

奥数精选 题库



中国女子数学奥林匹克 试题解答

朱华伟 编著



科学出版社

奥数 题库

精选



中国女子数学奥林匹克 试题解答

朱华伟 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书收录了第1届(2002年)至第15届(2016年)CGMO的全部试题,共120道题.对每一道试题本书均给出详解,有的还给出了多种解法,对部分试题还做了评注.试题的评注不拘形式,或是问题的引申和推广,或是多种解法的优化点评,或是试题的来源、背景.其目的是使读者开阔眼界,加深对问题的理解,培养举一反三的能力.

本书可供高中数学资优生,准备高考数学的考生,准备参加高中数学竞赛的选手,中学数学教师,高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及教师,数学爱好者及数学研究工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

中国女子数学奥林匹克试题解答 / 朱华伟编著. —北京: 科学出版社, 2018. 5

(奥数题库精选)

ISBN 978-7-03-056429-0

I. ①中… II. ①朱… III. ①数学—竞赛题—题解 IV. ①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 017418 号

责任编辑: 李 敏 / 责任校对: 彭 涛

责任印制: 肖 兴 / 封面设计: 黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年5月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2018年5月第一次印刷 印张: 10 1/4

字数: 250 000

定价: 56.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

作者简介

朱华伟,二级教授,特级教师,博士生导师

美国加利福尼亚州立大学洛杉矶分校高级访问学者. 湖北省十大杰出青年. 享受国务院政府特殊津贴专家.

兼任国际教育数学协会常务副理事长,国际数学竞赛学术委员会副主席,国际中小学生数学能力检测学术委员会副主席,中国教育数学学会常务副理事长兼秘书长,全国华罗庚金杯赛主试委员. 多次参与中国数学奥林匹克、全国高中数学联赛、女子数学奥林匹克、西部数学奥林匹克及青少年数学国际城市邀请赛的命题工作. 曾任国际数学奥林匹克中国队领队、主教练,率中国队获团体冠军.

在国内外学术期刊上发表论文 100 余篇,出版著作 100 余部.

张景中谈奥数

华伟教授认为，竞赛数学是教育数学的一部分。这个看法是言之成理的。数学要解题，要发现问题、创造方法。年复一年进行的数学竞赛活动，不断地为数学问题的宝库注入新鲜血液，常常把学术形态的数学成果转化为可能用于教学的形态。早期的国际数学奥林匹克试题，有不少进入了数学教材，成为例题和习题。竞赛数学与教育数学的关系，于此可见一斑。

写到这里，忍不住要为数学竞赛说几句话。有一阵子，媒体上面出现不少讨伐数学竞赛的声音，有的教育专家甚至认为数学竞赛之害甚于黄、赌、毒。我看了有关报道后第一个想法是，中国现在值得反对的事情不少，论轻重缓急还远远轮不到反对数学竞赛吧。再仔细读这些反对数学竞赛的意见，可以看出来，他们反对的实际上是某些为牟利而又误人子弟的数学竞赛培训。就数学竞赛本身而言，是面向青少年中很小一部分数学爱好者而组织的活动。这些热心参与数学竞赛的数学爱好者（还有不少数学爱好者参与其他活动，例如青少年创新发明活动、数学建模活动、近年来设立的丘成桐中学数学奖），估计不超过约两亿中小学生的百分之五。从一方面讲，数学竞赛培训活动过热产生的消极影响，和升学考试体制以及教育资源分配过分集中等多种因素有关，这笔账不能算在数学竞赛头上；从另一方面看，大学招生和数学竞赛挂钩，也正说明了数学竞赛活动的成功因而得到认可。对于

青少年的课外兴趣活动，积极的对策不应当是限制堵塞，而是开源分流。发展多种课外活动，让更多的青少年各得其所，把各种活动都办得像数学竞赛这样成功并且被认可，数学竞赛培训活动过热的问题自然就化解或缓解了。

摘自《走进教育数学》丛书总序

前 言

在国内外众多数学奥林匹克竞赛中，参赛者中一向男多女少。于是不少人认为在数学上男生一般比女生强，尽管这种说法缺乏实际研究数据的支持。事实果真如此吗？数学奥林匹克参赛者男女失衡的状况促使了我们举办“中国女子奥林匹克”（CGMO）竞赛。

