CHUDENG SHULUN

——RUOGAN HEXIN SIXIANG FANGFA LIXI

# 初等数论

## ——若干核心思想方法例析

郑州一起学教育科技有限公司　主编

韩 涛　编著

中国工信出版集团　電子工業出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

http://www.phei.com.cn

# 初等数论

## ——若干核心思想方法例析

郑州一起学教育科技有限公司　主编

韩　涛　编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

**图书在版编目（CIP）数据**

初等数论：若干核心思想方法例析/郑州一起学教育科技有限公司主编；韩涛编著 . —北京：电子工业出版社，2019. 6
ISBN 978-7-121-36681-9

Ⅰ. ①初…　Ⅱ. ①郑…②韩…　Ⅲ. ①初等数论　Ⅳ. ①O156. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2019）第 106663 号

责任编辑：葛卉婷
印　　刷：三河市双峰印刷装订有限公司
装　　订：三河市双峰印刷装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：880×1 230　1/32　印张：3　字数：96 千字
版　　次：2019 年 6 月第 1 版
印　　次：2019 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：19. 00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@ phei. com. cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@ phei. com. cn。

本书咨询联系方式：geht@ phei. com. cn。

# 编 委 会

刘育涛　韩　涛　刘丽娟　刘志业

# 前言

PREFACE

数论，是研究整数的理论。数论的研究对象虽然是数学中最基本、最简单的概念——整数，但数论问题往往难度非常大，其解法需要非常灵活的思路、非常深刻的数学思想，并且至今还有许多悬而未决的问题，如哥德巴赫猜想、孪生素数猜想、黎曼猜想等。有一个说法："数学是科学的皇后，数论是数学中的王冠。"可见数论在数学中的地位。

也有人说："用以发现天才，在初等数学中再也没有比数论更好的课程了。任何学生，如能把当今任何一本数论教材中的习题全部做出，就应当受到鼓励，并劝他将来从事数学方面的工作。"初等数论，由于其研究对象和研究方法简单，不需要过多的数学知识和理论，题目灵活多变，不拘一格，能很好地考察出学生思维的灵活程度，因而数论题目颇受各类数学竞赛及大学自主招生考试的青睐，并且学好数论，对于培养数感是至关重要的。在中小学阶段学习过数论的学生，在进入高等学校进行数学专业的学习时，比起没有学习过数论的学生有明显的优势，初等数论可以称得上是数学学习的"发动机"。

许多学生在做数论习题时会有一个感觉，那就是虽然知道相关知识点，但见到题目之后不知道要用哪些知识点和方法，看不出题目的突破口，找不到切入点，感觉题目类型繁多，却找不到什么统一的规律。本书编写的初衷，就是帮助学生解决这个问题。本书不以具体的知识点为纲，而是试图把初等数论中的一些通用性解题方法和技巧加以总结，让学生体会初等数论中不同问题背后相同的思想方法，从而帮助学生触及问题的本质，"把书读薄"。由于本书比较浓缩，只着重于介绍思想方法，没有对数论知识点进行系统介绍，

因此同学们在学习本书时，如果遇到有些知识点不熟悉或没有学过的情况，也不必着急，可以把遇到的问题先记下来，回头再对照数论课本详细学习。阅读本书，重点就是体会贯穿于初等数论学习过程中的下述十个共同的问题：整数的离散性、排序思想、两边夹、质因数分析与因数分析、因数的共轭性、关注数字和、因式分解、选取合适的模、逐级满足、化大为小。

