工程力学专业规划教材

# 振动力学习题精解与MATLAB应用

丛书主编　赵　军
本书主编　苗同臣

中国建筑工业出版社

工程力学专业规划教材

# 振动力学习题精解与MATLAB应用

丛书主编　赵　军
本书主编　苗同臣

中国建筑工业出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

振动力学习题精解与 MATLAB 应用/苗同臣主编. —北京：中国建筑工业出版社，2018.12
工程力学专业规划教材
ISBN 978-7-112-22859-1

Ⅰ. ①振… Ⅱ. ①苗… Ⅲ. ①Matlab 软件-应用-工程振动学-高等学校-教材 Ⅳ. ①TB123-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 242779 号

本书是在作者多年来为力学、机械等专业本科生、研究生讲授《振动力学》和《结构动力学》等课程的基础上，经过多次修改后形成的《振动力学》课程学习指导教材。

全书收集整理了国内外具有代表性的振动力学习题 352 道，包括详细的解答、提示和讨论，有些题目给出了多种解法，便于比较和理解相关概念。为有效提高读者分析问题、解决问题以及数值分析和计算能力，列举了 20 个 MATLAB 在振动分析中的应用典型例题并给出了源代码。

本书可作为高等院校工科相关专业研究生和高年级本科生的振动理论和结构动力学教学参考书，也可供从事与振动和结构动力分析研究相关的工程技术人员参考。

责任编辑：尹珺祥　赵晓菲　朱晓瑜
责任校对：王　瑞

工程力学专业规划教材
**振动力学习题精解与 MATLAB 应用**
丛书主编　赵　军
本书主编　苗同臣
*
中国建筑工业出版社出版、发行（北京海淀三里河路 9 号）
各地新华书店、建筑书店经销
霸州市顺浩图文科技发展有限公司制版
北京建筑工业印刷厂印刷
*
开本：787×1092 毫米　1/16　印张：15　字数：374 千字
2019 年 4 月第一版　2019 年 4 月第一次印刷
定价：**42.00** 元
ISBN 978-7-112-22859-1
（32976）

# ■前　　言

振动问题广泛存在于日常生活和现代工程技术的各个领域。作为入门知识，振动力学是力学、机械、航空航天、动力与交通、电力、土木、水利等各专业工程技术人员从事结构动力分析和研究工作的重要理论基础之一，也是相关专业研究生和高年级本科生的必修专业课。

《振动力学》具有理论性强、涉及知识面广、与工程实际密切相关、应用范围广等特点，要真正学好这门课，不仅要认真理解掌握每一个基本概念，还必须做大量练习题。本书是在作者多年来讲授《振动力学》和《结构动力学》等课程的基础上，结合学生遇到的各种问题，经过多次反复实践和修改后形成的振动力学学习辅导教材。

本书内容包括两大部分，第 1～3 章是以经典的线性振动理论为主的习题分析与解答，包括单自由度系统 203 题，多自由度系统 83 题和连续系统 66 题；第 4 章是以数值分析和近似计算为主的 MATLAB 应用，共 20 个综合应用例题，均给出了原始代码，内容包括单自由度系统、多自由度系统、连续系统以及线性与非线性系统的近似计算方法等。最后以附录形式给出了振动分析中经常用到的数学和力学基础公式，以避免经常性地翻阅其他相关书籍。

本书由郑州大学“本科教学工程卓越计划教材建设”提供基金资助。由苗同臣担任主编，徐文涛、李静参与编写，苗同臣执笔和定稿。本书的插图绘制和初稿编辑工作由苗雨晴完成。

本书编纂过程中参阅了国内外许多专家和学者的论著和文献，引用了部分实例，恕不一一注明出处，仅列入书后的参考文献中，在此一并向有关作者致谢！

由于振动力学涉及的学科内容广泛，虽然作者尽了最大努力，多次修改，但因水平所限，书中的欠缺和错误在所难免，恳请读者不吝指正，提出宝贵意见。编者 Email：zdmw@zzu.edu.cn

# 目　　录

# 第 1 章　单自由度系统的振动

单自由度系统是最简单、最基本的振动系统，可以用一个独立坐标来确定系统在任意时刻的位置及其运动规律。单自由度振动系统的一些概念、特征和研究方法，是研究复杂振动系统的基础。本章的内容是黏性阻尼单自由度线性振动系统。

