



电磁之美

——麦克斯韦方程之美学鉴赏

盛新庆◎著

Beauty of
Electromagnetism

Aesthetic Appreciation of
Maxwell Equation



科学出版社

电 磁 之 美

——麦克斯韦方程之美学鉴赏

盛新庆 著



科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

阐述知识之抽象演过程是传达知识之美的有效途径之一。本书尝试阐述电磁波理论之起源与演化,非静态讲述电磁波理论之内容。这包括如何通过特殊视角之考察、概念之抽象、数学之运用,构建出麦克斯韦方程,演化出平面电磁波形象与波导传输模式,电磁波辐射与散射机理,以及如何控制电磁波传播与吸收等重要结论,从而展示出电磁波理论演化中所用思想、抽象、数学的简洁与力量之美,以滋润心灵,孕育创造力。

本书可供物理以及其他理工科的本科生、研究生、科研人员使用,也可以作为科普读物供大家参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁之美:麦克斯韦方程之美学鉴赏/盛新庆著. —北京:科学出版社, 2019.7

ISBN 978-7-03-061442-1

I. ①电… II. ①盛… III. ①麦克斯韦方程—研究 IV. ①O175.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2019) 第 108836 号

责任编辑:刘凤娟 田轶静/责任校对:杨 然

责任印制:吴兆东/封面设计:无极书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京虎彩文化传播有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2019年7月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2019年7月第一次印刷 印张:9 插页:1

字数:174 000

定价:49.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序

美学大家朱光潜先生在《谈美》中曾说：对于一棵古松可以有三种态度。第一种是关心这棵古松值多少钱，这是木商的实用态度；第二种是关心古松怎么才能长好，这是植物学家的科学态度；第三种是欣赏古松苍翠的颜色、昂然高举的气概，这是艺术家的美学态度。前两种态度都有实际的功用，往往受人重视，第三种态度因为没有实际的功用，常被忽视。但实际上很重要，尤其是在物质极其丰富，科学如此发达的今天。因为前两种态度无及于心灵，而只有美学态度才能慰藉、养护心灵，给精神加油、生命充电。美学是精神食粮。德国美学家席勒在《美育书简》中说：“审美教育是实现人的自由的唯一途径。”

以往审美教育一般只存在于艺术教育之中，极少在理工科目中论及。是理工科目中不存在美吗？稍有经验的人都会给出否定的回答。因为实际上我们常常会被数学证明的精妙构思、物理阐释的简洁明了、工程技术的巧妙精益所叹服。这种叹服就是一种美感体验。所以理工科目中不是不存在美，而是我们较少用美学态度去审视、传授理工知识。当我们不注重知识的构建过程，只关注最终结果的时候，知识就变得冷冰冰，不仅激不起我们的兴趣，而且往往会成为我们理解的困难、记忆的负担。实际上，知识都含美，也许知识的本质就是美。因为知识是人创造的，而人创造知识的最重要动力之一就是美。伟大的数学家赫尔曼·外尔曾说：“我的工作总是试图把真与美统一，当我必须两者择一时，我通常是选择美。”因此，我们没能感受知识之美，不是知识没有美，而是我们没

有用美学视角去审视。当今人才培养强调“三位一体”(价值塑造、能力培养、知识传授),审美教育或许就是价值塑造的核心内容。

那么如何传授理工知识之美呢?我们不妨分析一下理工知识之美与艺术之美的异同。相同在于都能引起人的共鸣;不同在于引起共鸣的方式。艺术之美更多的是艺术形象的直觉,诸如绘画中的色彩、书法中的线条、音乐中的节奏、文学中的人物形象;理工知识之美更多的是抽象过程的体验,诸如数理中的化繁为简、演绎出新、聚焦成形。因此,传授理工知识之美的根本在于展示其抽象过程,或者说其创建过程,仅仅展示知识本身是远远不够的。

