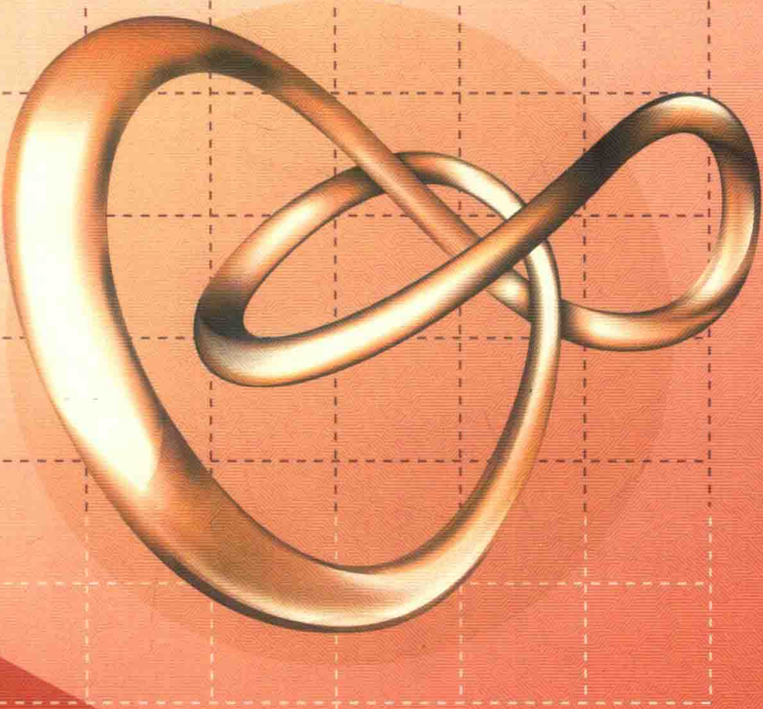
"十三五"江苏省高等学校重点教材

高等数学

（上册）

Advanced Mathematics

严亚强 编



高等教育出版社

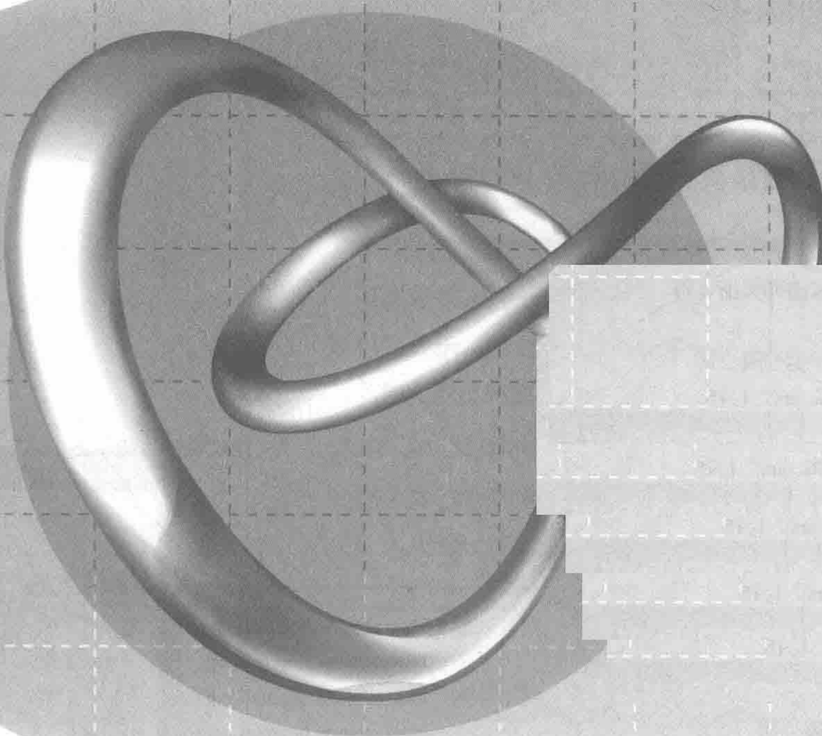
“十三五”江苏省高等学校重点教材

高等数学

（上册）

Advanced Mathematics

严亚强 编



社·北京

内容提要

本书是作者在苏州大学使用多年的高等数学讲义的基础上修改编写而成，力图通过浅显易懂的语言和简单的方式揭示深刻的数学思想与方法。全书分为上、下两册。上册内容包括函数与极限、导数与微分、中值定理和导数的应用、不定积分、定积分及其应用，下册内容包括向量与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和常微分方程。本书配套建设了数字课程，包含拓展阅读、自测题、思考题解答和部分习题解答提示等资源。