**重点：** 建立单自由度系统的运动方程，确定系统的固有频率，自由振动的响应及其特征，简谐激励和任意激励的强迫振动，共振的概念与特征。

**难点：** 建立复杂振动系统的运动方程，杜哈美积分，共振响应分析。

## 1.1　理论概述

### 1.1.1　建立运动方程

建立单自由度系统运动方程的方法主要有：动力学基本定理、达朗贝尔原理、计算静变形、确定等效质量（刚度、阻尼）等。

**重要提示：**

**(1) 建立运动方程时，一般应将坐标原点选在静平衡位置。**

**(2) 无论用什么方法建立振动方程，如果系统中的某重力引起弹簧静变形（或某个方向的静变形），当取静平衡位置为坐标原点和零势能点时，可以不考虑此重力和弹簧静变形（或某个方向的静变形）的影响，而取其他位置为坐标原点和零势能点时，必须考虑它们的影响；如果系统中的重力不引起弹簧静变形，或者在与弹簧静变形方向无关的其他广义坐标上，必须考虑重力的影响。详见后面的例题。**

### 1.1.2　等效质量、 等效刚度和等效阻尼

单自由度黏性阻尼系统运动方程的一般形式可写为

$$m_{\mathrm{eq}}\ddot{x}+c_{\mathrm{eq}}\dot{x}+k_{\mathrm{eq}}x=F(t) \tag{1-1}$$

这里：$m_{\mathrm{eq}}$、$k_{\mathrm{eq}}$和 $c_{\mathrm{eq}}$分别为系统的等效质量、等效刚度和等效阻尼，$x$ 为广义振动位移，$F(t)$ 为与广义位移对应的广义激振力。

通常省略“等效”下标“eq”，即振动方程写为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t) \tag{1-2}$$

**需要说明的是，对于强迫振动系统，由于选取广义坐标形式的不同，式（1-1）或式（1-2）中的 $F(t)$ 不一定是系统原始的干扰力。**

1. 等效质量、等效刚度、等效阻尼的定义

使系统在某广义位移方向上产生单位加速度 $\ddot{x}=1$（或单位位移 $x=1$、单位速度 $\dot{x}=1$），需要在此位移方向上施加的力，叫作系统在此位移方向的等效质量（或等效刚度、等效阻尼）。

对于复杂的动力学系统，可以将动能 $T$、势能 $V$ 和黏性阻尼的瑞利耗能函数 $E_{\mathrm{d}}$写为

$$T=\frac{1}{2}m_{\mathrm{eq}}\dot{x}^2,V=\frac{1}{2}k_{\mathrm{eq}}x^2,E_{\mathrm{d}}=\frac{1}{2}c_{\mathrm{eq}}\dot{x}^2 \tag{1-3}$$

对于自由振动系统，可以直接通过式（1-3）确定等效质量、等效刚度和等效阻尼，进而写出运动方程（1-1）。

2. 弹簧或阻尼的串并联

并联弹簧的等效刚度

$$k_{\mathrm{eq}}=\sum k_i \tag{1-4}$$

串联弹簧的等效刚度

$$\frac{1}{k_{\mathrm{eq}}}=\sum\frac{1}{k_i} \tag{1-5}$$

对于黏性阻尼（阻尼力与相对广义速度成正比），串并联的等效阻尼公式和弹簧类似，只需将式（1-4）和式（1-5）中的刚度系数 $k$ 变为阻尼系数 $c$ 即可。

3. 弹性元件质量的影响

弹性元件的质量和系统振动质量相比一般都很小，不必考虑。但当弹性元件的质量占系统质量的比重比较大时，就必须考虑这些弹性元件质量的影响，将其简化为相应的等效质量，叠加到系统的振动质量上，从而变成典型（标准）的单自由度振动系统。简化方法常用瑞利能量法，所依据的原则是：简化后系统的动能与原系统的动能相等，但不考虑重力势能的影响。如后面的【例 1-16】和【例 1-33】等。

