工业和信息化“十三五”规划教材

# 线性代数
## 习题全解与学习指导

濮燕敏 殷俊锋 ◎ 编

传承经典，演绎数学之美
配录微课，共享精品资源
紧扣大纲，符合考研需求

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化“十三五”规划教材

# 线性代数习题全解与学习指导

濮燕敏 殷俊锋 ◎ 编

人民邮电出版社
北京

**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数习题全解与学习指导 / 濮燕敏，殷俊锋编
. -- 北京 : 人民邮电出版社，2018.11
ISBN 978-7-115-48978-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①濮… ②殷… Ⅲ. ①线性代数－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第169659号

## 内 容 提 要

本书是与《线性代数》（ISBN：978-7-115-42275-0）配套的学习辅导书，是按照工科类本科“线性代数”课程的基本要求，充分吸收相关教材辅导书的精华，结合编者在同济大学多年的教学实践经验，针对当今学生的知识结构和习惯特点编写而成的．全书共 5 章，分别是线性方程组与矩阵、方阵的行列式、向量空间与线性方程组解的结构、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换．每章包含知识结构、归纳总结、典型例题、习题详解 4 个部分．

本书可作为非数学类专业的学生学习“线性代数”课程的参考书，也可作为硕士研究生入学考试的辅导书．典型例题和习题详解的内容还可供任课老师在习题课时选用．

◆ 编　　濮燕敏　殷俊锋
责任编辑　刘海溧
责任印制　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
固安县铭成印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：12.25　2018 年 11 月第 1 版
字数：246 千字　2018 年 11 月河北第 1 次印刷

定价：36.00 元

**读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316**
**反盗版热线：(010)81055315**
**广告经营许可证：京东工商广登字 20170147 号**

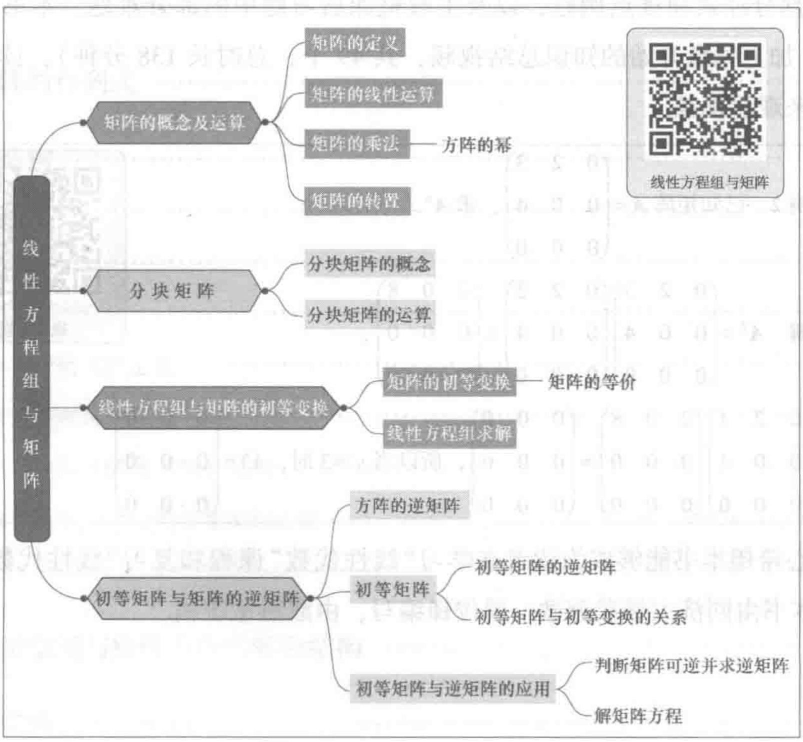
# 前　言

“线性代数”是理工科学生必修的一门重要的基础课程，它的基本概念、基本理论和基本运算具有较强的逻辑性、抽象性. 为了帮助读者理解基本概念，掌握基本解题方法，巩固、提高和拓宽所学知识，我们按照工科类本科“线性代数”课程的基本要求，结合在同济大学多年的教学经验编写了本书. 本书的章节内容和教材匹配，每一章所选的例题都是本章的经典综合性例题，是教材例题的补充和深化.

本书经编者精心设计，主要具有 3 个特点.

## 一、内容分为 4 个模块

1. 知识结构. 每章通过思维导图的方式来梳理知识结构，帮助学生构建宏观脉络，了解本章的主要内容.