本书可作为高等学校非数学类专业的高等数学教材，也可供社会学习者学习高等数学或考研参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册 / 严亚强编．-- 北京：高等教育出版社，2019.5

ISBN 978-7-04-050404-0

Ⅰ．①高… Ⅱ．①严… Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 182372 号

策划编辑 李冬莉　责任编辑 李冬莉　封面设计 赵 阳　版式设计 张 杰
插图绘制 于 博　责任校对 李大鹏　责任印制 赵义民

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 固安县铭成印刷有限公司
开　　本 787 mm×1092 mm 1/16
印　　张 23.25
字　　数 440 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2019 年 5 月第 1 版
印　　次 2019 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 46.10 元

物 料 号 50404-00

高等数学

(上册)

严亚强 编

1 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1256211，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。

2 注册并登录，进入“我的课程”。

3 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。

4 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

http://abook.hep.com.cn/1256211

前言

什么是曲线的长度？什么是面积？什么又是几何体的体积？我们生活的世界瞬息万变，那么如何来度量变化的速度？如何由已知的速度来计算距离？这些问题也许小学生都略知一二，但仔细想想，我们的了解都只是在一般层面上。

齐民友先生说过："历史已经证明，而且将继续证明，一种没有相当发达的数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为一种文化的民族也是注定要衰落的。"微积分的发展历程体现了人类对数学的不懈追求。古希腊时期的欧多克索斯（Eudoxus，公元前390—前337）就提出了穷竭法，成为极限理论的先驱；阿基米德（Archimedes，公元前287—前212）所著的《抛物线求积》成为积分学的萌芽。1615年德国天文学家、数学家开普勒（Kepler J，1571—1630）在他出版的《测量酒桶的新立体几何》一书中给出了阿基米德92个未讨论过的体积问题。法国哲学家、数学家笛卡儿（Descartes R，1596—1650）在1637年出版的《几何学》一书中提出了变量的概念，同时也引入了坐标系的方法和函数的思想。紧接着，被称为"业余数学家之王"的法国律师费马（Fermat P，1601—1665）提出了无穷小量的方法，并在计算极小值和极大值上取得成功。随后，英国的"科学的皇帝"牛顿（Newton I，1643—1727）和德国的思想家、数学家莱布尼茨（Leibniz G W，1646—1716）先后独立发明了微分法和积分法。此后经过三百多年的不断完善和深化，数学科学迅猛发展。

我们要从思维和文化的视角珍惜人类的瑰宝——数学。学数学不仅是为某个学科打基础，也不只是为以后某个公式的应用作储备。学好数学，特别是学好高等数学，其效用是"立竿见影"的。高等数学能让我们打开理性思维的大门，用怀疑、探索、客观的态度看待事物。学好高等数学的人会多一份自信和刚毅，其理性思维和文化修养的厚度也会得到提高。

那么，如何学好高等数学呢？我们知道，学好数学仅仅靠理解课本是不够的，还要通过做习题来加深理解，但如果只是做习题也是不够的，重要的是把想法不断优化，直至理解数学概念的本质。与中学数学不同的是，高等数学的解题过程充满猜测，需要直觉和灵感，而每一个灵感几乎都是用"九十九分汗水"换来的，所以在电子辅助工具迅猛发展的今天，效果最佳的学习方法仍然是一个字——勤！唯有勤奋才能理解

数学中的奇思妙想。在学习的过程中，尽量不要放过疑点，因为要想绕过或者隐匿任何一个疑点都有可能导致出现一系列的问题。对于高等数学中的极限、导数、不定积分三大基本计算，一定要做熟想透，它们就像小学里的两个数相加一样基本；更为特别的是，极限的思想和方法是整个高等数学体系中最为根本的东西，是燕子在屋檐下筑巢的第一根稻草，如果这个基础没有打好，就会为高等数学学习埋下隐患。由于不再像中学时代那样有时间反复练习，高等数学的学习应该更多地需要独立思考。