### 1.1.3 平衡的稳定性

动力系统稳定平衡的条件：势能取极小值或等效刚度为正值。

### 1.1.4 无阻尼系统的自由振动

无阻尼系统的自由振动系统方程为

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{1-6}$$

1. 振动响应

$$x(t)=C_1\cos\omega_{\mathrm{n}}t+C_2\sin\omega_{\mathrm{n}}t \tag{1-7}$$

或

$$x(t)=X\sin(\omega_{\mathrm{n}}t+\varphi)=X\cos(\omega_{\mathrm{n}}t-\varphi') \tag{1-8}$$

利用系统的初始条件

$$t=0\text{ 时 }x=x_0,\dot{x}=\dot{x}_0 \tag{1-9}$$

可确定系数

$$C_1=x_0,C_2=\frac{\dot{x}_0}{\omega_{\mathrm{n}}} \tag{1-10}$$

$$X=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_{\mathrm{n}}}\right)^2},\varphi=\arctan\frac{\omega_{\mathrm{n}}x_0}{\dot{x}_0},\varphi'=\arctan\frac{\dot{x}_0}{\omega_{\mathrm{n}}x_0} \tag{1-11}$$

这里：$X$ 为系统振动的振幅；$\varphi$ 和 $\varphi'$ 为初相位，决定了系统运动的初始位置；$(\omega_{\mathrm{n}}t+\varphi)$ 和 $(\omega_{\mathrm{n}}t-\varphi')$ 为相位角，决定了系统在某瞬时的位置。

2. 固有频率 $\omega_{\mathrm{n}}$、振动周期 $T$ 和频率 $f$

$$\omega_{\mathrm{n}}^2=\frac{k}{m},T=\frac{2\pi}{\omega_{\mathrm{n}}},f=\frac{1}{T}=\frac{\omega_{\mathrm{n}}}{2\pi} \tag{1-12}$$

静位移法求固有频率

$$\omega_n=\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{1-13}$$

其中：g 为重力加速度，$\delta_{st}$为广义质量对应于广义坐标的静位移。

能量法求固有频率

$$T_{max}=V_{max},\dot{x}_{max}=\omega_n x_{max} \tag{1-14}$$

其中：$T$、$V$ 为系统的动能和势能，$x_{max}$和 $\dot{x}_{max}$分别为广义位移和广义速度的最大值。

### 1.1.5 黏性阻尼系统的自由振动

振动方程

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \tag{1-15}$$

定义阻尼比 $\zeta$ 和临界阻尼系数 $c_c$

$$\zeta=\frac{c}{2m\omega_n}=\frac{c}{2\sqrt{mk}},c_c=2m\omega_n=2\sqrt{mk} \tag{1-16}$$

1. 小阻尼解（$0<\zeta<1$）

$$x(t)=Xe^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+\varphi) \tag{1-17}$$

或写为

$$x(t)=Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\varphi') \tag{1-18}$$

$$x(t)=e^{-\zeta\omega_n t}(C_1\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t+C_2\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \tag{1-19}$$

利用初始条件（1-9）可确定系数

$$X=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2},\varphi=\arctan\frac{\omega_n x_0\sqrt{1-\zeta^2}}{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0},\varphi'=\arctan\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_n x_0\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-20}$$

$$C_1=x_0,C_2=\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega_n x_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-21}$$

黏性阻尼系统的振动频率和周期

$$\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2},T_d=\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{1-22}$$

衡量系统振幅衰减快慢的对数衰减率

$$\delta=\ln\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)=\omega_n\zeta T_d=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{X_0}{X_n}\right) \tag{1-23}$$

式中：$x_i$和 $x_{i+1}$为系统前后相邻两次的振动响应；$X_0$和 $X_n$为系统最初和经过 $n$ 次振动循环后的振幅。

2. 临界阻尼解（$\zeta=1$）

$$x(t)=(C_1+C_2t)e^{-\omega_n t} \tag{1-24}$$

利用初始条件（1-9）确定系数

$$C_1=x_0,C_2=\dot{x}_0+\omega_n x_0 \tag{1-25}$$

3. 过阻尼解（$\zeta>1$）

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}+C_2\mathrm{e}^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} \tag{1-26}$$

利用初始条件（1-9）确定系数

$$C_1=\frac{\dot{x}_0+(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n x_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}},C_2=\frac{-\dot{x}_0-(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n x_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \tag{1-27}$$