2002年8月中国数学奥林匹克委员会在珠海举办了首届女子数学奥林匹克竞赛，参加对象是在读高中女生。此项活动的宗旨是为女生展示数学才华搭建舞台，激发女生学习数学的兴趣，提高女生的数学学习水平，促进不同地区女生的相互学习和交流。

著名数学家王元院士题赠中国女子数学奥林匹克：“索菲·热尔曼、索菲娅·柯瓦列夫斯卡娅、埃米·诺特，这些伟大女数学家的名字与她们的突出成就足以证明女子是有很高数学天才的，当然是很适宜于研究数学的”。

CGMO竞赛从2002年第一届到现在已经走过15年的历程。我们通过这15届的活动，为许多优秀的高中女生提供了一个欣赏数学、学习数学、研究数学的平台，同时也培养了一大批杰出的女生。例如，华南师范大学附中胡扬舟是迄今为止唯一一位连续三次获得CGMO金牌的同学。经我推荐，她2009年高中毕业就入读MIT（麻省理工学院），成为MIT的华人学生中知名的杰出女生；华中师范大学一附中陈卓获得2007年的CGMO的第一名，后入选中国国家队，获得2008年国际数学奥林匹克（简称IMO）

金牌，这是继 1995 年武钢三中的朱辰畅同学获金牌后，又一个摘得 IMO 金牌的中国女生；2009 年 CGMO 第二名华中师范大学一附中张敏同学，后入选 2010 年中国国家队，获得 2010 年 IMO 金牌，也入读 MIT；2014 年、2016 年 CGMO 金牌得主深圳中学郑含之同学同时被美国加州理工学院、麻省理工学院和斯坦福大学录取。这些都是我们 CGMO 十几年培养的女生中的优秀代表。

CGMO 每年举行一届，现已经举办 15 届，比赛时间在每年 8 月中旬，每次比赛大约有 40 个代表队参加，每队派 4 名选手，美国，俄罗斯，菲律宾，新加坡，英国，日本，韩国，中国香港、澳门和中国台湾等国家和地区都曾派队参加过。CGMO 与 IMO 接轨，进行两天的笔试，每天上午考 4 道题目，8 点到 12 点，考试时间为 4 小时。从一定意义上讲，数学奥林匹克和体育奥林匹克一样，也是要拼体力的。所以数学奥林匹克不仅是智力的竞赛，也是体能的较量。如果没有好的身体，在数学竞赛中也难以取得好成绩。CGMO 命题的范围和 IMO 一样，涉及代数、几何、组合、数论四个领域，但难度低于 IMO。竞赛评出团体总分第一名和个人金、银、铜牌。个人总分前两名的同学直接进入 IMO 中国国家集训队。从 2012 年起，总分前 12 位（并列时取 13 位）参赛者被直接邀请参加全国中学生数学冬令营（CMO）。

CGMO 命题始终坚持普及与提高相结合的原则。考虑到区域数学教育水平的差异，CGMO 要照顾来自全国不同省市代表队的同学，同时还要选拔 12 位同学参加全国中学生数学冬令营，所以既要有较容易的题目，也要有较难的题目。迄今为止，我们已经命制了 15 届的 CGMO 试题，每届 8 道题。在这 120 道题中，至今还没有一道题难住所有同学。每道题一定有同学能做出来，只是

人数多少不同而已。

比赛要有平常心，CGMO 是一个高中生的数学活动，活动的目的是为大家将来的发展打下一定的基础，而不是一生的全部。它仅仅为优秀学生在高中阶段数学学习提供了努力目标，但人生的道路漫长，应该有更高远的奋斗目标。在尊重教育规律的前提下，把这项活动做好，我们要客观地、辩证地、历史地、逻辑地、以国际的眼光看待和审视数学奥林匹克。我认为这样就会对竞赛有平常心，正确对待得与失。

为了丰富参赛选手的生活，培养她们的创造能力和团队合作精神，CGMO 特设计了女子健美操比赛，这是我们在珠海举办第一届 CGMO 时策划的，一直坚持到今天。健美操比赛评出团体一等奖、二等奖、三等奖、最佳表演奖和最佳创意奖。健美操比赛的目的是要培养参赛者的团队精神，检测各参赛队的综合素质和精神面貌，让参赛者不仅追求数学好，还要身体好；不仅懂得欣赏数学的美，还要学会欣赏更多方面的美。根据每年承办 CGMO 学校的办学特色，我们还倡议承办学校增加一些人文体验，使大家在学习数学，培养科学精神的同时，也培养人文精神，使人文精神与科学精神相互融合，促进参赛者的全面发展。