本书作者多年的教学习惯是“抓两头，带中间”。也就是说，对基础差的同学不放弃，对基础好的同学不放任。这个理念反映在本书的编写上，就是既有沙滩平川，又有高山深海。本书既适合综合性大学理工科类各专业，也适合民办学院非数学类专业，并顾及这些专业中有志于参加全国硕士研究生入学统一考试的同学。为此本书特别注重知识点的分类和习题的分层，既有充分的衔接知识，又有不少拓展阅读；既有大量基础性小题，又有很多综合性大题。本书利用数字化技术（如二维码），一方面提供更多的阅读信息，另一方面为两千多道习题提供习题答案以外的“第二次提示”，即部分习题的解答提示，尽量把所有的学习困难都解决于无形之中。不同于“习题全解”的提示，既可排除简单抄袭的可能性，又为基础较弱的同学提供极大的便利。每章近十道难题同时也对基础强的同学提出了挑战。

本书做了大量旁注，期望通过对相关数学思想方法的解读，努力把理论的深刻之处揭示出来。

相对于传统的高等数学教材，本书作了一些结构上的优化。例如，较早地介绍基本初等函数的连续性，有助于系统、灵活地运用等价无穷小计算极限；将导数的概念分在前后两处，有利于分散难点，强化重点；从麦克劳林公式推导出泰勒公式来，期望更自然地展现多项式的逼近过程，并帮助学生克服畏惧心理。

本书安排章、节、子节三个主要层次，希望能让学生更清晰地理解知识的脉络；每个子节的 2~5 个练习为及时巩固所用；每节安排的 13~20 个习题（花线以上是基础题，花线以下是提高题）便于各种层次读者选做，每章的复习题供高标准的读者选做。自测题为检验学习效果所用，思考题只为重大的、易错的、需要及时搞清的概念而设置，其解答会在章末以二维码的形式提供。

本书中打星号“*”的节或目（如 *1.1.4　初等函数论若干知识的回顾和补充）可作选讲。打星号的题目（如 12*）难度较大，仅供参考。带有五角星号“☆”的例题（如☆例 1.1.5）的结论可作为定理或其解题方法比较典型。

本书在编写过程中得到苏州大学数学科学学院领导和全体教师的热忱支持和帮助，

尤其是顾振华、候绳照、滕冬梅、胡长青、周筱洁、卢丹诚、徐聪敏、陈凤娟、王志国等老师对本书提出了宝贵的建议和修改意见，谨此致谢。由于作者水平有限，欠妥之处一定不少，期待读者通过邮箱 yyq_szdx@163.com 批评指正。

编者于苏州大学

2018 年 3 月 6 日

目　　录

第 1 章　函数与极限

微积分是一个以实数集为基础、以极限为工具的完整的数学理论体系.微积分研究的主要对象是函数,研究函数性态的基本方法是极限,而连续性就是用极限方法来研究的一个重要的函数性态.连续函数是微积分中的基本函数类.本章主要研究函数、极限、连续等基本概念和运算.

§1.1　实数集与函数

阅读材料 1.1 什么叫数学思维和数学思维能力

1.1.1　数轴上的邻域

一、数轴与绝对值不等式

如果在一条直线上确定一点 O 作为原点,指定一个方向为正向,并规定一个单位长度,则称此直线为**数轴**.任一实数都对应数轴上唯一的一点;反之,数轴上的每一点都唯一地代表一个实数,而全体实数组成的集合称为实数集,记为 $\mathbf{R}$.于是,“实数 a”($a\in\mathbf{R}$)与“数轴上的点 a”这两种说法具有相同的含义.

注　为什么“数”与“形”之间存在这么完美的对应?用数轴表示数的思想至少可以追溯到法国数学家笛卡儿(Descartes R, 1596—1650)发明的直角坐标系,甚至可以索源到公元前古希腊人发现无理数的存在.有理数集在数轴上会出现“缝隙”,怎样定义无理数?这个问题直到 1888 年才由德国数学家戴德金(Dedekind J W R, 1831—1916)解决.

实数集有很多重要子集,例如:自然数集 $\mathbf{N}$,正整数集 $\mathbf{N}^*$,有理数集 $\mathbf{Q}$,整数集 $\mathbf{Z}$,等等.

