近似地等于

$$F(\zeta,t)(x_2-x_1) \quad (x_1<\zeta<x_2).$$

这样一来, 方程 (1.1) 的右端还应添上这一项, 于是得平衡方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_\eta (x_2-x_1)=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_\xi (x_2-x_1)+F(\zeta,t)(x_2-x_1).$$

消去 x_2-x_1, 并令 $x_2\to x_1$, 则得弦的**强迫横振动方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{1.3}$$

其中 $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{\rho}$.

弦振动方程中只含有两个自变量 x 和 t, 其中 t 表示时间, x 表示位置. 由于它们描述的是弦的振动或波动现象, 因而又称它为**一维波动方程**. 类似地可导出**二维波动方程** (例如薄膜振动) 和**三维波动方程** (例如电磁波、声波的传播), 它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t). \tag{1.5}$$

注 1.1　均匀杆的纵振动问题: 有一均匀杆, 只要杆中任一小段有纵向位移或速度, 必定导致邻段的压缩或伸长, 这种伸缩传开去, 就有纵波沿着杆传播了. 以 $u(x,t)$ 表示杆上各点的纵向位移, 则杆的纵振动方程和弦的横振动方程一模一样. 不同的是 $a^2 = E/\rho$, E 为杨氏模量, ρ 为杆的线密度. 完全不同的物理过程中的规律, 用数学表达出来形式竟是一样的!

§1.1.2　定解条件

对于一个确定的物理过程, 仅建立表征该过程的物理量 u 所满足的方程还是不够的, 还要附加一定的条件, 这些条件应该恰恰足以说明系统的初始状态以及边界上的物理状况, 所提出的具体条件多了不行, 少了也不行.

先谈初始条件. 表征某过程 "初始" 时刻状态的条件称为初始条件. 对于弦振动问题来说, 初始条件指的是弦在 "初始" 时刻的位移和速度. 若以 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 分别表示弦的初位移和初速度, 则初始条件可以表达为

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} = \varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x). \end{cases} \tag{1.6}$$

再谈边界条件. 表征某过程的物理量在系统的边界上所满足的物理条件称为**边界条件**. 对于弦振动问题而言, 常见而又比较简单的边界条件有三种基本类型.

弦的一端 (例如 $x=0$) 的运动规律已知, 若以 $\mu_1(t)$ 表示其运动规律, 则边界条件可以表达为

$$u\big|_{x=0} = \mu_1(t). \tag{1.7}$$

若 $x=0$ 端被固定, 则相应的边界条件为

$$u\big|_{x=0} = 0.$$

像 (1.7) 这种类型的边界条件称为**第一类边界条件**.

若弦的一端 (例如 $x=0$) 在垂直于 x 轴的直线上自由滑动, 且不受到垂直方向的外力, 这种边界称为**自由边界**. 取 x 轴上区间 $[0,h]$ 所对应的一小段弦, 这段弦沿垂直方向所受的力仅有右端所受的张力沿垂直方向的分量, 即 $T_0 \dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=h}$, 根据牛顿第二定律

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=h} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=\xi}, \quad \xi \in (0,h).$$