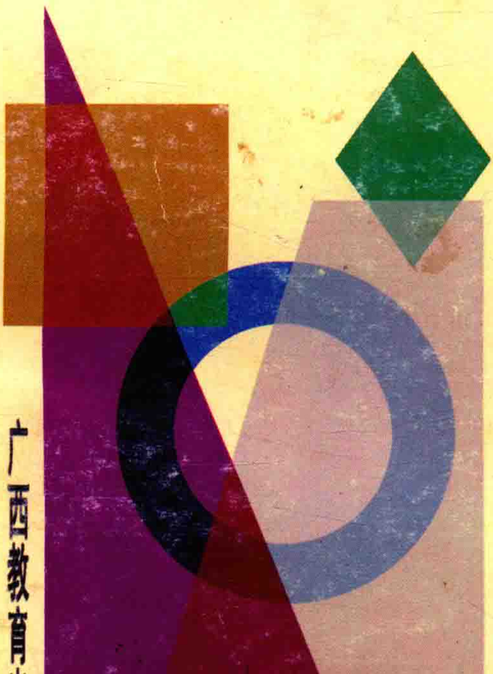
PINGMIANJIHE

妙趣横生的

平面几何多证法

李锡初 编著



广西教育出版社

妙趣横生的平面几何多证法

李锡初　编著

广西教育出版社

妙趣横生的平面几何多证法

李锡初　编著

☆

广西教育出版社出版

南宁市鲤湾路 8 号

邮政编码:530022　电话:5850219

广西新华书店发行　南宁市彩印厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　14 印张　310 千字

1998 年 3 月第 1 版　1998 年 3 月第 1 次印刷

印数:1－2000 册

ISBN 7-5435-2648-4/G·2032　定价:13.30 元

如发现印装质量问题,影响阅读,请与本厂联系调换。

序

灵活的思维是创新的必备条件.锻炼灵活的思维的形式丰富多彩.有人说,数学是锻炼思维的体操.我则认为,几何是锻炼思维的技巧体操.在几何中,证明题的多证法的探求更是引人入胜的锻炼思维的最简便的形式.所谓多证法,就是对同一命题给出各种不同的证明方法.客观事物有着千丝万缕的联系,不是孤立的.命题的条件和结论的联系是多方面的,由条件推导出结论,路往往不是唯一的一条.同一命题,由于对它的理解的不同,必然就存在着多种的认识途径.以不同的方式、从不同的视点,按不同的理解去观察、把握事物,便会进入异彩纷呈的境界.客观事物的相互联系的存在,为我们寻求同一命题的多种证明提供了可能性.正因为这一可能性,才使得同一命题的证明绚丽多彩,具有巨大的魅力.因而,我们不应满足于某一命题的已经给出的一种证明,要自觉地去探索更新颖、更简洁、更漂亮、更绝妙的证明.有意识地对同一证明题的各种证法的探求,可以培养以不同方式、从不同的侧面了解、认识、揭示事物的能力,可以提高观察、分析能力,逐步形成灵活多变思维的良好习惯,以及不断创新的意识.

几何题的证明千姿百态.怎样去寻求一个命题的多证法没有一个固定的万能的模式,但是,它也绝不是不可捉摸的,总存在着一些行之有效的探求方法.本书为对此方面感兴趣的读者提供这方面的一些思路.此书分为二个部分:一、多证法的探求的方法;二、80道平面几何题的多证法.书内的这些

证法，多是笔者提出的.我们希望读者从中得到启迪.

本书的编写、出版，得到赵汝明先生热诚的帮助，藉此书付梓之际，向他致以衷心的感谢.