重温或者虚构理工知识抽象过程是感受理工知识之美的有效途径。本书以电磁理论为例,展示电磁理论的创建过程,感受其美,以育心灵,孕育创造力。

大致而言,本书是用新观点阐释旧材料。有别于其他电磁书籍的地方有:① 尽量阐明物理概念和数学运算的思想来源,以及所展示的力量之美;② 以新的方式论证旧的结论,尽量使过程更具美感,譬如波导纵向场满足标量亥姆霍兹方程的论证、波导模式传输线分析模型的论证、矢量基尔霍夫公式的论证、德拜势的论证、完全匹配吸收层的论证;③ 删除了一些通常电磁书籍中的知识点,增补了一些很有美感,但一般电磁书籍很少介绍的材料,譬如用梯度推导不同坐标系单位矢量的变换关系、近年来发明的变换空间麦克斯韦方程。

目 录

序

第 1 章	麦克斯韦方程	1
1.1	麦克斯韦方程之源	1
1.2	概念提炼	2
1.3	数学工具	4
1.4	麦克斯韦方程的构建	5
1.5	麦克斯韦方程的完备性	7
1.5.1	本构关系	7
1.5.2	边界条件	8
1.6	麦克斯韦方程与三大定律之比较	12
第 2 章	麦克斯韦方程的语言——矢量分析	13
2.1	∇ 算子的计算公式	13
2.1.1	散度	13
2.1.2	旋度	16
2.1.3	梯度	18
2.2	不同坐标系下矢量的转换	19
2.3	矢量恒等式	21
2.4	算子基本积分定理	23
2.4.1	高斯散度定理	23
2.4.2	斯托克斯定理	24

2.4.3 格林定理	25
第 3 章 麦克斯韦方程之性质	29
3.1 电磁波预言	29
3.2 唯一性定理	31
3.3 等效原理	32
3.4 对偶原理	35
3.5 互易定理	36
第 4 章 自由空间中麦克斯韦方程之解——平面波	38
4.1 平面波解	38
4.2 相速和群速	40
4.3 波的极化	44
4.4 无耗介质中的电磁波传播	46
4.5 有耗介质中的电磁波传播	46
4.6 坡印亭定理	48
第 5 章 波导中麦克斯韦方程之解——波导传输模式	51
5.1 波导传输问题的求解途径	51
5.2 矩形波导中电磁波的传输特性	55
5.3 波导正规模的特性	60
5.4 传输线分析模型	63
第 6 章 有源麦克斯韦方程之解——电磁波辐射	67
6.1 自由空间中带源麦克斯韦方程的解	67
6.2 电流与磁流辐射场的其他数学表达形式	71
6.2.1 Stratton-Chu 公式	71

6.2.2 基尔霍夫公式	73
6.3 激励源辐射场的远场近似	75
6.4 辐射条件	78
第 7 章 球边界麦克斯韦方程之解——金属球散射	80
7.1 球坐标系下麦克斯韦方程本征函数系	81
7.2 平面波的金属球散射	85
第 8 章 棱边界麦克斯韦方程之解——半平面导体散射	92
8.1 平面波半平面导体散射表达式	92
8.2 半平面导体散射机理	97
第 9 章 不同惯性系中的麦克斯韦方程——相对论	107
9.1 洛伦兹时空变换	107
9.2 质能关系	112
第 10 章 变换空间中的麦克斯韦方程	116
10.1 一般变换空间的麦克斯韦方程	116
10.2 一种特殊隐身变换的麦克斯韦方程	121
第 11 章 复延拓空间中的麦克斯韦方程	124
11.1 复延拓麦克斯韦方程	124
11.2 完全匹配吸收层设计	126
附录 A 平面波的球面波展开式证明	129
附录 B 鞍点法	131
彩图	

第 1 章 麦克斯韦方程

英国科学期刊《物理世界》曾让读者投票评选出了十个最美公式，位于榜首的就是下面这组麦克斯韦方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.4)$$

这里， $\mathbf{E}$ 是电场强度， $\mathbf{D}$ 是电位移矢量，在真空中它们有很简单的关系式 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ (ε_0 是真空介电常数， $\varepsilon_0 = 8.8541878178 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$)； $\mathbf{H}$ 是磁场强度， $\mathbf{B}$ 是磁感应强度，在真空中它们也有很简单的关系式 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (μ_0 是真空磁导率， $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$)； $\partial \mathbf{D}/\partial t$ 项是麦克斯韦的发明，被称为位移电流(displacement current)； ρ 是电荷密度， $\mathbf{J}$ 是电流密度， $\mathbf{M}$ 是磁流密度。