2. 归纳总结. 每章都配有对知识点的“归纳总结”. 这一部分全面梳理了本章的重点概念和主要结论，帮助学生巩固所学知识.

3. 典型例题. 这一部分给出了大量的经典例题以及解题过程. 典型例题的题型与教材例题不同，属于每章的综合性例题，有些例题还给出了多种解法. 典型例题类型广、梯度大，是对教材例题的一个补充、加深和拓展. 通过学习这些例题，读者可以加深对所学知识的理解.

4. 习题详解. 每章的“习题详解”给出了配套主教材的全部习题答案，包括教材每一节后的习题以及每章测试题，可以帮助学生有效巩固课堂学习成果.

## 二、精选考研真题

每章的例题中，编者还精心挑选了部分研究生入学考试的真题，并在文中注明了真题的时间. 这部分真题不仅与每章内容匹配，而且能更全面、准确地体现教学大纲和考研大纲的要求. 多做考研真题并由此总结、归纳解题规律和方法，对启迪思维、提高能力、加深对线性代数基础知识的理解都是大有好处的.

## 三、配套微课视频

1. 每章的知识结构中都配有二维码视频，介绍了本章知识脉络，读者扫描二维码可以随时观看视频进行复习.

2. 针对部分经典和难点例题，以及主教材课后习题中的部分难题，本书还专门制作了讲解视频(加上每章开始的知识总结视频，共 49 个，总时长 138 分钟)，读者可以通过扫描二维码来观看视频.

**例 2** 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

微课视频

**解** $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，所以当 $n\geqslant 3$ 时，$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

我们衷心希望本书能够成为读者在学习“线性代数”课程和复习“线性代数”课程时的得力助手. 本书由同济大学濮燕敏、殷俊锋编写，由濮燕敏统稿.