编著者

目　录

一、探求多种证明的方法 …………………… (1)
　1. 扩大、缩小法 ……………………………… (1)
　2. 组合、分解法 ……………………………… (13)
　3. 等量替换法 ………………………………… (32)
二、证线段不等 ……………………………… (51)
三、证线段相等 ……………………………… (90)
四、证线段的比例关系 ……………………… (283)
五、证角的相等 ……………………………… (370)
六、证线段平行、垂直 ……………………… (431)

一、探求多种证明的方法

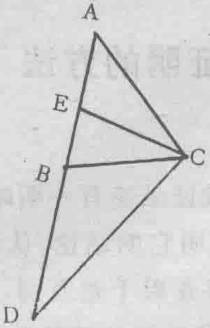
证明一个命题，首先必须对欲证结论有一明晰的了解、认识. 在此基础上，再去探求怎样证明它的结论. 认识的角度的差异，对于欲证结论的理解也就存在着千差万别，于是就产生了各种各样的证明思路. 要能引发对欲证结论的多种理解的萌生，应对欲证结论在其形式、意义上加以等价变换. 每一种欲证结论的形式或意义上的改变，就有可能产生一种新的证明思路. 在寻求证明的过程中，等价变换不只一次，有时要多次地进行. 欲证结论的等价变换的方法，使用最多的是扩大、缩小，组合、分解，等量替换. 以下，我们逐一介绍.

1. 扩大、缩小法

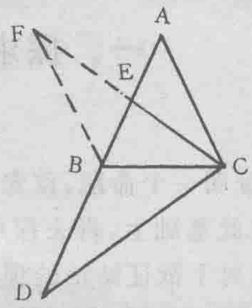
扩大、缩小的方法是，将欲证的量扩大或缩小，然后证扩大(或缩小)的量的关系. 量的扩大、缩小，有三种：一是将欲证结论中小的量扩大，二是将大的量缩小，三是同时扩大(或缩小). 从每次变形，可得到一种证明思路.

例：在等腰$\triangle ABC$中，D为AB延长线上一点，且$BD=AB$. E为AB的中点. 求证：$CD=2CE$.

分析1 欲证$CD=2CE$，在原图里，只有CE，没有出现$2CE$. 将CE扩大二倍，设法在原图上给出$2CE$，再证之与CD相等. 根据不同的作出$2CE$的方式，从而获得以下各种的证明. 先在CE延长线方向上作出$2CE$.



图(1)



图(2)

证法1 在 CE 的延长线上取 F，使 $EF=CE$. 连结 B、F. 作出图(2).

$\because$ E 为 AB 的中点，

$\therefore$ $BE=AE$.

在 $\triangle BFE$、$\triangle ACE$ 中，

$BE=AE, EF=CE, \angle BEF=\angle AEC$，

$\therefore$ $\triangle BFE\cong\triangle ACE$.

$\therefore$ $BF=AC, \angle FBE=\angle CAE$.

$\because$ $\triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore$ $AC=AB; \angle ABC=\angle BCA$.

因此 $BF=AB$.

又 $BD=AB$，$\therefore BF=BD$.

$\because$ $\angle FBC=\angle FBE+\angle ABC$， $\angle CBD=\angle CAE+\angle BCA$，

$\therefore$ $\angle FBC=\angle CBD$.

又$\because$ $BF=BD, BC=BC$，

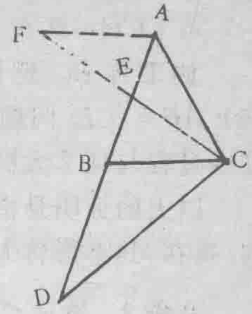
$\therefore$ $\triangle BCF\cong\triangle BCD$.

$\therefore$ $CF=CD$.

∵ $CF=2CE$,

∴ $CD=2CE$.

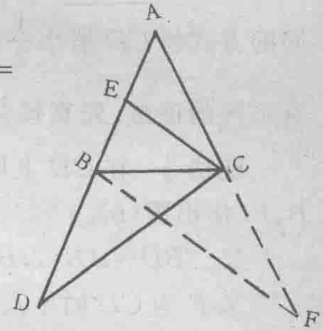
如果延长 CE 至 F,使 $EF=CF$. 连结 A、F. 作出图(3). 则可以通过证 $\triangle BCD\cong\triangle ACF$ 得出 $CD=2CE$. 其证明过程与证明 1 相似.



图(3)

分析 2 延长 AC 至 F,使 $CF=AC$. 连结 B、F,则 $BF=2CE$. 证 $CD=BF$,可证$\triangle BCD\cong\triangle BCF$ 或证$\triangle ACD\cong\triangle ABF$.