# 目录

CONTENTS

第一讲

# 整数的离散性

整数的离散性，是整数最本质的性质，也是一切数论方法的核心依据. 对这一点一定要有充分认识. 简单理解，整数的离散性是指整数在数轴上是离散分布的，任何两个整数至少相差 1. 若 $a$，$b\in\mathbf{Z}$ 且 $a>b$，则 $a\geqslant b+1$. 而实数在数轴上是稠密、连续地分布的，任意两个实数无论多么接近，它们之间总还有无数个实数. 这看似很简单的原理，在数学中却有着巨大的应用，因为这给运用枚举法创造了条件. 例如，如果问你“1 到 100 之间有多少个数?”答案是有无数个，因为实数是稠密的. 而如果问你 1 到 100 之间有多少个整数? 那答案是确定的，就是 100 个. 再比如确定“张三的头上有多少根头发?”我们乍一想，这数量也太多了吧? 但认真一想，头发数量虽然多，但已经明确了是张三的头发，这个范围是确定的，而且头发的数量一定是整数，于是只要足够仔细地清点，做到不重复、不遗漏，理论上是一定可以数出来的. 由这些问题可以想到用枚举法解决问题，需要具备两个条件：第一，所研究的量是离散量；第二，有明确的范围.

这样，我们就得到了解决数论问题的一个重要方法：确定所研究的量的界（确定上界或下界或同时确定上下界），由于所研究的量是离散的，可将其一一列举出来，再利用其他条件进行逐一筛选，从而确定最终的答案.

**例 1** **求正整数** $a$，$b$ **满足**：$a^2+ab+b^2=343$.

【分析】这是一个二元二次方程，假如没有给出 $a$，$b$ 是正整数的条件，单纯用代数方法是难以确定它的所有解的. 但是有了 $a$，$b$ 是正整数这一条件就不一样了，我们可以通过估值确定某一整数量（可以是 $a$ 或 $b$，或是与 $a$，$b$ 相关的某一量）的取值范围，再将其所有的可能值列举出来，逐一进行筛选.

一方面，$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=343\Rightarrow(a+b)^2=343+ab>343\Rightarrow a+b\geqslant19$，这样我们就得到了 $a+b$ 的下界，下面我们再设法求出其上界.

另一方面，$(a+b)^2=343+ab\leqslant 343+\frac{1}{4}(a+b)^2\Rightarrow(a+b)^2\leqslant 457$ $\Rightarrow a+b\leqslant 21$.

由于 $a+b$ 是整数，故 $a+b$ 只有 19，20，21 三个可能值，这样就可以分情况讨论了.

若 $a+b=19$，则 $ab=19^2-343=18$，显然 $(a, b)=(1, 18)$，$(18, 1)$；

若 $a+b=20$，则 $ab=20^2-343=57$，无正整数解；

若 $a+b=21$，则 $ab=21^2-343=98=7\times 14$，故 $(a, b)=(7, 14)$，$(14, 7)$.

---

【评论】利用整数离散性解题有两个关键，一是要选定一个对其进行估值的离散量；二是估值，而估值所用的手段是灵活多样的，如不等式分析法、极端分析法等，需要在解题实践中多体会和总结，积累经验.

---

**例2　求所有的质数 $p$，$q$ 满足：$p\mid(q+6)$，$q\mid(p+7)$.**

【分析】显然 $p$，$q$ 都是奇质数，所以 $p+7$ 是偶数，故 $q\leqslant\frac{p+7}{2}\leqslant\frac{q+6+7}{2}\Rightarrow q\leqslant 13$.

于是列出 $q$ 的所有可能值：3，5，7，11，13，逐一代入条件中验证，得$\begin{cases}p=19\\q=13\end{cases}$.

---

【评论】许多与质数相关的问题要从“2 是唯一的偶质数”入手进行奇偶分析，这里得到奇质数 $q$ 是偶数 $p+7$ 的因数，于是 $q$ 不会比 $p+7$ 最大的真因数即$\frac{p+7}{2}$大，这是第一次放缩；第二次放缩利用的是整除里面最基本的一个不等式：若 $x\mid y$ 且 $y\neq 0$，则 $|x|\leqslant$

$|y|$. 由本题的解法也可看出，一些看似困难的数论题目，其解法的关键步骤用到的知识和方法往往极为简单，甚至是众所周知的. 所以，学不好数论往往不是知识量不够，而是思维不够灵活，对基础知识和基本方法的领会不够深刻，不能灵活运用.

