财智睿读

王继强 ◎ 主编

数学模型、算法与程序

Mathematical Models with Algorithms and Programs

中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

数学模型、算法与程序

Mathematical Models with Algorithms and Programs

王继强 主编

中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

数学模型、算法与程序/王继强主编．—北京：经济科学出版社，2019.4
ISBN 978-7-5218-0519-2

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①数学模型-算法-教材　Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 084804 号

责任编辑：李一心
责任校对：王苗苗
版式设计：齐　杰
责任印制：李　鹏

数学模型、算法与程序
王继强　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：010-88191217　发行部电话：010-88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京密兴印刷有限公司印装
787×1092　16 开　19.25 印张　350000 字
2019 年 6 月第 1 版　2019 年 6 月第 1 次印刷
印数：0001—1000 册
ISBN 978-7-5218-0519-2　定价：48.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010-88191510）

序

“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学。”华罗庚先生一语道尽数学在人类社会发展进程中的重大推动作用。毋庸置疑，“数学建模”是这一推动作用的重要因素之一。

2007 年，我校开始组织师生参加全国大学生数学建模竞赛。翌年，数学建模课程进入我校本科生课堂。此后，数学建模课程教学持续不辍，数学建模竞赛蓬勃兴盛，至今已取得了全国大学生数学建模竞赛国家一/二等奖、全国研究生数学建模竞赛国家一/二/三等奖、美国数学建模竞赛 M/H/S 奖等大批高等级奖项。本书正是我们十余年来参与数学建模教学与竞赛指导的经验总结。

全书共分九章，分别介绍了建模概论、初等模型、代数模型、数学规划模型、数值计算模型、图论模型、微分方程模型、概论统计模型及其他模型。每章末均提供有一定数量的习题，书末附有习题的简要解答，可为检验学习效果之用。附录中对 MATLAB、LINGO 两款软件做了简介。

全书坚持模型、算法、程序三位一体，可谓模型丰富，算法多样，程序可行，实用性强。本书既可作为国内高等院校各专业数学建模、数学软件、数学实验等课程的教材，也可作为本科生与研究生自学数学建模的参考书。

本书是山东财经大学教学改革立项项目“数学建模与实验实践教学改革研究”、山东财经大学首批通识选修核心课程“数学建模与数学软件”的研究成果之一。

本书的编写与出版得到了山东财经大学教务处、数学与数量经济学院、中国财经出版传媒集团经济科学出版社的大力支持，也参考了国内外众多有关数学建模的文献资料，我们在此一并表示感谢！

本书由我校数学建模课程教学与竞赛指导教师团队编写，其中王继强任主编，刘伟、任敏、姜计荣、滕聪、林

英、宋浩、周锋波、蔺厚元、苏园参与了编写工作，全书由安起光、刘太琳审定。我们衷心期望拙作能为国内财经类院校的数学建模系列课程的教学研究和教学改革工作略尽绵薄之力。

限于编者学术水平，书中定有谬误之处，恳请读者们不吝赐教！

王继强

2019 年 3 月

目　录

第1章 建模概论

我国著名数学大师华罗庚先生曾经在《大哉数学之为用》一文中这样评价数学："宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学."由此，数学在人类进步和社会发展进程中的作用可谓不言自明.

数学为什么会如此有用呢？越来越多学者认为，"数学建模"是其中一个很重要的原因.

1.1 数学模型和数学建模

1. 什么是数学建模

让我们从一个有趣而经典的例子谈起.

引例：（鸡兔同笼）我国古代数学名著《孙子算经》中记载有如下问题：

"今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足.问鸡兔各几何?"

这就是流传久远的"鸡兔同笼"问题.针对此一问题，人们提出了许多解决方法，此处不一一详细介绍，仅给出比较常用的"方程法".

若设兔的只数为 x，则鸡的只数为 $35-x$. 于是，有方程

$$4x+2(35-x)=94$$

显然，这是一个一元一次方程.解之，得 $x=12$.