这组方程对称简洁，形式优美，深入其内，博大精深。如果能展示其抽象建立过程，或许可洞察创新之源，播下创新之火。

下面就让我们重温这组方程的抽象建立之路。

1.1 麦克斯韦方程之源

麦克斯韦方程来源于以下三个从实验中总结出来的定律。

库仑定律：在真空中，两个静止的点电荷 q_1 和 q_2 之间的相互作用力的大小和 q_1, q_2 的乘积成正比，和它们之间的距离 r_{12} 的平方成反比；作用力的方向沿着它们的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸。即

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.5)$$

式中， q_1 和 q_2 是两个静止点电荷的电量； $\mathbf{F}_{12}$ 是 q_1 对 q_2 的作用力； $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ 是从 q_1 指向 q_2 的单位距离矢量。此定律与牛顿的万有引力定律的形式极其相似。

毕奥-萨伐尔定律：两个电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 和 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 存在相互作用力，电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 对 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的作用力可表示为

$$d\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\mathbf{l}_2 \times (I_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{12})}{r_{12}^2} \quad (1.6)$$

法拉第电磁感应定律：一个闭合回路磁通量随时间的变化率等于在回路中产生的感应电动势，即

$$\epsilon_{\text{EMF}} = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.7)$$

这里， $\epsilon_{\text{EMF}}^{\text{①}}$ 是感应电动势； ψ 是磁通量。

三个定律表述清晰，但是并不统一。库仑定律和毕奥-萨伐尔定律是从产生作用力的角度表述的；法拉第电磁感应定律是从产生感应电动势的角度表述的。它们似乎并不构成一个有机整体。

1.2 概念提炼

建立电磁理论就是用更简洁、更统一的方式表述上述三大定律。

① ϵ_{EMF} 的下标 EMF 是 electromotive force 的简写， $\epsilon_{\text{EMF}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。

为此，我们首先思考一个更具体的问题：为什么两个电荷之间有作用力？或者说两个电荷的作用机理是什么？这就需要想象、创造。我们可以给出各种各样的解释，其中一个比较简洁的解释就是：一个电荷在其周围产生电场，另一个电荷在电场中会受到力的作用。这样库仑定律就可表达为：一个电荷 q_1 在其周围产生的电场为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.8)$$

其单位为 V/m。另一个电荷 q_2 在此电场中所受作用力为

$$\mathbf{F}_{12} = q_2 \mathbf{E} \quad (1.9)$$

在这个解释中，我们创造了或者说抽象出了“电场”这个重要概念，它成为解释两个电荷相互作用的关键。

仿照上述库仑定律的解释，我们可以解释毕奥-萨伐尔定律。一个电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 产生了磁场

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2} \quad (1.10)$$

另一个电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 在磁场中受到力的作用

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B} \quad (1.11)$$

有了电场和磁场这两个重要概念，再加上我们知道感应电动势是电场引起的，因此法拉第电磁感应定律可以解释为：变化的磁场可以产生电场。

通过上述创造性构想，我们可以认为电磁现象的本质是电场、磁场，以及它们之间的相互转化。由此可猜测，用电场与磁场概念可以更统一、更简洁地表述上述三个定律。

1.3 数 学 工 具

既然已经创建了电场和磁场的概念,那么下一步就是要发明相应的数学运算,以便准确、简洁地表述这些概念的特征。由库仑定律可以知道,电荷产生了电场,因此我们需要一个运算以表述电荷与电场之间的关系。既然电场是由电荷产生的,那么在包围电荷的封闭曲面上,电场强度的法向面积分就很有可能与电荷之间存在一种关系,为此我们定义下面通量概念,即电场强度 $\mathbf{E}$ 的通量定义为

$$\phi \triangleq \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.12)$$

为了表述每一点处电场强度与电荷密度之间的关系,我们引入微积分,建立散度运算。电场强度 $\mathbf{E}$ 在点 P 处的散度定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \triangleq \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\phi}{\Delta V} \quad (1.13)$$