需要说明的是，临界阻尼和过阻尼情况系统的解不是振动形式，我们通常无需关心和讨论。

### 1.1.6 简谐激励下的强迫振动

这时方程（1-1）的激励为正弦激励 $F(t)=F_0\sin\omega t$ 或余弦激励 $F(t)=F_0\cos\omega t$。

1. 正弦激励或余弦激励的稳态响应

$$x(t)=X\sin(\omega t-\varphi)\text{或}\ x(t)=X\cos(\omega t-\varphi) \tag{1-28}$$

$$X=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}},\varphi=\arctan\frac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2} \tag{1-29}$$

其中：$\omega$ 为激振频率，$\gamma=\dfrac{\omega}{\omega_n}$ 为频率比。

2. 考虑初始条件后的总响应

由于阻尼的存在，初始条件和外激励引起的自由振动响应很快消失（瞬态振动），因此对于有阻尼振动系统只需要研究稳态响应式（1-28）。而对于无阻尼系统则需要同时考虑初始条件和外激励的响应。

无阻尼振动系统正弦激励下的总响应

$$x(t)=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t+\frac{F_0}{k(1-\gamma^2)}(\sin\omega t-\gamma\sin\omega_n t) \tag{1-30}$$

余弦激励下的总响应

$$x(t)=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t+\frac{F_0}{k(1-\gamma^2)}(\cos\omega t-\cos\omega_n t) \tag{1-31}$$

3. 复数解（稳态响应）

$$z^*=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}=\frac{F_0}{k}|H(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}=X\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)} \tag{1-32}$$

其中复频率响应函数

$$H(\omega)=\frac{1}{1-\gamma^2+2\mathrm{i}\zeta\gamma} \tag{1-33}$$

动力放大系数或振幅放大因子

$$\beta=\frac{X}{F_0/k}=|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}} \tag{1-34}$$

4. 共振响应

共振时 $\gamma\approx1$，由式（1-29）得到振幅和初相位为

$$X=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}}=\frac{F_0}{2k\zeta},\varphi=90^\circ \tag{1-35}$$

正弦激励下的共振响应

$$x(t)=\mathrm{e}^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t+x_0\cos\omega_d t\right)+$$

$$+\frac{F_0}{2k}\left(\frac{e^{-\zeta\omega t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t+\frac{e^{-\zeta\omega t}}{\zeta}\cos\omega_d t-\frac{1}{\zeta}\cos\omega t\right) \tag{1-36}$$

余弦激励下的共振响应

$$x(t)=e^{-\zeta\omega t}\left(\frac{\dot{x}_0+\zeta\omega x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t+x_0\cos\omega_d t\right)$$
$$-\frac{F_0e^{-\zeta\omega t}}{2k\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t+\frac{F_0}{2k\zeta}\sin\omega t \tag{1-37}$$

无阻尼系统正弦激励下的共振响应

$$x(t)=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t+\frac{F_0}{2k}[\sin\omega_n t-\omega_n t\cos\omega_n t] \tag{1-38}$$

无阻尼系统余弦激励下的共振响应

$$x(t)=\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t+x_0\cos\omega_n t+\frac{F_0}{2k}[\cos\omega_n t+\omega_n t\sin\omega_n t] \tag{1-39}$$

### 1.1.7 一般周期激励下的强迫振动

将周期为 $T$ 的干扰力 $F(t)$ 展开为傅里叶级数后得到振动方程

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{a_0}{2m}+\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\right) \tag{1-40}$$

或

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\frac{1}{m}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_ne^{in\omega t} \tag{1-41}$$

其中：$a_n$、$b_n$和$C_n$为傅里叶系数，由附录 A 中式（A-8）和式（A-10）确定。方程（1-40）和方程（1-41）的解分别为

$$x(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left\{\frac{a_n}{k}\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}-\alpha_n\right)+\frac{b_n}{k}\sin\left(\frac{2n\pi t}{T}-\alpha_n\right)\right\} \tag{1-42}$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{H(n\omega)}{k}C_ne^{in\omega t},H(n\omega)=\frac{1}{1-(n\gamma)^2+i2\zeta n\gamma} \tag{1-43}$$

其中

$$\gamma=\frac{2\pi}{T\omega_n},\beta_n=\frac{1}{\sqrt{(1-n^2\gamma^2)^2+(2n\zeta\gamma)^2}},\alpha_n=\arctan\frac{2n\zeta\gamma}{1-n^2\gamma^2} \tag{1-44}$$