因此，兔有 12 只，鸡有 $35-12=23$ 只.

如此，鸡兔同笼问题得到了圆满解决.

在上述问题解决过程中，我们用数学上的一元一次方程"$4x+2(35-x)=94$"来描述日常生活中兔、鸡之间的数量关系，"$4x+2(35-x)=94$"也就成了"数学模型"，而建立这一数学模型的过程被称为"数学建模".一句话，数学模型是对实际问题的数学描述，而数学建模则是建立数学模型的过程.

严格说来，数学模型（mathematical model）是对于现实世界的一个特定对象，为了某一特殊目的，根据其特有的内在规律和外部条

件，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构．数学建模（mathematical modeling）是对研究对象进行抽象、概括而形成数学模型，并求解、应用的全部过程．

其实，数学建模的思想由来已久，比如古希腊学者阿基米德（Archimedes）发现浮力定律、英国科学巨匠牛顿（Isaac Newton）创立三大运动定律、“现代遗传学之父”奥地利生物学家孟德尔（Gregor Johann Mendel）提出遗传学定律、英国人口学家马尔萨斯（Thomas Robert Malthus）创立人口理论等，无不体现了数学模型的奇思妙想．

进入 21 世纪以来，随着以计算机为代表的现代科技的迅猛发展，数学建模的发展越来越多地依赖于软件技术，而其中尤甚者就是以 MATLAB、LINGO、1stOpt、SAS 等为代表的一大批高性能计算软件．有了这些软件，人们就可以从繁复的数学计算中解脱出来，而只需关注于数学模型的建立，这大大有助于数学建模本身的发展和进步．

数学建模作为沟通数学与实际问题之间的桥梁，它通过对实际问题的机理分析，在合理的假设条件下，利用恰当的数学工具建立起描述客观事物本质特征的数学模型，并借助现代计算技术实现实际问题的成功解决．在数学建模过程中，绝大多数问题没有现成的答案，也没有唯一的解决方法，要靠自己充分发挥创造性去解决．这就要求学生必须有创造思维和创新意识，利用自己已有或现学的知识，选择合适的思路和方法，巧妙而有效地解决问题．很显然，这一点对于提高学生的数学素养和应用数学知识解决实际问题的能力，提高学生应用计算机和计算软件的能力，提高学生撰写科技论文的能力，培养学生的团结协作精神，培养创新型和应用型人才都具有重要意义．

2. 数学建模过程

一个完整的数学建模过程通常包括模型准备、模型假设、模型建立、模型求解、模型评价（分析与检验）、模型应用等．其中，合理的假设、正确的模型、科学的求解、客观的分析对于问题解决是尤为关键的．

3. 数学模型的种类

数学模型种类繁多，主要可分为如下类型：

（1）按模型的应用领域（或所属学科）分，有人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、医学模型、经济学模型、社会学模型等．

（2）按建模的数学方法（或所属数学分支）分，有初等模型、代数模型、优化模型、微分方程模型、图论模型、概率模型、统计模型等．

（3）按模型的表现特征分，有确定性模型和随机性模型、静态模型和动态模型、线性模型和非线性模型、连续模型和离散模型等．

（4）按建模目的分，有描述模型、预报模型、决策模型、控制

模型等.

（5）按对模型的了解程度分，有白箱模型、灰箱模型、黑箱模型.

1.2 数学建模教学和竞赛

大约 20 世纪六七十年代，数学建模作为一门课程开始进入一些西方国家的大学. 80 年代初，我国清华、北大、北理工等若干所大学也将数学建模引入课堂. 经过三十多年的发展，我国很多大学乃至中小学都开设了各种形式的数学建模课程. “学建模，用建模”已在广大学子中蔚然成风.

伴随着数学建模课程不断发展的势头，数学建模竞赛也逐渐走进了万千国人的视野. 肇始于 1985 年的美国数学建模竞赛（MCM）、发端于 1992 年的中国大学生数学建模竞赛（CUMCM）、起源于 2003 年的中国研究生数学建模竞赛（NPMCM）每年都获得我国数万师生的热烈响应.