---

**例3 对某些正整数 $n$，数 $2^n$ 和 $5^n$ 在十进制表示下首位数字相同，求所有这样的首位数字.**

【分析】设这个相同的首位数字为 $a$，则

$a\times10^x<2^n<(a+1)\times10^x$……①

$a\times10^y<5^n<(a+1)\times10^y$……②

①×②得 $10^{x+y}\leqslant a^2\times10^{x+y}<10^n<(a+1)^2\times10^{x+y}\leqslant10^{x+y+2}\Rightarrow10^{x+y}<10^n<10^{x+y+2}\Rightarrow x+y<n<x+y+2$. 因为 $n$ 是正整数，所以 $n=x+y+1$，代入前面式子得不等式组 $\begin{cases}a^2<10\\(a+1)^2>10\end{cases}\Rightarrow a=3$，因此，这样的首位数字只能是 3.

---

【评论】本题的关键在于如何用数学语言表示“数 $2^n$ 和 $5^n$ 在十进制表示下首位数字相同”，另外，放缩法估值在本题中也得到了运用，放缩的依据仍然是众所周知的事实：十进制中，首位数字最小是 1，最大是 9.

---

**例4 4 个不同的三位正整数的首位数字相同，且 4 个正整数的和能被它们中的 3 个数整除，求这些数.**

【分析】本题可用类似于例 3 的方式去表示 4 个首位数字相同的四位数. 设 $x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$ 是所求的数，$S=x_1+x_2+x_3+x_4$，$a$ 是它们的首位数字，则 $100a\leqslant x_i<100(a+1)$，$i=1$，2，3，4……①

于是，

$$x_i+300a<S<x_i+300(a+1)\Rightarrow1+\frac{300a}{x_i}<\frac{S}{x_i}<1+\frac{300(a+1)}{x_i}\cdots\cdots②$$

将式①代入式②中进行放缩，得 $1+\frac{3a}{a+1}=1+\frac{300a}{100(a+1)}<\frac{S}{x_i}<1+\frac{300(a+1)}{100a}=4+\frac{3}{a}$.

若 $a\geqslant2$，则 $3=1+\frac{3\times2}{2+1}\leqslant1+\frac{3a}{a+1}<\frac{S}{x_i}<4+\frac{3}{a}\leqslant4+\frac{3}{2}=5.5$. 若 $\frac{S}{x_i}$ 为整数，则只有 4，5 这两个可能值，这与 $S$ 能被其中 3 个数所整除且这 3 个数不同矛盾.

若 $a=1$，则 $2.5<\frac{S}{x_i}<7$，若 $\frac{S}{x_i}$ 为整数，则 $\frac{S}{x_i}=3，4，5，6$，因此 $a=1$，且 3 个商数应从 3，4，5，6 中找.

由于 100~199 中任意两数之比（大数比小数）都小于 2，故 3 和 6 不能同为商数，于是 $\frac{S}{x_i}$ 的整数值只有两种情况：① $\frac{S}{x_i}=3，4，5$. ② $\frac{S}{x_i}=4，5，6$. 两种情况下，$S$ 都是 60 的倍数，设 $S=60k$.

当① $\frac{S}{x_i}=3，4，5$ 时，4 个数分别为 $20k$，$15k$，$12k$，$13k$；当② $\frac{S}{x_i}=4，5，6$ 时，4 个数分别为 $15k$，$12k$，$10k$，$23k$，此时 $\frac{23k}{10k}>2$，矛盾，于是只能是情况①，由于所求的数是 100~199 中的数，故 $\begin{cases}12k\geqslant100\\20k\leqslant199\end{cases}\Rightarrow k=9$，因此这 4 个数依次为 180，135，108，117.

---

【评论】本解法着眼于 3 个不同的整数商，通过估值找到这些整数商的范围，再枚举其各种可能.

---

**例5** **记 $[x]$ 为不超过 $x$ 的最大整数，$S=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{99}]+[\sqrt{100}]$，则 $\sqrt{S}=$？**

【分析】采用逆向思维，分析 $[\sqrt{x}]=n$ 的条件，从而实现分

组求和.