### 1.1.8 任意激励下的强迫振动

1. 脉冲响应法（杜哈美积分）

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\int_0^t e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}F(\tau)\sin[\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}(t-\tau)]d\tau \tag{1-45}$$

无阻尼情况

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\tau)\sin[\omega_n(t-\tau)]d\tau \tag{1-46}$$

其中 $F(t)$ 为任意激振力。

考虑初始条件时系统的总响应只需把式（1-7）或式（1-8）与式（1-45）相加即可。

关于杜哈美积分和假设特解的方法得出的响应进行的对比和分析，参见【例1-73】。

2. 傅里叶变换法

$$X(\omega)=\frac{1}{k-m\omega^2+\mathrm{i}c\omega}F(\omega)=\frac{1}{k}H(\omega)F(\omega) \tag{1-47}$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{k}H(\omega)F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\omega)}{k-m\omega^2+\mathrm{i}c\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{1-48}$$

求解步骤：

(1) 对激励 $F(t)$ 求傅里叶变换 $F(\omega)$；

(2) 求频域响应 $X(\omega)$；

(3) 求 $X(\omega)$ 的逆变换得 $x(t)$。

3. 拉普拉斯变换法

$$X(s)=G(s)F(s)+G(s)[m\dot{x}(0)+(ms+c)x(0)] \tag{1-49}$$

$$x(t)=L^{-1}[G(s)F(s)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\sigma-\mathrm{i}\infty}^{\sigma+\mathrm{i}\infty}G(s)F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \tag{1-50}$$

系统的传递函数

$$G(s)=\frac{1}{ms^2+cs+k}=\frac{1}{m(s^2+2\zeta\omega_0 s+k)} \tag{1-51}$$

求解步骤：

(1) 对激励 $F(t)$ 求拉普拉斯变换 $F(s)$；

(2) 求系统响应的拉普拉斯变换 $X(s)$；

(3) 求 $X(s)$ 的拉普拉斯逆变换得 $x(t)$。

### 1.1.9 基础运动引起的强迫振动

设基础的位移为 $y$，则振动系统的运动方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ky+c\dot{y}\text{或}m\ddot{x}_1+c\dot{x}_1+kx_1=-m\ddot{y} \tag{1-52}$$

其中：相对位移 $x_1=x-y$。

1. 基础运动响应分析

若基础做简谐运动 $y=Y\sin(\omega t)$，则

$$x(t)=X\sin(\omega t-\varphi+\alpha) \tag{1-53}$$

$$X=\frac{Y\sqrt{1+(2\zeta\gamma)^2}}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}},\varphi=\arctan\frac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2},\alpha=\arctan(2\zeta\gamma) \tag{1-54}$$

$$x_1(t)=X_1\sin(\omega t-\varphi) \tag{1-55}$$

$$X_1=\frac{Y\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}},\varphi=\arctan\frac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2} \tag{1-56}$$

系统振源传递到基础（支撑）上的力为

$$F=kx+c\dot{x}=kX\sin(\omega t-\varphi)+c\omega X\cos(\omega t-\varphi) \tag{1-57}$$

其最大值为

$$F_{\mathrm{T}}=\sqrt{(kX)^2+(c\omega X)^2}=kX\sqrt{1+(2\zeta\gamma)^2} \tag{1-58}$$

式中 $X$ 为基础运动引起的强迫振动振幅。

2. 隔振

主动隔振系数 $\eta_F$（力传递系数、力传递率）和被动隔振系数 $\eta_r$（位移传递系数、位

移传递率）：

$$\eta_F=\frac{F_T}{F_0}=\frac{kX\sqrt{1+(2\zeta\gamma)^2}}{F_0}=\eta_r=\frac{X}{Y}=\frac{\sqrt{1+(2\zeta\gamma)^2}}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}} \tag{1-59}$$

式中 $F_0$ 为简谐激振力的幅值。

隔振器只有当激振频率大于系统固有频率的 $\sqrt{2}$ 倍即 $\gamma>\sqrt{2}$ 时，才能实现振动的隔离，则对于无阻尼隔振器，式（1-59）变为

$$\eta_F=\eta_r=\frac{1}{\gamma^2-1} \tag{1-60}$$

3. 测振仪

测振仪的原理就是式（1-52）～式（1-56），$Y$ 为被测振幅，$X_1$ 为测振仪读数。

位移计的测量误差为

$$\left|\frac{Y-X_1}{Y}\right|=1-\frac{\gamma^2}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}} \tag{1-61}$$