证法 2 延长 AC 至 F,使 $CF=AC$. 连结 B、F. 作出图(4).



图(4)

∵ $CF=AC$,

∴ C 为 AF 的中点.

又 E 为 AB 的中点,

因此 $BF=2CE$.

∵ $\triangle ABC$ 为等腰三角形,

∴ $AC=AB$, $\angle ABC=\angle BCA$.

∵ $CF=AC$, $BD=AB$,

∴ $CF=BD$.

∵ $\angle FCB=\pi-\angle BCA$,

$\angle CBD=\pi-\angle ABC$,

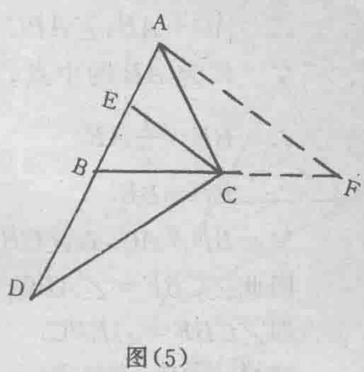
∴ $\angle FCB=\angle CBD$.

又∵ $CF=BD$, $BC=BC$,

∴ $\triangle BCF\cong\triangle BCD$.

∴ $BF=CD$.

∵ $BF=2CE$,



图(5)

$\therefore\ CD=2CE$.

如果将 BC 延长至 F，使 $CF=BC$. 连结 A、F. 作出图(5). $AF=2CE$. 问题转化为证 $CD=AF$. 证$\triangle BCD\cong\triangle ACF$. 证明过程与证 2 大同小异.

以上的证明是由扩大欲证结论中的小的量的思路而得到的. 现在，我考虑将大的量缩小.

分析 3 欲证 $CD=2CE$. 将之变形为$\frac{1}{2}CD=CE$. 在原图上没有$\frac{1}{2}CD$. 作出$\frac{1}{2}CD$，再证它与 CE 相等. 由于可以用不同的方式将 CD 缩小$\frac{1}{2}$，因此，按不同的$\frac{1}{2}CD$ 给出的方式，就有不同的证法. 先直接在 CD 上取$\frac{1}{2}CD$.

证法 3 在 CD 上取 F，使 F 平分 CD，即 $CF=DF$. 连结 B、F. 作出图(6).

$\because\ BD=AB$，$\therefore B$ 为 AD 的中点.

又 F 为 CD 的中点，

$\therefore\ BF=\frac{1}{2}AC$，$BF\parallel AC$.

$\because\ \triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore\ AC=AB$，$\angle ABC=\angle BCA$.

$\because\ E$ 为 AB 的中点，

$\therefore\ BE=\frac{1}{2}AB$.

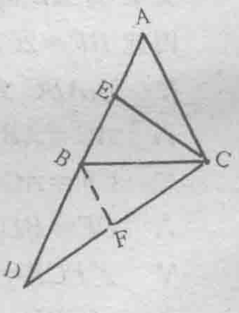
$\therefore\ BF=BE$.

$\because\ BF\parallel AC$，$\therefore\angle CBF=\angle BCA$.

因此$\angle CBF=\angle ABC$.

即$\angle CBF=\angle EBC$.

又$\because\ BF=BE$，$BC=BC$，



图(6)

$\therefore\ \triangle BCF \cong \triangle BCE.$

$\therefore\ CF=CE.$

$\because\ CF=\frac{1}{2}CD,\therefore \frac{1}{2}CD=CE.$

因而 $CD=2CE.$

我们还可以通过证 $DF=CE$，而得到我们欲证的结论.

证法 4 如图(6). $\because BD=AB,\therefore B$ 为 AD 的中点.