若 $x\in\mathbf{N}$，且 $[\sqrt{x}]=n$，则 $n\leqslant\sqrt{x}<n+1\Rightarrow n^2\leqslant x<(n+1)^2\Rightarrow n^2\leqslant x\leqslant(n+1)^2-1=n^2+2n$，故使得 $[\sqrt{x}]=n$ 的整数 $x$ 有 $2n+1$ 个，可将其分在一组求和.

$$\begin{aligned}\therefore S&=([\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}])+([\sqrt{4}]+[\sqrt{5}]+[\sqrt{6}]+\\&\quad[\sqrt{7}]+[\sqrt{8}])+\cdots+([\sqrt{81}]+[\sqrt{82}]+\cdots+\\&\quad[\sqrt{99}])+[\sqrt{100}]\\&=1\times3+2\times5+3\times7+\cdots+9\times19+10\\&=(\sum_{n=1}^{9}n(2n+1))+10=625.\end{aligned}$$

$\therefore\sqrt{S}=25.$

---

【评论】本题的关键在于深刻理解高斯记号的定义，求使得 $[\sqrt{x}]$ 取同一个值 $n$ 的 $x$ 有几个从而实现分组求和.

涉及高斯记号的一大类问题，就是利用 $[x]\leqslant x<[x]+1$ 这个重要不等式进行估值.

---

**例6** **求所有三位数 $n$，使得 $11\mid n$，且 $\frac{n}{11}$ 等于 $n$ 的各位数字的平方和.**

【分析】设 $n=\overline{abc}$，$11\mid\overline{abc}\Leftrightarrow 11\mid a+c-b$，而 $-8=1+0-9\leqslant a+c-b\leqslant 9+9-0=18$，因此 $a+c-b=0$ 或 11.

(1) 若 $b=a+c$，则 $\frac{n}{11}=10a+c=a^2+c^2+(a+c)^2=2(a^2+c^2+ac)$，所以 $c$ 是偶数.

若 $c\geqslant4$，则 $a^2+c^2+ac=a(a+c)+c^2\geqslant5a+c^2>5a+c\Rightarrow2(a^2+c^2+ac)>10a+2c>10a+c$，矛盾.

所以 $c=0$，2.

当 $c=0$ 时，$10a=2a^2\Rightarrow a=5$，此时 $n=550$；

当 $c=2$ 时，$10a+2=2(a^2+2a+4)\Rightarrow a^2-3a+3=0$，无整数解.

（2）若 $a+c=b+11$，则 $\frac{n}{11}=\frac{100a+10(a+c-11)+c}{11}=10(a-1)+c=a^2+b^2+c^2\leqslant 89$.

由柯西不等式得，$(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)\leqslant 3\times 89=267\Rightarrow a+b+c\leqslant 16$，$\therefore 2b+11\leqslant 16\Rightarrow b\leqslant 2$.

当 $b=0$ 时，$a+c=11$，故 $a^2+(11-a)^2=10(a-1)+11-a\Rightarrow 2a^2-31a+120=0\Rightarrow a=8$，$c=3$. $\therefore n=803$.

同理讨论 $b=1$，2 的情况，无整数解.

综上，$n=550$，803.

---

【评论】本题多次使用估值，技巧性较强. 另外，对于一个变量为整数的代数式，要特别注意系数所赋予的式子中某项的“属性”，例如，$4a+5b=100$，若 $a$，$b$ 为整数，则很容易得到 $a$ 是 5 的倍数，$b$ 是 4 的倍数，这样再结合 $a$，$b$ 的范围就可以列出 $a$，$b$ 的所有可能值，比如当 $a$，$b$ 为正整数时，就可以得到 $b\leqslant\left[\frac{96}{5}\right]=19$，得到 $b$ 的可能值为 4，8，12，16，进而求出对应的 $a$ 值.

---

整数的离散性，是整数最本质的性质，也是一切数论问题的基础. 后面各讲，也都是建立在整数的离散性基础上的. 要想利用好整数的离散性，就必须善于利用估值，而估值往往和代数方法（如不等式分析法、放缩法等）紧密联系，因而学好数论，离不开代数的工具.