实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}\tag{1.1.1}$$

从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距

离.绝对值的几何性质有

命题 1.1.1(距离公设) 对于任意 $a,b,c\in\mathbf{R}$,恒有

(1) 非负性: $|a-b|\geqslant 0$,等号成立当且仅当 $a=b$;

(2) 对称性: $|a-b|=|b-a|$;

(3) 三角不等式:

$$|a-c|\leqslant|a-b|+|b-c|. \tag{1.1.2}$$

注 我们熟知的 xOy 平面是用两个数轴构建的,其上的点记为 (x,y) $(x,y\in\mathbf{R})$. xOy 平面也记作 $\mathbf{R}^2$. 坐标平面上用

$$\rho(P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2))=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

表示的距离也具有非负性、对称性和三角不等式的性质.

绝对值的主要代数性质有

(1) $|a|=|-a|$;

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$;

(3) $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h\quad(h>0)$;

(4) $\big||a|-|b|\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$;

(5) $|ab|=|a|\cdot|b|$;

(6) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$.

今后我们还会经常用到

命题 1.1.2 设 $\varepsilon>0,X>0$,则

(1) $|x-a|<\varepsilon$ 当且仅当 $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$;

(2) $|x|>X$ 当且仅当 $x>X$ 或 $x<-X$.

注 以后用"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当"或"定义为".

二、区间和邻域

设 $a,b\in\mathbf{R},a<b$,集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b).集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$.类似地,记集合 $\{x\mid a\leqslant x<b\}=[a,b)$, $\{x\mid a<x\leqslant b\}=(a,b]$,都称为**半开半闭区间**. a 和 b 称为区间的**端点**.区间两端点间的距离(线段的长度)称为**区间的长度**.以上几类区间统称为**有限区间**.

满足关系式 $x\geqslant a$ 的全体实数 x 的集合记作 $[a,+\infty)$,这里符号 ∞ 读作"无穷大", $+\infty$ 读作"正无穷大".类似地,我们记

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R},$$

其中 $-\infty$ 读作"负无穷大".以上几类区间称为**无限区间**.

在实数轴上有一种特殊的区间,它有中心和半径,这种区间称为**邻域**.更确切地说,我们有

定义 1.1.1 设 $a\in\mathbf{R},\delta>0$,数集 $\{x\mid |x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**,记作 $U(a;\delta)$

(如图 1.1.1 所示).点 a 叫做这个邻域的**中心**,δ 叫做这个邻域的**半径**.记集合 $\mathring{U}(a;\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$,称为点 a 的 δ **去心邻域**.开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,记作 $U_-(a;\delta)$;$(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域,记作 $U_+(a;\delta)$.在不必考虑邻域半径的情况下,点 a 的某邻域记为 $U(a)$,去心邻域记为 $\mathring{U}(a)$,左邻域和右邻域分别记为 $U_-(a)$ 和 $U_+(a)$.

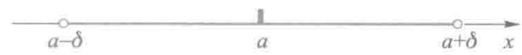


图 1.1.1

从字面上看,邻域是点 a 的“近旁”“邻近的区域”.δ 越小,邻域中的点与点 a 越靠近.

无穷大“∞”不是数轴上的一个点,但可以想象为数轴上遥远处一个虚拟的点.对于一个充分大的正数 X,数集 $U(\infty)=\{x\mid |x|>X\}$ 是**∞ 的一个邻域**,X 越大,邻域中的点与 ∞“越靠近”.同样地,$+\infty$ 邻域为集合 $U(+\infty)=\{x\mid x>X\}$,$-\infty$ 邻域为集合 $U(-\infty)=\{x\mid x<-X\}$.

练习 1.1.1

1. 用区间表示邻域 $U(2;0.02)$ 及去心邻域 $\mathring{U}(2;0.02)$.

2. 为使 $\dfrac{2}{|x-1|}<0.001$,x 应在什么范围内?

3. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,若对任何正数 ε,有 $|a-b|<\varepsilon$,试用反证法证明 $a=b$.