表 1. 2. 1 列出了历年 CUMCM 赛题的题目.

表 1. 2. 1　　CUMCM 赛题

1992 年	A	施肥效果分析问题
	B	实验数据分解问题
1993 年	A	非线性交调的频率设计问题
	B	足球排名次问题
1994 年	A	逢山开路问题
	B	锁具装箱问题
1995 年	A	飞行管理问题
	B	天车与冶炼炉的作业调度问题
1996 年	A	最优捕鱼策略问题
	B	节水洗衣机问题
1997 年	A	零件参数设计问题
	B	截断切割问题
1998 年	A	投资的收益和风险问题
	B	灾情巡视路线问题
1999 年	A	自动化车床管理问题
	B	钻井布局问题

续表

2000 年	A	DNA 序列分类问题
	B	钢管订购和运输问题
2001 年	A	血管的三维重建问题
	B	公交车调度问题
2002 年	A	车灯线光源的优化设计问题
	B	彩票中的数学问题
2003 年	A	SARS 的传播问题
	B	露天矿生产的车辆安排问题
2004 年	A	奥运会临时超市网点设计问题
	B	电力市场的输电阻塞管理问题
2005 年	A	长江水质的评价和预测问题
	B	DVD 在线租赁问题
2006 年	A	出版社的资源配置
	B	艾滋病疗法的评价及疗效的预测
2007 年	A	中国人口增长预测
	B	乘公交　看奥运
2008 年	A	数码相机定位
	B	高等教育学费标准探讨
2009 年	A	制动器试验台的控制方法分析
	B	眼科病床的合理安排
2010 年	A	储油罐的变位识别与罐容表标定
	B	2010 年上海世博会影响力的定量评估
2011 年	A	城市表层土壤重金属污染分析
	B	交巡警服务平台的设置与调度
2012 年	A	葡萄酒的评价
	B	太阳能小屋的设计
2013 年	A	车道被占用对城市道路通行能力的影响
	B	碎纸片的拼接复原
2014 年	A	“嫦娥三号”软着陆轨道设计与控制策略
	B	创意平板折叠桌
2015 年	A	太阳影子定位
	B	“互联网＋”时代的出租车资源配置
2016 年	A	系泊系统的设计
	B	小区开放对道路通行的影响

续表

2017 年	A	CT 系统参数标定及成像
	B	拍照赚钱的任务定价
2018 年	A	高温作业专用服装设计
	B	智能 RGV 的动态调度策略

由此可见，所有赛题都源于工程技术、经济管理、社会生活等领域中出现的实际问题，并呈现出实用性、即时性、综合性、规模性、创新性等特点．这就要求参赛学生要具备扎实的数学基础、过硬的计算机使用能力和熟练的文字处理能力．竞技性和挑战性吸引着一批批学子投入竞赛中，也使得竞赛本身长盛不衰．

许多参赛学生纷纷反映“一次参赛，终身受益”．有志于参赛的同学们，不妨通过本教程的学习，在将来竞赛中奋力一搏．

本章习题

1. 举例说明数学建模的必要性．

2. （引葭赴岸）今有池一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐．问：水深、葭长各几何？

3. 一个农民要在一块土地上作出农作物的种植规划．请问他应如何解决这一问题，包括需要哪些数据，如何选择变量，确立什么目标，建立什么模型等？

4. 欲测定一批 LED 灯管的寿命．请通过数学建模给出可行的测定方案．

第2章 初等模型

初等数学与高等数学相对，通常是指小学和中学阶段的数学，包括算术、初等代数、初等几何（平面几何、立体几何、平面解析几何）、三角函数等内容．利用初等数学的方法建立的数学模型称为初等模型，它呈现出静态、线性、确定性等特点．按建模方法分，初等模型有函数模型、方程模型、不等式模型、数列模型、几何模型等．