感谢中国数学会数学奥林匹克委员会领导裘宗沪教授、王杰教授、周青教授、吴建平教授对我的信任和鼓励，使我能够持续从 2002 年至 2015 年负责 CGMO 工作；感谢长期参加 CGMO 命题、阅卷和评奖工作的陈永高教授、熊斌教授、梁应德博士、李伟固教授、李胜宏教授、冷岗松教授、王新茂教授、冯祖鸣博士、叶中豪教授、纪春岗教授、刘诗雄特级教师、边红平特级教师、付云皓博士、郑焕博士、王彬博士、冷福生博士、袁汉辉博士等，

及曾经参加过 CGMO 的命题、阅卷和评奖工作的裘宗沪教授、潘承彪教授、苏淳教授、刘江枫教授、陶平生教授、张正杰教授、吴伟朝教授、张同君教授、钱展望特级教师、冯跃峰特级教师、祁建新特级教师、瞿振华博士、艾颖华博士、邹宇博士、何忆捷博士、施齐焉博士等，他们的辛勤劳动和高深的数学造诣，为参赛选手提供了许多新颖有趣、形式优美、解法奇妙、背景深刻和富于创新的好题；感谢历届承办 CGMO 的学校珠海之星实验学校（人大附中珠海校区）、武钢三中、南昌市第二中学、东北师范大学附属中学、新疆建设兵团二中、华中师范大学第一附属中学、广东省中山纪念中学、福建省厦门市双十中学、石家庄市第二中学、深圳市第三高级中学、广东实验中学、浙江省镇海中学、华南师范大学中山附属中学、深圳市高级中学、北京四中等，是这些学校领导和老师卓越的组织工作，给参赛选手提供了良好的生活、学习、参赛环境和丰富多彩的活动，使每届活动能圆满成功。

本书收录了第 1 届（2002 年）至第 15 届（2016 年）CGMO 的全部试题，共 120 道题。对每一道试题本书均给出详解，有的还给出了多种解法，对部分试题还做了评注。试题的评注不拘形式，或是问题的引申和推广，或是多种解法的优化点评，或是试题的来源、背景。其目的是使读者开阔眼界，加深对问题的理解，培养举一反三的能力。

在本书编写的过程中，编者参考了一些中外文书刊，在此向原作者表示衷心的感谢。对于本书存在的问题，恳请读者不吝赐教。

朱华伟

2018 年 1 月

目 录

张景中谈奥数

前言

第 1 章 2002 年第 1 届中国女子数学奥林匹克	1
1.1 2002 中国女子数学奥林匹克试题	1
1.2 2002 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	2
第 2 章 2003 年第 2 届中国女子数学奥林匹克	10
2.1 2003 中国女子数学奥林匹克试题	10
2.2 2003 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	11
第 3 章 2004 年第 3 届中国女子数学奥林匹克	17
3.1 2004 中国女子数学奥林匹克试题	17
3.2 2004 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	18
第 4 章 2005 年第 4 届中国女子数学奥林匹克	27
4.1 2005 中国女子数学奥林匹克试题	27
4.2 2005 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	28
第 5 章 2006 年第 5 届中国女子数学奥林匹克	38
5.1 2006 中国女子数学奥林匹克试题	38
5.2 2006 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	39
第 6 章 2007 年第 6 届中国女子数学奥林匹克	47
6.1 2007 中国女子数学奥林匹克试题	47
6.2 2007 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	48
第 7 章 2008 年第 7 届中国女子数学奥林匹克	60
7.1 2008 中国女子数学奥林匹克试题	60
7.2 2008 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	61