1.1.2 函数及其特性

一、映射、函数、复合函数和反函数

1. 映射

定义 1.1.2 设 X 与 Y 是两个非空集合,若对 X 中的每一个元素 x,均可找到 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应,则称这个对应是集合 X 到集合 Y 的一个**映射**,记为

$$f:X\to Y.$$

将 x 的对应元素 y 记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$,并称 y 为映射 f 下 x 的**像**,而 x 称为映射 f 下 y 的**原像**(或称为**逆像**).集合 X 称为映射 f 的**定义域**,记作 D_f,即 $D_f=X$,而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合 $\{y\mid y\in Y,y=f(x),x\in X\}$ 称为映射 f 的**值域**,记为 R_f(或 $f(X)$).

概括起来,构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

(1) 集合 X,即定义域 $D_f=X$;

(2) 集合 Y,它限制值域的范围 $R_f \subset Y$;

(3) 对应法则 f:使每个 $x \in X$ 有唯一确定的 $y=f(x)$ 与之对应.

设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射,若对 X 中的任意两个不同元素 $x_1, x_2(x_1 \neq x_2)$,它们的像 y_1 与 y_2 满足 $y_1 \neq y_2$,则称 f 为**单射**;如果映射 f 满足 $R_f = Y$,则称 f 为**满射**;如果映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为**双射**(又称**一一映射**或**一一对应**).这四个概念的特点可从图 1.1.2 看出.

注 映射的概念为现实背景和数学模式构筑起了桥梁,如"这个教室里的座位比人数多"就包含着映射思想.

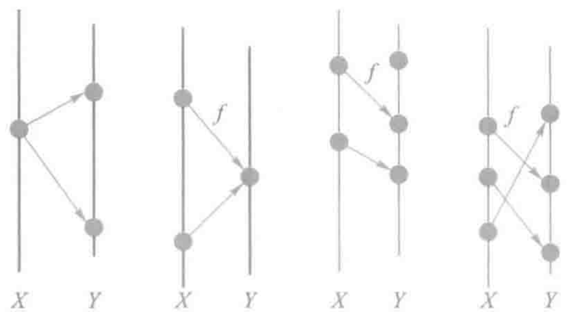


图 1.1.2

2. 函数

当 f 是从实数集 $D \subset \mathbf{R}$ 到实数集 $Y \subset \mathbf{R}$ 上的映射时,称其为一个**函数**.集合 D 中的元素及其像称为**变量**,所以函数可以直接定义为

定义 1.1.3 设 x 和 y 分别是实数集 D 和 Y 中的两个变量,如果存在一种法则 f,使得对每一个数 $x \in D$,都能找到唯一确定的数 $y \in Y$ 与之对应,则称 f 是定义在 D 上的一个**函数**,记作

$$f: D \to Y.$$

数集 D 称为函数 f 的**定义域**,x 所对应的 y 称为 f 在点 x 处的**函数值**,记为 $f(x)$.全体函数值的集合 $R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\} (\subset Y)$ 称为函数 f 的**值域**.函数关系中的 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

函数定义中的 Y 通常以实数集 $\mathbf{R}$ 来代替,因此,定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个主要因素,所以,我们常用

$$y = f(x), x \in D$$

来表示一个函数.**两个函数相同当且仅当函数的定义域和对应法则都相同**.函数的定义域的确定有两种方式,一种是一定背景下根据实际意义规定自变量的范围;另一种是使得函数的运算式子有意义的点的集合,即函数的**自然定义域**,或**存在域**,在这种

情况下,定义域通常不写,而可以简单地说“函数 $f(x)$”或“函数 f”.

例 1.1.1 求函数 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须 $\begin{cases}x\neq 0,\\ 1-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 解不等式组得函数的定义域

$$D=[-1,0)\cup(0,1].$$

二元点集 $C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**.

函数的表示法通常有三种:解析法(公式法)、列表法和图形法.

3. 函数的四则运算

设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域分别是 $D_f,D_g,D=D_f\cap D_g\neq\varnothing$,则我们可以定义这两个函数的下列运算:

函数的和(差) $f\pm g$: $(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),x\in D$;

函数的积 $f\cdot g$: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),x\in D$;

函数的商 $\frac{f}{g}$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},x\in D\setminus\{x\mid g(x)=0\}$.