加速度计的测量误差为

$$\left|\frac{Y\gamma^2-X_1}{Y\gamma^2}\right|=1-\frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2+(2\zeta\gamma)^2}} \tag{1-62}$$

### 1.1.10 阻尼力的能量消耗

设振动系统的阻尼力为 $F_R$，则在一个周期内所消耗的能量为

$$E_R=\int_0^T F_R\dot{x}\,dt \tag{1-63}$$

### 1.1.11 简谐振动的合成

1. 两个同方向同频率简谐振动的合成

设有两个同频率的简谐振动 $x_1=X_1\cos(\omega t+\varphi_1)$ 和 $x_2=X_2\cos(\omega t+\varphi_2)$，合振动为

$$x=x_1+x_2=X\cos(\omega t+\varphi) \tag{1-64}$$

其中

$$X=\sqrt{X_1^2+X_2^2+2X_1X_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$\varphi=\arctan\frac{X_1\sin\varphi_1+X_2\sin\varphi_2}{X_1\cos\varphi_1+X_2\cos\varphi_2} \tag{1-65}$$

2. 两个同方向不同频率简谐振动的合成

设有两个同方向不同频率的简谐振动 $x_1=X_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$ 和 $x_2=X_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$，合振动的振幅为

$$X=\sqrt{X_1^2+X_2^2+2X_1X_2\cos[(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)]} \tag{1-66}$$

需要说明的是，两个不同频率简谐振动的合振动不再是简谐振动，而是一种复杂运动。

## 1.2 例题精解

**说明：**以下所有例题中，若没有特别说明，均取静平衡位置为坐标原点和重力及弹簧的零势能点。

### 1.2.1 等效质量、等效刚度和等效阻尼

**【例 1-1】** 图示系统，在水平面上纯滚动的均质球质量为 $m_s$，半径为 $r_s$，直角 $L$ 形杆

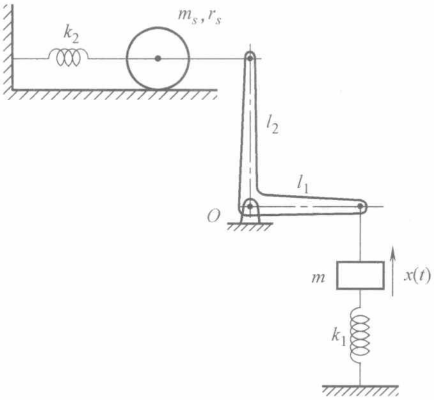
绕 $O$ 的转动惯量为 $J_O$。求图示坐标 $x$ 下的等效质量。

**解：** 利用能量法。系统的动能

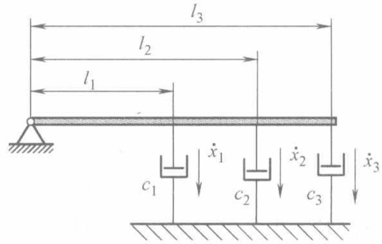
$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_O\left(\frac{\dot{x}}{l_1}\right)^2+\frac{1}{2}m_s\left(\frac{l_2}{l_1}\dot{x}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{2}{5}m_s r_s^2\left(\frac{l_2}{r_s l_1}\dot{x}\right)^2=\frac{1}{2}\left[m+\frac{J_O}{l_1^2}+\frac{7}{5}m_s\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2\right]\dot{x}^2$$

由式（1-3）知等效质量

$$m_{\mathrm{eq}}=m+\frac{J_O}{l_1^2}+\frac{7}{5}m_s\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$$




例 1-1 图




例 1-2 图

**【例 1-2】** 如图所示，求 3 个阻尼器与刚性杆相连时 $c_1$ 处的等效阻尼。

**解：** 方法 1　利用黏性阻尼的耗能函数。由式（1-3）得

$$E_{\mathrm{d}}=\frac{1}{2}(c_1\dot{x}_1^2+c_2\dot{x}_2^2+c_3\dot{x}_3^2)=\frac{1}{2}\left[c_1+c_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2+c_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\right]\dot{x}_1^2$$