第 8 章	2009 年第 8 届中国女子数学奥林匹克	69
8.1	2009 中国女子数学奥林匹克试题	69
8.2	2009 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	71
第 9 章	2010 年第 9 届中国女子数学奥林匹克	77
9.1	2010 中国女子数学奥林匹克试题	77
9.2	2010 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	79
第 10 章	2011 年第 10 届中国女子数学奥林匹克	88
10.1	2011 中国女子数学奥林匹克试题	88
10.2	2011 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	90
第 11 章	2012 年第 11 届中国女子数学奥林匹克	102
11.1	2012 中国女子数学奥林匹克试题	102
11.2	2012 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	104
第 12 章	2013 年第 12 届中国女子数学奥林匹克	113
12.1	2013 中国女子数学奥林匹克试题	113
12.2	2013 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	115
第 13 章	2014 年第 13 届中国女子数学奥林匹克	122
13.1	2014 中国女子数学奥林匹克试题	122
13.2	2014 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	124
第 14 章	2015 年第 14 届中国女子数学奥林匹克	132
14.1	2015 中国女子数学奥林匹克试题	132
14.2	2015 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	134
第 15 章	2016 年第 15 届中国女子数学奥林匹克	143
15.1	2016 中国女子数学奥林匹克试题	143
15.2	2016 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注	145

第1章 2002年第1届中国女子数学奥林匹克

2002年第1届中国女子数学奥林匹克于2002年8月15日至8月19日在广东省珠海市珠海希望之星实验学校举办. 全国各地100多名女生参加了这次盛会. 中国香港、中国澳门和菲律宾也派队参加了这次有意义的活动. 参赛选手不仅在两天的竞赛中表现了自己的数学才能, 而且各队之间还在竞赛间隙进行了健美操友谊比赛. 竞赛结束后, 获得满分的2位女生直接进入了2003年IMO中国国家集训队.

王元院士为这次女子数学奥林匹克题赠: “索菲·热尔曼、索菲娅·柯瓦列夫斯卡娅、埃米·诺特, 这些伟大女数学家的名字与她们的突出成就足以证明女子是有很高数学天才的, 当然是很适宜于研究数学的.”

本次竞赛主试委员会由潘承彪、裘宗沪、李胜宏、熊斌、吴伟朝、钱展望、祁建新组成.

1.1 2002 中国女子数学奥林匹克试题

第一天 2002年8月16日 上午8:00–12:00 广东省珠海市

1. 求出所有的正整数 n , 使得 $20n+2$ 能整除 $2003n+2002$. (吴伟朝供题)
2. 夏令营有 $3n$ (n 是正整数) 位女同学参加, 每天都有 3 位女同学担任值勤工作. 夏令营结束时发现这 $3n$ 位女同学中的任何两位, 在同一天担任值勤工作恰好是一次.

(1) 问: $n=3$ 是否存在满足题意的安排? 证明你的结论;

(2) 求证: n 是奇数. (刘江枫供题)

3. 试求出所有的正整数 k , 使得对任意能满足不等式

$$k(ab+bc+ca) > 5(a^2+b^2+c^2)$$

的正数 a, b, c , 一定存在三边长分别为 a, b, c 的三角形. (钱展望供题)

4. 圆 O_1 和圆 O_2 相交于 B, C 两点, 且 BC 是圆 O_1 的直径. 过点 C 作圆 O_1 的切线交圆 O_2 于另一点 A , 连接 AB , 交圆 O_1 于另一点 E , 连接 CE 并延长, 交圆 O_2

于点 F , 设点 H 为线段 AF 内的任一点, 连接 HE 并延长, 交圆 O_1 于点 G , 连接 BG 并延长, 与 AC 的延长线交于 D 点, 求证: $\frac{AH}{HF} = \frac{AC}{CD}$. (熊斌供题)

第二天 2002 年 8 月 17 日 上午 8:00-12:00 广东省珠海市

5. 设 $P_1, P_2, \dots, P_n (n \geq 2)$ 是 $1, 2, \dots, n$ 的任意一个排列, 求证:

$$\frac{1}{P_1+P_2} + \frac{1}{P_2+P_3} + \dots + \frac{1}{P_{n-2}+P_{n-1}} + \frac{1}{P_{n-1}+P_n} > \frac{n-1}{n+2}. \quad (\text{裘宗沪供题})$$

6. 求所有的正整数对 (x, y) , 满足 $x^y = y^{x-y}$. (潘承彪供题)

7. 锐角 $\triangle ABC$ 的三条高分别为 AD, BE, CF , 求证: $\triangle DEF$ 的周长不超过 $\triangle ABC$ 的周长的一半. (祁建新供题)