编　者

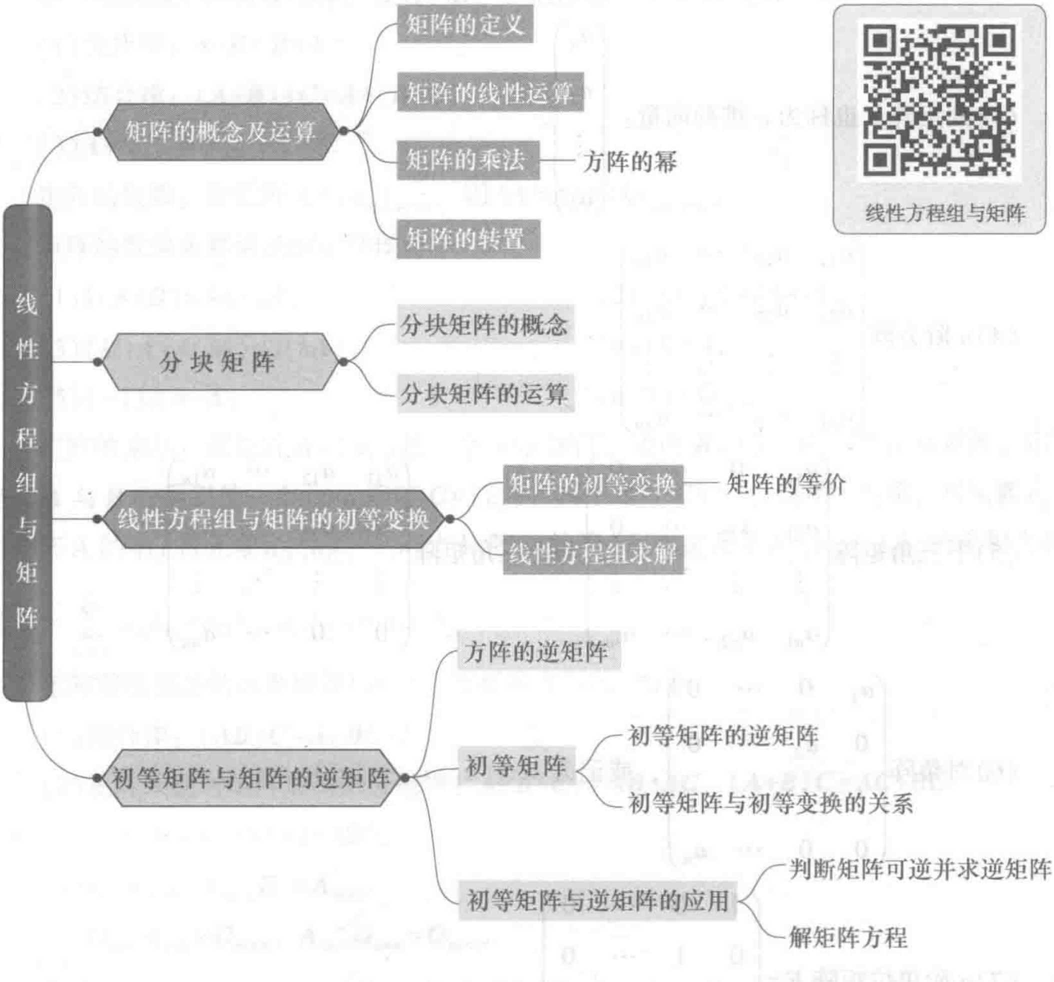
2018 年 7 月

# 目　录

# 第一章　线性方程组与矩阵

## 一、知识结构

线性方程组与矩阵




## 二、归纳总结

### 1. 矩阵的概念及运算

矩阵：$m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为$(a_{ij})$，有时为了强调矩阵的行数和列数，也记为$(a_{ij})_{m\times n}$. 数 $a_{ij}$位于矩阵$(a_{ij})$的第 $i$ 行第 $j$ 列，称为矩阵的$(i,\ j)$元素，其中 $i$ 称为元素 $a_{ij}$的行标，$j$ 称为元素 $a_{ij}$的列标.

特殊矩阵列举如下.

(1)1×1 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a)$，也记为 $\boldsymbol{A}=a$.

(2)行矩阵，也称为 $n$ 维行向量：$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(3)列矩阵，也称为 $n$ 维列向量：$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

(4)$n$ 阶方阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

(5)下三角矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$与上三角矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

(6)对角阵$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$，或记为 $diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(7)$n$ 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

同型矩阵：两个矩阵的行数相等、列数也相等，则称这两个矩阵为同型矩阵.

矩阵相等：如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 中所有对应位置的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，其中 $i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

负矩阵：对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为$-\boldsymbol{A}$.

矩阵的加(减)法：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

矩阵 $A$ 与 $B$ 的差为 $A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

矩阵加法满足的运算规律：设 $A$，$B$，$C$ 是任意三个 $m\times n$ 矩阵，则

(1)交换律：$A+B=B+A$.

(2)结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$.

(3)$A+O_{m\times n}=O_{m\times n}+A=A$.

矩阵的数乘：设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $kA=Ak=(ka_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的数乘运算满足的运算规律：

(1)$k(A+B)=kA+kB$；　(2)$(k+l)A=kA+lA$；

(3)$(kl)A=k(lA)=l(kA)$；　(4)$1A=A$；

(5)$(-1)A=-A$；　(6)$0A=O_{m\times n}$.

矩阵的乘法：设矩阵 $A=(a_{ij})$ 是一个 $m\times p$ 矩阵，矩阵 $B=(b_{ij})$ 是一个 $p\times n$ 矩阵，定义矩阵 $A$ 与 $B$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$，其中矩阵 $C=(c_{ij})$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素 $c_{ij}$ 是由矩阵 $A$ 的第 $i$ 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ip}$ 与矩阵 $B$ 的第 $j$ 列相应元素 $b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{pj}$ 的乘积之和，即 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$.

矩阵乘法满足的运算规律(假设运算都是可行的)如下.

(1)结合律：$(AB)C=A(BC)$.

(2)矩阵乘法对矩阵加法的分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$.

(3)$(kA)B=A(kB)=k(AB)$.

(4)$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$.

(5)$O_{m\times s}A_{s\times n}=O_{m\times n}$，$A_{m\times s}O_{s\times n}=O_{m\times n}$.

矩阵的转置：设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，转置矩阵 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

矩阵的转置满足的运算规律(这里 $k$ 为常数，$A$ 与 $B$ 为同型矩阵)：

(1)$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；　(2)$(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

(3)$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$；　(4)$(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$.

对称矩阵：$n$ 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 如果满足 $A^{\mathrm{T}}=A$，则称 $A$ 为对称矩阵. 对称矩阵的元素

满足 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j;\ i,\ j=1,2,\cdots,n)$.

反对称矩阵：$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵. 反对称矩阵的元素满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j;\ i,\ j=1,2,\cdots,n)$，且 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$.

**2. 分块矩阵**

分块矩阵：对于行数和列数较高的矩阵 $\boldsymbol{A}$，运算时常用一些横线和竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分划成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵.

分块矩阵的运算如下.