则等效阻尼

$$c_{\mathrm{eq}}=c_1+c_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2+c_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2$$

方法 2　利用定轴转动微分方程。

$$J\frac{\ddot{x}_1}{l_1}=-c_1\dot{x}_1l_1+c_2\dot{x}_2l_2+c_3\dot{x}_3l_3$$

即

$$\frac{J}{l_1^2}\ddot{x}_1+\left[c_1+c_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2+c_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2\right]\dot{x}_1=0$$

则

$$c_{\mathrm{eq}}=c_1+c_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2+c_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2$$

方法 3　利用等效阻尼的定义。

设 $c_1$ 处产生向上的速度 1，则需要施加的力为 $c_{\mathrm{eq}}$，对铰支点列力矩方程（动平衡、达朗伯原理）得

$$c_{\mathrm{eq}}\cdot l_1-c_1\cdot 1\cdot l_1-c_2\cdot\frac{l_2}{l_1}\cdot l_2-c_3\cdot\frac{l_3}{l_1}\cdot l_3=0$$

即可求出 $c_{eq}$。

【例 1-3】 如图所示为一摇杆机构，摇杆质量为 $m_A$，相对于支座 $A$ 的转动惯量为 $J_A$，求系统相对于坐标 $x$ 的等效质量 $m_{eq}$ 和等效弹性系数 $k_{eq}$。

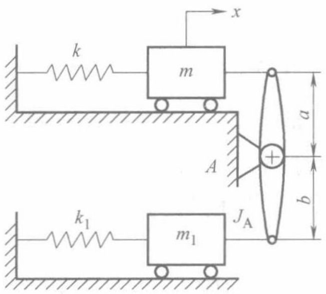
**解**：用能量法。

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}m_1\left(\frac{b}{a}\dot{x}\right)^2+\frac{1}{2}J_A\left(\frac{\dot{x}}{a}\right)^2=\frac{1}{2}\left(m+m_1\frac{b^2}{a^2}+\frac{J_A}{a^2}\right)\dot{x}^2$$

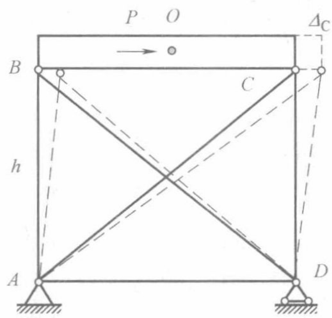
$$V=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}k_1\left(\frac{bx}{a}\right)^2=\frac{1}{2}\left(k+k_1\frac{b^2}{a^2}\right)x^2$$

则

$$m_{eq}=m+m_1\frac{b^2}{a^2}+\frac{J_A}{a^2},k_{eq}=k+k_1\frac{b^2}{a^2}$$




例 1-3 图




例 1-4 图

【例 1-4】 如图所示高为 $h$ 的框架结构。斜杆 $AC$ 和 $BD$ 的截面积均为 $A$，弹性模量为 $E$。除斜杆外其余均为刚性杆。试求 $O$ 点水平方向的刚度。

**解**：利用计算静变形的方法。

只需在 $O$ 点加一水平力 $P$，用结构力学的方法求出 $O$ 点的水平位移（即 $C$ 点的水平位移）$\Delta_O=\Delta_C=\dfrac{\sqrt{2}Ph}{2EA}$（参阅结构力学教材），则刚度为

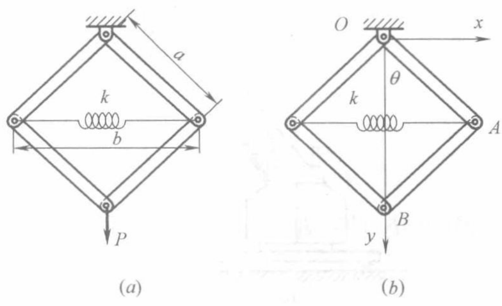
$$k=\frac{P}{\Delta_O}=\frac{\sqrt{2}EA}{h}$$