这里,点 P 是在面 S 包围的体积 ΔV 之内。根据这个定义,不难得到下面矢量运算中的高斯定理(证明见第 2 章):

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.14)$$

那么,这个散度运算是否适用于表述磁场强度与电流密度之间的关系呢?回答是否定的,因为电流产生的磁场与电荷产生的电场很不一样。电流产生的磁场是环绕电流,为此我们定义下面的环量,即磁场强度 $\mathbf{H}$ 沿着环路 L 的环量定义为

$$\varphi \triangleq \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.15)$$

同样，为了表述每一点处磁场强度与电流密度之间的关系，我们引入微积分，建立旋度运算。注意围绕一点可以有不同朝向的环路，且不同朝向环路的环量大小不同。我们把环量最大的那个环路朝向称为旋度方向。这样任何一个朝向的环路环量就是旋度方向的环路环量与这个朝向单位矢量的点乘，因此，磁场强度 $\mathbf{H}$ 在点 P 处的旋度可定义为

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \times \mathbf{H} \triangleq \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\Delta S} \quad (1.16)$$

这里， $\hat{\mathbf{n}}$ 表示环路所在面的法向单位矢量，其朝向与环量积分方向形成右手螺旋。根据这个定义，不难得到下面的斯托克斯定理（证明见第 2 章）：

$$\int_S \nabla \times \mathbf{H} d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.17)$$

1.4 麦克斯韦方程的构建

利用上述创造的机理模型和发明的数学运算，三大定律便可更准确、更简洁、更统一地表达出来。

将式 (1.8) 代入通量定义式 (1.12) 得

$$\phi \triangleq \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_1}{\epsilon_0} \quad (1.18)$$

两边同除以封闭曲面所围体积，并让体积趋近于零，依据散度定义，便有

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.19)$$

式 (1.19) 只在真空中成立，因为库仑定律是在真空下得到的。介质在电场作用下会产生极化电场 $\mathbf{P}$ ，将极化电场和原电场之和，即 $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ ，视为一个新的物理量——电位移矢量 $\mathbf{D}$ ，这样就有下列在任意介质中都成立的方程：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.20)$$

在真空中 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ 。在其他介质中它们的关系可根据材料结构模型建立或依据测试结果确定。式 (1.20) 就是麦克斯韦方程组中的第 1 个方程式 (1.1)。

再看法拉第电磁感应定律。利用斯托克斯公式 (1.17)，法拉第电磁感应定律式 (1.7) 左边可表示成

$$\varepsilon_{\text{EMF}} = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.21)$$

这样式 (1.7) 就变成

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.22)$$

于是就有

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.23)$$

这样就得到了麦克斯韦方程组中的第 4 个方程式 (1.4)。

利用上述场的观念，毕奥-萨伐尔定律便可等效于安培定律，也就是，磁场强度沿任何闭合环路 L 的线积分，等于穿过这个环路所有电流的代数和，即

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum_I \quad (1.24)$$

其中，电流的正负规定如下：当穿过回路 L 的电流方向与回路 L 的环绕方向服从右手定则时， I 为正；反之，为负。两边同除以环路所围面积，并让面积趋近零，依据旋度定义，便有

$$\hat{n} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \hat{n} \cdot \mathbf{J} \quad (1.25)$$

即

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.26)$$

比较式 (1.23) 和式 (1.26), 这两个方程似乎都不完备。式 (1.23) 右边缺了磁流项, 式 (1.26) 右边缺了随时间变化的电场项。现实中至今没有发现磁流, 但是随时间变化的电场却无处不在。因此, 麦克斯韦自然地引入位移电流 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, 并将其加入式 (1.26), 于是就得到了

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.27)$$

这就是麦克斯韦方程组中的第 3 个方程式 (1.3)。麦克斯韦方程组中的第 2 个方程式 (1.2) 并不独立, 它可以由式 (1.4) 推导得到, 只要将式 (1.4) 两边同取散度便得。至此, 统一、简洁的麦克斯韦方程组式 (1.1)~式 (1.4) 便从三大实验电磁定律中建立了。