8. 设 $A_1, A_2, \dots, A_8$ 是平面上任意取定的 8 个点, 对平面上任意取定的一条有向直线 l , 设 $A_1, A_2, \dots, A_8$ 在该直线上的射影分别是 $P_1, P_2, \dots, P_8$, 如果这 8 个射影两两不重合, 依直线 l 的方向依次排列为 $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_8}$, 这样, 就得到了 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 的一个排列 $i_1, i_2, \dots, i_8$ (在图 1-1 中, 这个排列为 $2, 1, 8, 3, 7, 4, 6, 5$). 设这 8 个点对平面上所有有向直线作射影后, 得到不同的排列的个数为 $N_8 = N(A_1, A_2, \dots, A_8)$, 试求 N_8 的最大值. (苏淳供题)

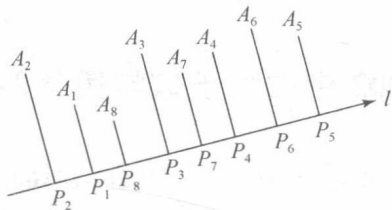


图 1-1

1.2 2002 中国女子数学奥林匹克试题解答与评注

1. 解法 1 显然, $2 \mid n$. 令 $n = 2m (m \in \mathbf{N}^*)$, 则

$$(20m+1) \mid (2003m+1001).$$

又因 $2003m+1001 = 100(20m+1) + 3m+901$, 故 $(20m+1) \mid (3m+901)$.

易知 $\frac{3m+901}{20m+1} = 1, 2, 3, 4$ 时都无正整数解. 从而 $\frac{3m+901}{20m+1} \geq 5$, 即 $m \leq \frac{896}{97} <$

10. 但对 $m = 1, 2, \dots, 9$ 逐一检验知 $(20m+1) \nmid (3m+901)$. 所以满足题设要求的 n 不存在.

解法2 同上, $(20m+1) \mid (2003m+1001)$.

由 $(20m+1, 20) = 1$, $(2003m+1001) \times 20 - (20m+1) \times 2003 = 18017$ 可知, $(20m+1) \mid 18017$. 注意到 $18017 = 43 \times 419$, 且 43、419 为素数, 故 $20m+1 = 43$ 或 419 或 18017, 但均无正整数解. 所以, 不存在满足题设要求的 n .

2. 证明 (1) 当 $n=3$ 时, 存在满足题意的安排. 具体安排如下(把 9 位女同学记为 $1, 2, \dots, 9$):

$(1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (1, 8, 9), (2, 4, 6), (2, 7, 8)$

$(2, 5, 9), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 6, 9), (4, 7, 9), (5, 6, 8).$

(2) 任意选一位女同学, 因为她和其他每一位女同学恰好值勤一次, 并且每天有 3 人值勤, 所以, 其余 $3n-1$ 位女同学两两成对.

故 $2 \mid (3n-1)$. 因此, n 是奇数.

3. 解 因 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$, 故 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

可知 $k > 5$. 注意到 k 为正整数, 因此, $k \geq 6$.

由于不存在边长分别为 1、1、2 的三角形, 依题设, 有

$$k(1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2) \leq 5(1^2 + 1^2 + 2^2),$$

即 $k \leq 6$.

以下证明 $k=6$ 满足题设要求.

不妨设 $a \leq b \leq c$, 则

$$6(ab + bc + ca) > 5(a^2 + b^2 + c^2),$$

即

$$5c^2 - 6(a+b)c + 5a^2 + 5b^2 - 6ab < 0.$$

$$\Delta = [6(a+b)]^2 - 4 \times 5(5a^2 + 5b^2 - 6ab)$$

$$= 64[-(a-b)^2 + ab]$$

$$\leq 64ab \leq 64\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 16(a+b)^2.$$

因此,

$$c < \frac{6(a+b) + \sqrt{\Delta}}{10} \leq \frac{6(a+b) + 4(a+b)}{10} = a+b.$$

这表明以 a, b, c 为长度的三边可构成三角形.

评注 以下是证明 $k=6$ 满足题意的其他一些做法.

方法1 不妨设 $a \leq b \leq c$. 若 $c \geq a+b$, 则

$$\begin{aligned} & 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 - 6ab - 6bc - 6ca \\ &= 4(a-b)^2 + [5c - (a+b)][c - (a+b)] \geq 0, \end{aligned}$$

与 $6(ab+bc+ca) > 5(a^2+b^2+c^2)$ 矛盾. 故 $c < a+b$.