4. 复合函数

定义 1.1.4 设有函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$,记 $E=\{x\mid g(x)\in D_f\}\cap D_g$,则对每个 $x\in E$,通过函数 g 对应 D_f 内唯一的值 u,而 u 又通过 f 对应唯一的值 y.这就确定了一个定义在 E 上的函数,它以 x 为自变量,y 为因变量,记作

$$y=f(g(x)),\quad x\in E$$

或

$$y=(f\circ g)(x),\quad x\in E,$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**.并称 f 为**外层函数**,g 为**内层函数**,u 为**中间变量**.

注 并非任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;例如函数 $f(u)=\ln^3(u-2)$ 和函数 $u=\cos x$ 不能复合成一个新的函数,因为函数 $u=\cos x$ 的值域与函数 $f(u)$ 的定义域的交集为空.但只要函数 $y=f(u)$ 的定义域与函数 $u=g(x)$ 的值域有交集,复合函数 $y=f(g(x))$ 就有意义.

我们应该学会分解结构相对复杂一些的函数的复合过程.例如 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ 可分解为 $y=\sqrt{u},u=\cot v,v=\frac{x}{2}$.

例 1.1.2 求函数 $f(x)$,设

(1) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2},x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$;

(2) $f(e^x+2)=x^3,x\in\mathbf{R}$.

解 (1)(**凑元法**)由于$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$,因此

$$f(x)=x^2-2,x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty).$$

(2)(**代入法**)设$u=e^x+2$,则$x=\ln(u-2)$,所以$f(u)=\ln^3(u-2)$,将u换成字母x,有$f(x)=\ln^3(x-2)$,$x\in(2,+\infty)$.

5. 反函数

定义 1.1.5 设函数$y=f(x)$,$x\in D$满足:对每一个$y\in f(D)$,有唯一的$x\in D$使得$f(x)=y$,这种由$f(D)$到D上的映射,称为函数f的**反函数**,记为

$$f^{-1}:f(D)\to D,$$

或

$$x=f^{-1}(y),y\in f(D).$$

函数f有反函数,意味着f是D与$f(D)$之间的一一映射.相对于反函数来说,原来的函数$y=f(x)$称为**直接函数**.计算出关系式$x=f^{-1}(y)$就已经求出$y=f(x)$的反函数,但二者在xOy平面上的图形是同一个,为了区别图形,习惯上还要将反函数写成

$$y=f^{-1}(x).$$

这样一来,f^{-1}的定义域为$f(D)$,值域为D;由于点(a,b)与点(b,a)关于直线$y=x$对称,反函数$y=f^{-1}(x)$和直接函数$y=f(x)$的图形就关于直线$y=x$对称(如图 1.1.3).

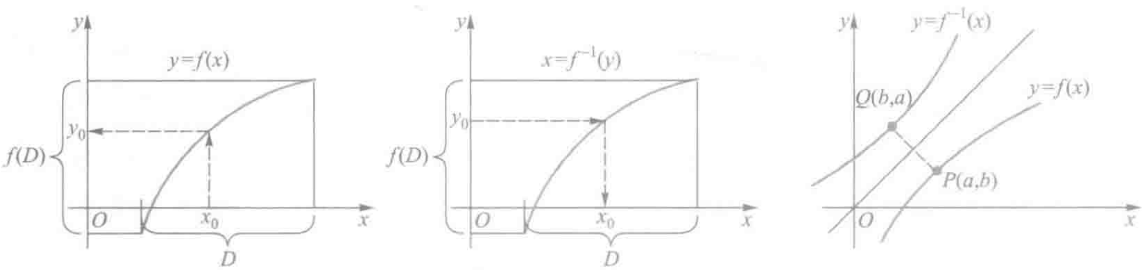


图 1.1.3

一般地,f与f^{-1}总是互为反函数的,因此恒有

$$f^{-1}(f(x))\equiv x,x\in D; \tag{1.1.3}$$

$$f(f^{-1}(y))\equiv y,y\in f(D). \tag{1.1.4}$$

例 1.1.3 求函数$y=\sqrt{e^x+1}$,$x\in\mathbf{R}$的反函数.

解 因为$e^x=y^2-1$,$x=\ln(y^2-1)$,而$y=\sqrt{e^x+1}>1$,即直接函数的值域为$(1,+\infty)$,所以反函数为

$$y=\ln(x^2-1),x\in(1,+\infty).$$

注 反函数的定义域是需要检验的,检验它是否为直接函数的值域.