又 F 为 CD 的中点，

因此 $BF=\frac{1}{2}AC, BF /\!/ AC.$

$\because\ \triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore\ AC=AB.$

$\because\ BD=AB,\therefore BD=AC.$

$\because\ E$ 为 AB 的中点，$\therefore AE=\frac{1}{2}AB.$

因此 $BF=AE.$

$\because\ BF /\!/ AC,\therefore \angle FBD=\angle CAE.$

又$\because\ BD=AC, BF=AE,$

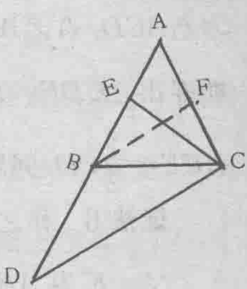
$\therefore\ \triangle BDF \cong \triangle ACE.$

$\therefore\ DF=CE.$

$\because\ DF=\frac{1}{2}CD,\therefore \frac{1}{2}CD=CE.$

因此 $CD=2CE.$

分析 5 利用中点连线的性质给出 $\frac{1}{2}CD.$



图(7)

证法 5 取 AC 的中点 F. 连结 B、F. 作出图(7).

$\because\ BD=AB,\therefore B$ 为 AD 的中点.

又 F 为 AC 的中点，

$\therefore \quad BF=\frac{1}{2}CD.$

$\because \quad \triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\therefore \quad AC=AB, \angle BCA=\angle ABC.$ 即 $\angle BCF=\angle EBC.$

$\because \quad E$、F 分别为 AB、AC 的中点，

$\therefore \quad BE=\frac{1}{2}AB, CF=\frac{1}{2}AC.$

因此 $CF=BE.$

又 $\because \quad \angle BCF=\angle EBC, BC=BC,$

$\therefore \quad \triangle BCF \cong \triangle BCE.$

$\therefore \quad BF=CE.$

又 $\because \quad BF=\frac{1}{2}CD,$

$\therefore \quad CE=\frac{1}{2}CD.$

$\therefore \quad CD=2CE.$

分析 6 E 为 AB 的中点，因而 $AE=\frac{1}{2}AB$. $\triangle ABC$ 为等腰三角形，$\therefore AB=AC$. 由题设 $BD=AB$，推得 $AD=2AB$. 于是 $AE \cdot AD=\frac{1}{2}AB \cdot 2AB=AB^2=AC^2$. 由此可推出 $\triangle ACE \backsim \triangle ACD$. $\therefore \angle ADC=\angle ECA$. 过 C 作 $\angle DCF=\angle CAE$. 不难推出 $\triangle CDF \backsim \triangle ACE$. $\frac{CF}{CD}=\frac{AE}{AC}$，且 $AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AC$，$\therefore CF=\frac{1}{2}CD$. 问题便转化为证 $CF=CE$.

证法 6 作 $\angle DCF=\angle CAE$. 作出图(8).

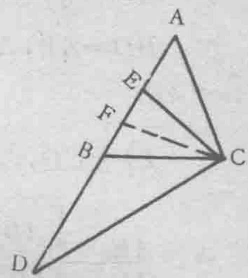
$\because \quad E$ 为 AB 的中点，$\therefore AE=\frac{1}{2}AB.$

$\because \quad \triangle ABC$ 为等腰三角形，$\therefore AC=AB.$

$\because\ BD=AB, \therefore AD=2AB.$

于是 $AE\cdot AD=\frac{1}{2}AB\cdot 2AB=AB^2=AC^2.$

因此$\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}.$



图(8)

又$\because\ \angle CAE=\angle CAD,$

$\therefore\ \triangle ACE\backsim\triangle ACD.$

$\therefore\ \angle ECA=\angle ADC.$

$\because\ \angle FDC=\angle ADC,$

$\therefore\ \angle FDC=\angle ECA.$

又$\because\ \angle DCF=\angle CAE,$

$\therefore\ \triangle CDF\backsim\triangle ACE.$

$\therefore\ \frac{CF}{CD}=\frac{AE}{AC}.$

$\because\ AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AC,\quad \therefore\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}.$