方法 2 构造函数 $f(x) = 5x^2 - 6(a+b)x + 5a^2 + 5b^2 - 6ab$, 则 $f(c) < 0$.

因 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{3}{5}(a+b), +\infty\right)$ 递增, 且

$f(a+b) = 5(a+b)^2 - 6(a+b)(a+b) + 5a^2 + 5b^2 - 6ab = 4(a-b)^2 \geq 0$,
故 $c < a+b$.

4. 证法 1 如图 1-2, 因 BC 是圆 O_1 的直径, AC 与圆 O_1 相切于 C , 故 $\angle BEC = \angle FEA = \angle BCA = \angle BCD = 90^\circ$.

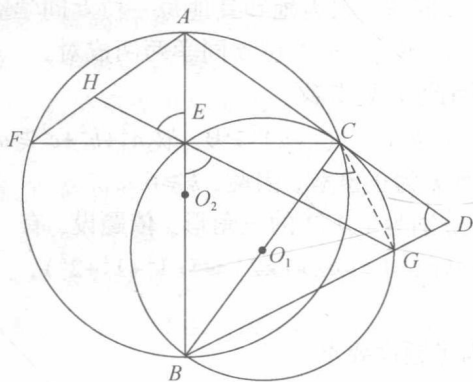


图 1-2

设 $\angle ABC = \alpha$, $\angle CBD = \beta$, 则

$$\angle AFC = \alpha, \angle CEG = \beta.$$

根据正弦定理, 有

$$\frac{AH}{\sin \angle HEA} = \frac{HE}{\sin \angle HAE}, \frac{HF}{\sin \angle FEH} = \frac{HE}{\sin \angle HFE},$$

即

$$\frac{AH}{HE} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}, \frac{HF}{HE} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}.$$

两式相除得

$$\frac{AH}{HF} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}. \quad (1-1)$$

在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\frac{AC}{BC} = \tan \alpha$;

在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $\frac{CD}{BC} = \tan \beta$.

两式相除得

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}, \quad (1-2)$$

由式(1-1)、式(1-2)知 $\frac{AH}{HF} = \frac{AC}{CD}$.

证法2 因为 BC 是圆 O_1 的直径, ACD 为切线. 所以 $BC \perp AD$, $\angle ACB = 90^\circ$, 于是 AB 是圆 O_2 的直径.

又 $\angle BEC = 90^\circ$, 即 $AB \perp FC$.

故 $\angle FAB = \angle CAB$.

连接 CG , 则 $CG \perp BD$, 于是

$$\angle ADB = \angle BCG = \angle BEG = \angle AEH.$$

所以 $\triangle AHE \sim \triangle ABD$,

$$\frac{AH}{AE} = \frac{AB}{AD},$$

$$\text{即 } AH \cdot AD = AB \cdot AE.$$

由切割线定理可得 $AC^2 = AE^2 \cdot AB$.

故 $AH \cdot AD = AC^2 = AC \cdot AF$,

即

$$\frac{AH}{AF} = \frac{AC}{AD},$$

因此,

$$\frac{AH}{HF} = \frac{AC}{CD}.$$

5. 证明 根据柯西不等式, 有

$$\left(\frac{1}{P_1 + P_2} + \cdots + \frac{1}{P_{n-1} + P_n} \right) [(P_1 + P_2) + \cdots + (P_{n-1} + P_n)] \geq (n-1)^2.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{1}{P_1 + P_2} + \cdots + \frac{1}{P_{n-1} + P_n} &\geq \frac{(n-1)^2}{2(P_1 + \cdots + P_n) - P_1 - P_n} \\ &\geq \frac{(n-1)^2}{n(n+1) - 3} = \frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2) - 1} > \frac{(n-1)^2}{(n-1)(n+2)} = \frac{n-1}{n+2}. \end{aligned}$$

6. 解 若 $x=1$, 则 $y=1$; 若 $y=1$, 则 $x=1$; 若 $x=y$, 则 $x=y=1$. 故只需讨论 $x > y \geq 2$ 的情形. 由方程得

$$1 < \left(\frac{x}{y} \right)^y = y^{x-2y}.$$

故 $x > 2y, y \mid x$.

设 $x = ky$, 则 $k \geq 3, k \in \mathbf{N}$. 于是, $k^y = y^{(k-2)y}$, 有 $k = y^{k-2}$.