初等模型虽然较为简单，但作为复杂的数学模型的入门阶段，仍值得初学者一探究竟．

本章通过5个例子来介绍初等模型的建模思想和方法．

2.1 门当户对

“门当户对”的择偶观念曾一度被视为落后的封建思想而受到大多数人的批判；然而，也有不少人坚持认为相较于“门不当户不对”，“门当户对”更能带来美满的婚姻．试解释后者观点的合理性．

模型假设：

（1）为便于定量分析，用男女双方的经济收入作为衡量其婚姻美满程度的数量指标．

（2）设男女双方的婚前收入（如工资）分别为X，Y，因婚姻而带来的共同收入为M. 其中M有可能为正数，如买房时父母给的赞助费、婚礼上收取的礼金等，也有可能为负数，如送给父母的赡养费、年节时给晚辈的压岁钱等，当然也有可能为0.

（3）根据性别平等原则，婚后男女双方同等占有所有经济收入．

模型建立与求解：

由模型假设知，男女双方的婚后收入都分别为

$$m=\frac{X+Y+M}{2}$$

下面分“门不当户不对”和“门当户对”两种情况讨论．

（1）若男女双方门不当户不对，则 X 与 Y 相差较大，不妨设 $X=3$，$Y=11$，则 $m=\dfrac{3+11+M}{2}=7+\dfrac{M}{2}$.

显然，只要 $M\geqslant 0$，就有 $m\geqslant 7>3$，即男方必定对婚姻很满意，故只需考虑女方对婚姻是否满意即可.

当 $M=8$ 时，$m=11$，则女方会对婚姻不积极.

当 $M<8$ 时，$m<11$，则女方会对婚姻不满意.

当 $M>8$ 时，$m>11$，则女方会对婚姻较满意.

综上，$M>8$（男女双方婚前收入之差）时，才能使男女双方都对婚姻满意.

一般的，若 $X<Y$，则由 $m=\dfrac{X+Y+M}{2}>Y$ 知，应有 $M>Y-X$，才能使婚姻美满；若 $X>Y$，则由 $m=\dfrac{X+Y+M}{2}>X$ 知，应有 $M>X-Y$，才能使婚姻美满.

（2）若男女双方门当户对，则 X 与 Y 相差无几，不妨设 $X=Y=11$，则 $m=\dfrac{11+11+M}{2}=11+\dfrac{M}{2}$.

显然，只需 $M>0$，就有 $m>11$，即男女双方都对婚姻满意.

一般的，若 $X=Y$，则由 $m=\dfrac{X+Y+M}{2}>X=Y$ 知，只需 $M>0$，即能使婚姻美满.

模型分析：

模型表明，门当户对的男女双方更容易从婚姻中获得满足，曾经被视为过时与老套的“门当户对”观念自有其存在的合理性.

在模型中，“M”是一个很有意思的常量. 正是有了这个“M”，人们才前仆后继、心甘情愿地跳进婚姻的“围城”.

诚然，模型假设中以经济收入作为衡量婚姻美满程度的唯一数量指标，有失偏颇，值得改进.

2.2　高跟鞋的高度

“爱美之心，人皆有之.”女士们尤其如此. 高跟鞋是不少女士的钟爱之物. 有不少女士认为，穿的高跟鞋越高，自己就越美. 然而，事实未必尽然. 那么，女士们应该穿鞋跟多高的高跟鞋，才看起来最美呢?

知识准备：

黄金分割是数学和美学中一个十分有趣的概念，史载它最早是由

古希腊数学家毕达哥拉斯（Pythagoras）提出的．

如图 2.2.1 所示，若将线段 AB 分成较长部分 AC 和较短部分 CB 两部分，使 AC 为 CB 与 AB 的比例中项，则称 $\frac{AC}{AB}$ 为黄金分割比（golden section ratio），C 为黄金分割点（golden section point）.

图 2.2.1　黄金分割

由黄金分割的定义，有 $\frac{CB}{AC}=\frac{AC}{AB}$，即 $\frac{AB-AC}{AC}=\frac{AC}{AB}$.