【习题】

1. 设 $n$ 是一个首位非零的五位数，$m$ 是由 $n$ 删去它正中间一位数字后得到的四位数，若 $m\mid n$，则这样的 $n$ 有多少个？

解：设 $n=\overline{xyzuv}$，$m=\overline{xyuv}$.

首先证明 $n>9m$，即证 $10000x+1000y+100z+10u+v>9000x+900y+90u+9v\Leftrightarrow 1000x+100y+100z>80u+8v$. 这是显然的（$x\geqslant 1$）.

再证 $n<11m$，即证 $10000x+1000y+100z+10u+v<11000x+1100y+110u+11v\Leftrightarrow 100z<1000x+100y+100u+10v$. 这也是显然的.

$\therefore 9m<n<11m$，即 $9<\dfrac{n}{m}<11$.

$\because \dfrac{n}{m}\in\mathbf{Z}$，$\therefore \dfrac{n}{m}=10$.

故 $10000x+1000y+100z+10u+v=10000x+1000y+100u+10v$.

$\therefore 90u+9v=100z\Rightarrow v=0\Rightarrow 9u=10z\Rightarrow u=z=0$.

$\therefore$ 满足要求的五位数为 $\overline{xy000}$（$10\leqslant\overline{xy}\leqslant 99$）.

$\therefore$ 这样的 $n$ 有 90 个.

2. 求所有由不同质数组成的三元数组（$p$，$q$，$r$）满足：$p\mid(q+r)$，$q\mid(r+2p)$，$r\mid(p+3q)$.

解：（1）若 $p$ 是 $p$，$q$，$r$ 中最大者，则 $p\mid(q+r)<2p\Rightarrow p=q+r\Rightarrow q\mid r+2p=3r+2q\Rightarrow q\mid 3r$.

$\because q\neq r$ 且 $q$ 为质数，$\therefore q=3$.

$\therefore p=r+3$，$\therefore r\mid p+3q=r+3+9=r+12$.

$\therefore r\mid 12$，故 $r$ 是 12 的质因数，又 $\because r\neq q=3$.

$\therefore r=2$，$p=5$.

$\therefore (p,\ q,\ r)=(5,\ 3,\ 2)$.

（2）若 $q$ 是 $p$，$q$，$r$ 中最大者，则 $q\mid r+2p<3q\Rightarrow r+2p=q$ 或 $2q$.

①若 $r+2p=2q$，则 $2\mid r\Rightarrow r=2$，于是 $1+p=q$，则 $p$，$q$ 必为一奇一偶，但 $p$，$q$ 都不是 2，矛盾.

②若 $r+2p=q$，则 $p\mid q+r=2p+2r\Rightarrow p\mid 2r$.

$\because p\neq r$，$\therefore p=2$.

由 $r\mid p+3q=p+3r+6p=7p+3r\Rightarrow r\mid 7p$.

$\therefore r=7$，$\therefore q=7+2\times 2=11$.

$\therefore (p, q, r)=(2, 11, 7)$.

(3) 若 $r$ 是 $p$, $q$, $r$ 中最大者，则 $r \mid p+3q<4r \Rightarrow p+3q=r$, $2r$ 或 $3r$.

①若 $p+3q=3r$，则 $p=3 \Rightarrow 1+q=r$，则 $q=2$, $r=3=p$，矛盾.

②若 $p+3q=2r$，则 $p \mid q+r \Rightarrow p \mid 2q+2r=5q+p \Rightarrow p \mid 5q \Rightarrow p=5$.

而由 $q \mid r+2p \Rightarrow q \mid 2r+4p=5p+3q \Rightarrow q \mid 5p \Rightarrow q=5=p$，矛盾.

③若 $p+3q=r$，则 $p \mid q+r=4q+p$.

$\therefore p \mid 4q \Rightarrow p=2$, $q \mid r+2p=3q+3p \Rightarrow q=3$.

$\therefore r=2+3\times 3=11$.