注：同一结构不同方向的刚度是不一样的。确定刚度的方法通常就是利用材料力学或结构力学计算静变形的过程。

【例 1-5】 长度为 $a$ 的 4 根完全相同的刚性杆，与一刚度为 $k$ 的弹簧相连，在结构下端作用一载荷 $P$，如图（$a$）所示，忽略杆的质量和铰接处的摩擦，计算系统的等效刚度 $k_{eq}$。

**解**：首先计算 $A$，$B$ 两点虚位移之间的关系，如图（$b$）。

$x_A=a\sin\theta$，$y_B=2a\cos\theta$，则 $\delta y_B=-2\delta x_A\tan\theta$。




例 1-5 图

方法 1　根据等效刚度系数定义求。

根据定义，在 $B$ 点产生单位位移 1，需施加的力为 $k_{eq}$。利用平衡关系求得弹簧受力大小为 $k_{eq}\tan\theta$；再利用几何关系（虚位移关系）得

$$k_{eq}\tan\theta=|k\cdot 2\delta x_A|=\frac{k\delta y_B}{\tan\theta}$$

则

$$k_{eq}=\frac{k\delta y_B}{\tan^2\theta}=\frac{k\cdot 1}{\tan^2\theta}=\frac{b^2}{4a^2-b^2}k$$

方法 2　通过计算静位移。

和方法 1 类似，由 $P$ 引起的弹簧力为 $P\tan\theta$，则弹簧变形为 $\frac{P\tan\theta}{k}$，对应 $B$ 点的静位移为 $\delta_{st}=\frac{P\tan\theta}{k}\tan\theta$，令 $\delta_{st}=1$ 得

$$k_{eq}=P|_{\delta_{st}=1}=\frac{k\cdot 1}{\tan^2\theta}=\frac{b^2}{4a^2-b^2}k$$

**【例 1-6】**　图（$a$）是一起重机的示意图。吊臂 $AB$ 是等截面的钢杆，长度 10 m，横截面积为 2500 $mm^2$。起吊重物 $W$ 处于静止状态，钢拉索 $CDEBF$ 的横截面积为 100 $mm^2$。求该系统在竖直方向的等效弹簧刚度。已知钢材的弹性模量为 207 GPa。

**解：**利用实际系统与等效系统的势能相等。

起重机的底座可以看成是刚性的，并认为吊臂和拉索分别固定在 $A$ 点和 $F$ 点。忽略 $CDEB$ 段钢索的影响，认为重物 $W$ 通过点 $B$ 作用于系统，如图（$b$）所示。

由几何关系可求得 $l_1=12.31$ m，$\theta=35.07°$。则吊臂和拉索的刚度

$$k_1=\frac{EA_1}{l_1}=1.682\times10^6\ \mathrm{N/m},k_2=\frac{EA_2}{l_2}=5.175\times10^7\ \mathrm{N/m}$$

与点 $B$ 在竖直方向的位移 $x$ 对应，弹簧 2（吊臂）和弹簧 1（拉索）产生的变形分别为

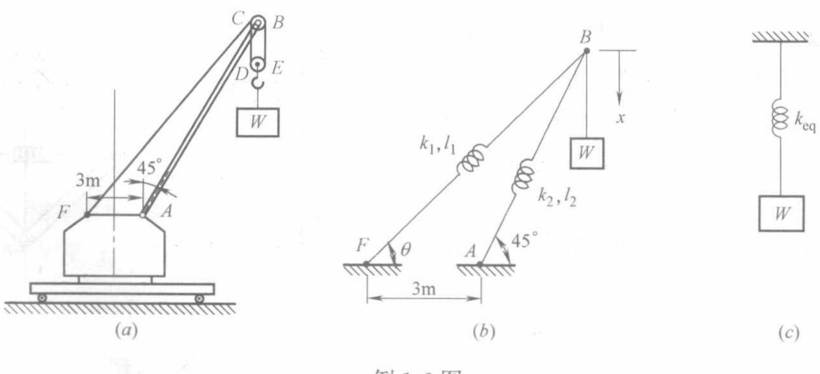
$$x_2=x\cos45°,x_1=x\cos(90°-\theta)$$

则两个弹簧储存的势能和等效势能为

$$V=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2,V_{eq}=\frac{1}{2}k_{eq}x^2$$

令其相等得到系统的等效刚度为

$$k_{eq}=26.430\times10^6\ \mathrm{N/m}$$




例 1-6 图