解之，得 $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，即 $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$.

在数学和美学上，按比例 0.618 处理的几何图形更匀称更协调更美观，故称之为黄金分割比．此外，黄金分割的概念在绘画、雕塑、音乐、建筑、管理、工程设计等领域的应用也极为广泛．

模型假设：

（1）人体躯干以肚脐为分界点．

（2）从美学角度看，肚脐是人体的黄金分割点，即下肢长与身高之比为 0.618 时，人体的美感最佳．

（3）下肢长 l，身高 t，鞋跟高 d.

模型建立与求解：

由模型假设，有 $\frac{l+d}{t+d}=0.618$，即

$$d=\frac{0.618t-l}{0.382}$$

据此可算出任何一位女士应该穿的高跟鞋的高度．

例如，身高 $t=168$ 厘米、下肢长 $l=102$ 厘米的女士应穿高跟鞋的高度为

$$d=\frac{0.618t-l}{0.382}=\frac{0.618\times 168-102}{0.382}\approx 4.7749 \text{ 厘米}$$

再如，身高 $t=160$ 厘米、下肢长 $l=96$ 厘米的女士应穿高跟鞋的高度为

$$d=\frac{0.618t-l}{0.382}=\frac{0.618\times 160-96}{0.382}\approx 7.539 \text{ 厘米}$$

模型分析：

模型表明，女士们爱穿高跟鞋是有科学根据的！不过，处于发育期中的少女们还是不穿高跟鞋为好，以免影响身高的正常增长．何况，穿高跟鞋还要承受体重给脚部带来的不适感．

当然，如果女士们的下肢长与身高之比天生就是黄金分割比，那当然就不用穿高跟鞋了！

2.3　平分蛋糕

在日常生活中，人们在结婚、过生日、聚会、公司宴会等某些庆典场合经常切蛋糕，以示庆贺．那么，一个有趣的问题是，能否切一刀就将不规则的蛋糕分为面积相等的两部分呢？

知识准备：

零点定理是闭区间上连续函数的一个重要特征：

若函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一点 $c\in(a, b)$，使 $f(c)=0$.

零点定理虽然常常被放在大学微积分课程中讲述，但其正确性即便放在初等数学中也是显而易见的，而且在现行高中数学教材中也早以“零点的存在性定理”的面目出现了．

模型假设：

蛋糕的上、下表面均为平面区域，且面积相等．

模型建立：

由模型假设知，平分蛋糕问题等价于如下问题：设 C 为坐标平面 xOy 上一条封闭曲线，能否找到一条直线 l 将 C 的内部区域分为面积相等的两部分。[见图 2.3.1 (a)]

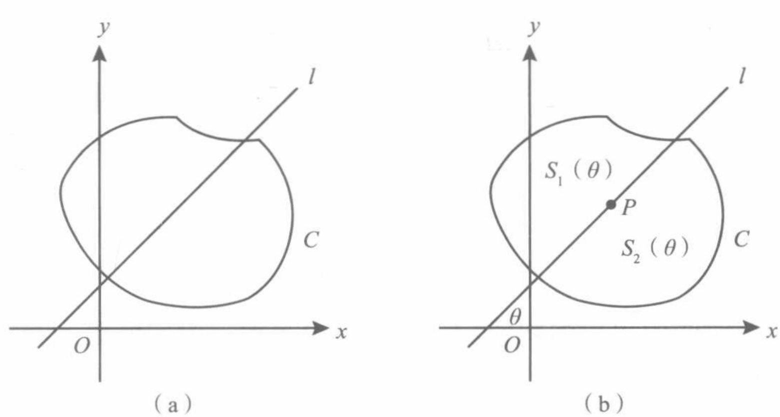

图 2.3.1　平分封闭曲线

模型求解：

如图 2.3.1 (b) 所示，设 P 为曲线 C 内部一点，l 为过 P 的一条直线．当 l 绕点 P 逆时针旋转时，在不同时刻的位置用其倾角 θ