$\therefore (p, q, r)=(2, 3, 11)$.

综上，$(p, q, r)=(5, 3, 2)$, $(2, 11, 7)$, $(2, 3, 11)$.

3. 对正整数 $n$，设 $a_n$ 是最接近$\sqrt{n}$的整数，求$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{200}}$的值.

解：$\forall k \in \mathbf{Z}$, $\left(k\pm\dfrac{1}{2}\right)^2=k^2\pm k+\dfrac{1}{4} \notin \mathbf{Z}$.

故 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, $\sqrt{n}\pm\dfrac{1}{2} \notin \mathbf{Z}$.

因为若$\sqrt{n}\pm\dfrac{1}{2}=a \in \mathbf{Z}$，则$\sqrt{n}=a\pm\dfrac{1}{2} \Rightarrow n=a^2\pm a+\dfrac{1}{4}$，矛盾.

设 $m$ 是最接近$\sqrt{n}$的整数，显然有 $\left|m-\sqrt{n}\right|<\dfrac{1}{2}(m\geqslant 1) \Rightarrow -\dfrac{1}{2}<m-\sqrt{n}<\dfrac{1}{2}$.

$\therefore m-\dfrac{1}{2}<\sqrt{n}<m+\dfrac{1}{2}$, $m^2-m+\dfrac{1}{4}<n<m^2+m+\dfrac{1}{4}$.

$\therefore m^2-m+1 \leqslant n \leqslant m^2+m$.

故给定正整数 $n$，若 $m^2-m+1 \leqslant n \leqslant m^2+m$，则 $m$ 就是最接近

$\sqrt{n}$的整数，即 $a_n=m$.

$\therefore$ 使 $a_n=m$ 的 $n$ 有$(m^2+m)-(m^2-m+1)+1=2m$ 个.

$\because$ $14^2-14+1<200<14^2+14$，$\therefore$ $a_{200}=14$，而使 $a_n=13$ 的 $n$ 有 26 个.

$\therefore$ 使 $a_n=14$ 的 $n$ 有 $200-2(1+2+\cdots+13)=18$ 个.

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{200}\frac{1}{a_n}=2\times\frac{1}{1}+4\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{3}+\cdots+26\times\frac{1}{13}+18\times\frac{1}{14}=\frac{191}{7}$.

4. 求出所有质数 $p$，使得 $p^4$ 的所有因数和为一个整数的平方.

解：$p^4$ 的所有因数和为 $1+p+p^2+p^3+p^4$.

令 $1+p+p^2+p^3+p^4=n^2(n\in\mathbf{N}_+)$，则 $4+4p+4p^2+4p^3+4p^4=(2n)^2$.

$\therefore$ $(2p^2+p)^2=4p^4+4p^3+p^2<(2n)^2<4p^4+4p^3+8p^2+p^2+4p+4=(2p^2+p+2)^2$.

$\therefore$ $(2n)^2=(2p^2+p+1)^2=4p^4+4p^3+5p^2+2p+1$.

$\therefore$ $4p^4+4p^3+5p^2+2p+1=4p^4+4p^3+4p^2+4p+4$.

$\therefore$ $p^2-2p-3=0$，$\therefore$ $p=3$.

而 $1+3+3^2+3^3+3^4=121=11^2$，符合题意.

5. 求所有的正整数对（$m$，$n$），使 $m^2-4n$，$n^2-4m$ 均为完全平方数.

解：显然 $m^2-4n<m^2$，若 $m^2-4n=(m-1)^2$，则 $2m=4n+1$，矛盾.

$\therefore$ $m^2-4n\leqslant(m-2)^2 \quad\Rightarrow\quad m\leqslant n+1$.

同理 $n\leqslant m+1$，$\therefore$ $n-1\leqslant m\leqslant n+1$.

（1）若 $m=n-1$，则 $n^2-4m=n^2-4n+4=(n-2)^2$，$m^2-4n=m^2-4(m+1)=(m-2)^2-8=t^2(t\in\mathbf{N})$.

故$(m-2+t)(m-2-t)=8$.