1.5 麦克斯韦方程的完备性

麦克斯韦方程是一组高度统一、简洁的矢量偏微分方程组。作为一个电磁理论, 还必须考虑这组方程的完备性。换言之, 所有的电磁问题, 是否利用这组方程都能解决? 本节将考虑此问题。

1.5.1 本构关系

显然, 上述式 (1.1)~式 (1.4) 还不足以完全表述电磁场在介质中的规律, 因为 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{H}$ 的关系还是未知的。实验表明在很多介质中有

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad (1.28)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (1.29)$$

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (1.30)$$

这里, ε_r 称为介质的相对介电常数; μ_r 称为介质的相对磁导率; σ 称为介质的电导率。式 (1.28)~ 式 (1.30) 统称为介质的**本构关系**。如果介质中这些本构参数随空间位置而变, 则此类介质称为**非均匀介质**; 反之, 则为**均匀介质**。如果介质中这些本构参数是频率的函数, 则此类介质称为**色散介质**, 如等离子体、水、生物肌体组织和雷达吸波材料; 反之, 则为**非色散介质**。如果介质中这些本构参数是张量形式, 则此类介质称为**各向异性介质**, 如等离子体的介电常数、铁氧体中的磁导率都是张量。当然也有些介质的本构关系更复杂, 不能写成式 (1.28)~ 式 (1.30) 的形式, 如手征介质, 这种介质中的电位移矢量不仅与电场强度有关, 而且还与磁场强度有关; 磁感应强度不仅与磁场强度有关, 也与电场强度有关。

1.5.2 边界条件

从数学求解偏微分方程的角度来看, 纵使有描述电磁问题的麦克斯韦方程组式 (1.1)~ 式 (1.4) 以及反映区域中介质特征的本构关系式 (1.28)~ 式 (1.30), 电磁问题还是不能求解的。要求解电磁问题, 还必须给出求解域以及场不连续处的边界条件。

1. 两种介质交界面的边界条件

1) 磁场强度 H 的边界条件

设两种介质的参数分别为 $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ 和 $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$, 交界面由介质 2 指向介质 1 的法向单位矢量为 $\hat{n}$, $\hat{t}$ 为沿交界面的切向单位矢量, 如图 1.1 所示。

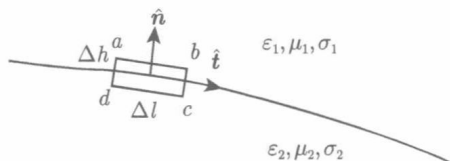


图 1.1 边界条件的线积分回路示意图

跨过交界面, 取一微小矩形回路 $abcd$, 其宽边 $|ab| = |cd| = \Delta l$ 很小, 其所截交界面元可以看作是一直线段。令小矩形回路宽边与所截交界面元的 $\hat{\mathbf{t}}$ 平行, 高 $|bc| = |da| = \Delta h \rightarrow 0$ 。将麦克斯韦方程式 (1.3) 的积分形式应用于此矩形回路, 得

$$\begin{aligned} \oint_{abcd} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned} \quad (1.31)$$

式中, $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}}$ 的方向与 $abcd$ 回路呈右手螺旋关系。由于 $|bc| = |da| = \Delta h \rightarrow 0$, $\mathbf{H}$ 又为有限量, 所以上式变为

$$\begin{aligned} \oint_{abcd} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= \int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^d \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \left(\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \right) \end{aligned} \quad (1.32)$$

式中,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_S \mathbf{J} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}} \Delta h) d\mathbf{l} \\ &= \int_{\Delta l} \mathbf{J}_S \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}}) d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (1.33)$$

且因为 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ 为有限值, 故有

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1.34)$$

因此, 式 (1.32) 变为

$$\begin{aligned} \int_{\Delta l} (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \hat{\mathbf{t}} d\mathbf{l} &= \int_{\Delta l} \mathbf{J}_S \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{t}}) d\mathbf{l} \\ &= \int_{\Delta l} \hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{J}_S \times \hat{\mathbf{n}}) d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (1.35)$$