因此 $CF=\frac{1}{2}CD.$

又$\because\ \angle CEF=\angle CAE+\angle ECA=\angle DCF+\angle FDC,$

$\angle EFC=\angle DCF+\angle FDC,$

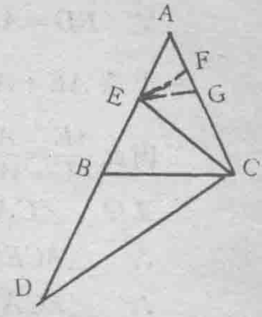
$\therefore\ \angle CEF=\angle EFC.$

$\therefore\ CF=CE.$ 因此$\frac{1}{2}CD=CE$，即 $CD=2CE.$

分析7 欲证结论 $CD=2CE$. 将两端分别乘以$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{4}CD=\frac{1}{2}CE$. 于是将欲证的两量同时缩小. 欲证原结论成立，只须证缩小的量的关系，即证$\frac{1}{4}CD=\frac{1}{2}CE$. 原图上没有$\frac{1}{4}CD$，$\frac{1}{2}CE$，设法引辅助线将它们分别作出.

证法7 过 E 作 CD 的平行线，交 AC 于 F. 作$\angle CEG=$

$\angle FAE$. 作出图(9).



图(9)

$\because$ E 为 AB 的中点，

$\therefore$ $AE=\frac{1}{2}AB$.

$\because$ $BD=AB$, $\therefore AD=AB+BD=2AB$.

$\because$ $EF\parallel CD$, $\therefore \frac{EF}{CD}=\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AD}$.

$\because$ $\frac{AE}{AD}=\frac{\frac{1}{2}AB}{2AB}=\frac{1}{4}$, $\therefore \frac{EF}{CD}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{4}$.

因此，$EF=\frac{1}{4}CD$, $AF=\frac{1}{4}AC$.

$\because$ $\triangle ABC$ 为等腰三角形，$\therefore AC=AB$.

因此，$AF=\frac{1}{4}AB$.

$\because$ $\frac{AE}{AC}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AB}=\frac{1}{2}$, $\frac{AF}{AE}=\frac{\frac{1}{4}AB}{\frac{1}{2}AB}=\frac{1}{2}$,

$\therefore$ $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AE}$.

又$\because$ $\angle FAE=\angle CAE$,

$\therefore$ $\triangle AEF\backsim\triangle ACE$.

$\therefore$ $\angle AEF=\angle ECA$.

$\because$ $\angle ECG=\angle ECA$, $\therefore \angle ECG=\angle AEF$.

又$\because$ $\angle CEG=\angle FAE$, $\therefore \triangle CEG\backsim\triangle AEF$.

$\therefore$ $\frac{EG}{CE}=\frac{AF}{AE}$.

由上，$\frac{AF}{AE}=\frac{1}{2}$, $\therefore \frac{EG}{CE}=\frac{1}{2}$.

因此 $EG=\frac{1}{2}CE$.

$\because\ \ \angle EGF=\angle CEG+\angle ECG=\angle FAE+\angle AEF$,

$\angle GFE=\angle FAE+\angle AEF$,

$\therefore\ \ \angle EGF=\angle GFE$.

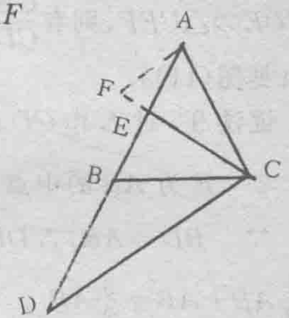
$\therefore\ \ EF=EG$.

即 $\frac{1}{4}CD=\frac{1}{2}CE$.

$\therefore\ \ CD=2CE$.

分析 8 如果我们将欲证结论 $CD=2CE$ 两边同时缩小 $\frac{1}{CE}$,则欲证结论变形为 $\frac{CD}{CE}=2$. 涉及线段比例,考虑通过证三角形相似而达到欲证结论.

证法 8 作 $\angle CAF=\angle DCE$. AF 交 CE 的延长线于 F. 得图(10).



图(10)

$\because\ \ E$ 为 AB 的中点,

$\therefore\ \ AE=\frac{1}{2}AB$.

又 $\because\ \ BD=AB$,

$\therefore\ \ AD=AB+BD=2AB$.

$\because\ \ \triangle ABC$ 为等腰三角形,

$\therefore\ \ AC=AB$.

$\because\ \ \frac{AE}{AC}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AB}=\frac{1}{2},\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{2AB}=\frac{1}{2}$,

$\therefore\ \ \frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}$.

又 $\because\ \ \angle CAD=\angle CAE$,

$\therefore\ \ \triangle ACD\backsim\triangle ACE$.

$\therefore\ \angle ADC=\angle ECA.$

即$\angle EDC=\angle FCA.$

又$\because\ \angle CAF=\angle DCE,$

$\therefore\ \triangle CDE\backsim\triangle ACF.$

$\therefore\ \dfrac{CE}{CD}=\dfrac{AF}{AC}$;$\angle AFC=\angle CED.$

$\because\ \angle AFE=\angle AFC,\angle FEA=\angle CED,\therefore\angle AFE=\angle FEA.$

因此 $AF=AE.$

$\because\ \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{2},\therefore\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{1}{2}.$

因而 $CD=2CE.$

分析 9 过 E 作 CD 的平行线,交 AC 于 F. 如证得$\triangle CDE\backsim\triangle CEF$,则有$\dfrac{CE}{CD}=\dfrac{CF}{DE}$. 证$\dfrac{CF}{DE}=2$,则欲证的结论成立.(见图(11)).

证法 9 过 E 作 CD 的平行线,交 AC 于 F.

$\because\ E$ 为 AB 的中点, $\therefore AE=BE=\dfrac{1}{2}AB.$

$\because\ BD=AB,\therefore DE=BE+BD$

$=\dfrac{1}{2}AB+AB=\dfrac{3}{2}AB.$

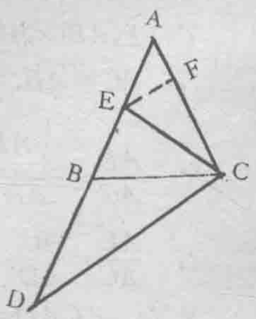
$\because\ \triangle ABC$ 为等腰三角形,

$\because\ AC=AB.$

$\because\ EF/\!/CD,$

$\therefore\ \dfrac{AF}{CF}=\dfrac{AE}{DE},\angle FEC=\angle DCE.$

$\because\ \dfrac{AE}{DE}=\dfrac{\frac{1}{2}AB}{\frac{3}{2}AB}=\dfrac{1}{3},$



图(11)

$\therefore \quad \dfrac{AF}{CF}=\dfrac{1}{3}.$

因此$\dfrac{AF+CF}{CF}=\dfrac{1+3}{3}=\dfrac{4}{3}.$

即$\dfrac{AC}{CF}=\dfrac{4}{3}.\therefore CF=\dfrac{3}{4}AC.$

因而 $CF=\dfrac{3}{4}AB.$

$\because \quad AD=AB+BD=2AB,\therefore \dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AB}{2AB}=\dfrac{1}{2}.$

又$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{\frac{1}{2}AB}{AB}=\dfrac{1}{2},\therefore \dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AE}{AC}.$

又$\because \quad \angle CAE=\angle CAD,$

$\therefore \quad \triangle ACE \backsim \triangle ACD.$

$\therefore \quad \angle ECA=\angle ADC.$

即$\angle ECF=\angle EDC.$

又$\because \quad \angle FEC=\angle DCE,$

$\therefore \quad \triangle CEF \backsim \triangle CDE.$

$\therefore \quad \dfrac{CE}{CD}=\dfrac{CF}{DE}.$

$\because \quad \dfrac{CF}{DE}=\dfrac{\frac{3}{4}AB}{\frac{3}{2}AB}=\dfrac{1}{2},\therefore \dfrac{CE}{CD}=\dfrac{1}{2}.$

因此 $CD=2CE.$

分析 10 从扩大欲证结论的量去寻求证明. 分别作 $AF\perp CD, AG\perp CE$. 于是 $AF\cdot CD=2S_{\triangle ACD}, AG\cdot CE=2S_{\triangle ACE}$. 不难证明 $S_{\triangle ACD}=4S_{\triangle ACE}$. 因此, $AF\cdot CD=4AG\cdot CE$. 证 $AF=2AG$.

证法 10 分别作 $AF\perp CD, AG\perp CE, CH\perp AD$. 作出图