(1) 分块矩阵加(减)运算：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，对两个矩阵的行和列采用相同的分块方式，不妨设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1t}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{B}_{2t}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{B}_{s1}&\boldsymbol{B}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的行数相同、列数相同，则有

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\pm\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\pm\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\pm\boldsymbol{B}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}\pm\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\pm\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\pm\boldsymbol{B}_{2t}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}\pm\boldsymbol{B}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}\pm\boldsymbol{B}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\pm\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}.$$

(2) 分块矩阵的数乘运算：矩阵的分块方式没有特别规定，对任意的分块

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\ \text{都有}\ k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{A}_{11}&k\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&k\boldsymbol{A}_{1t}\\k\boldsymbol{A}_{21}&k\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&k\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k\boldsymbol{A}_{s1}&k\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&k\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}.$$

所以在矩阵的数乘运算中，对矩阵的分块可以根据矩阵本身的特点而定.

(3) 分块矩阵的乘法：设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵，要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列分块方式与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行分块方式保持一致，而对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行分块方式及矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列分块方式没有任何要求和限制. 不妨设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1k}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{t1}&\boldsymbol{A}_{t2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{tk}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1u}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{B}_{2u}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{B}_{k1}&\boldsymbol{B}_{k2}&\cdots&\boldsymbol{B}_{ku}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{ik}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{kj}$ 的行数，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1u}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \cdots & \boldsymbol{C}_{2u}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{t1} & \boldsymbol{C}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{tu}\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{t=1}^{k}\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

(4) 分块矩阵的转置：设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1k}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{t1} & \boldsymbol{A}_{t2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tk}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{t1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{t2}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1k}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2k}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{tk}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$.

(5) 分块对角阵：设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块，且这些非零子块都是方阵，而其余子块都是零矩阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_t\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,t)$ 都是方阵，这样的分块阵称为分块对角阵.

**3. 线性方程组与矩阵的初等变换**

矩阵的初等行变换：

(1) 交换矩阵的某两行，用 $r_i\leftrightarrow r_j$ 表示交换矩阵的第 $i$、$j$ 两行；

(2) 矩阵的某一行乘以非零数，用 $kr_i$ 表示矩阵的第 $i$ 行元素乘以非零数 $k$；

(3) 将矩阵的某一行的倍数加到另一行，用 $r_j+kr_i$ 表示将矩阵第 $i$ 行的 $k$ 倍加到第 $j$ 行.

矩阵的初等列变换：将矩阵初等行变换定义中的“行”换成“列”（记号由“$r$”换成“$c$”），就得到了矩阵初等列变换的定义.

矩阵的初等变换：矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换.

初等变换的逆变换：三种初等行(列)变换都是可逆的，初等行变换的逆变换分别为：变换 $r_i\leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是其本身；变换 $kr_i$ 的逆变换是 $\frac{1}{k}r_i$；变换 $r_j+kr_i$ 的逆变换是 $r_j+(-k)r_i$.

行阶梯形矩阵：形如$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$的矩阵，称为行阶梯形矩阵. 其特点是：可画一条阶梯线，线的下方全为零；每个台阶只有一行，台阶数就是非零行的行数；每一非零行的第一个非零元素位于上一行第一个非零元的右侧.

行最简形矩阵：形如$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$的阶梯形矩阵，称为行最简形矩阵. 其特点是：它的非零行的第一个非零元素全为1，并且这些非零元素所在的列的其余元素全为零.

矩阵的等价：若矩阵$\boldsymbol{A}$经过有限次初等行(列)变换化为矩阵$\boldsymbol{B}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$行(列)等价；若矩阵$\boldsymbol{A}$经过有限次初等变换化为矩阵$\boldsymbol{B}$，则称矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$等价. 用$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\boldsymbol{B}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$行等价，用$\boldsymbol{A}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$列等价，用$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$表示矩阵$\boldsymbol{A}$与矩阵$\boldsymbol{B}$等价.

**定理** (1)任意一个$m\times n$矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵；

(2)任意一个$m\times n$矩阵总可以经过若干次初等行变换化为行最简形矩阵；

(3)任意一个$m\times n$矩阵总可以经过若干次初等变换(行变换和列变换)化为它的标准形$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}_{m\times n}$，其中$r$为行阶梯形矩阵中非零行的行数.

用矩阵的初等行变换解线性方程组：

(1)写出$n$元非齐次线性方程组的增广矩阵$\widetilde{\boldsymbol{A}}$；

(2)对$\widetilde{\boldsymbol{A}}$实施初等行变换，化为行最简形矩阵$\widetilde{\boldsymbol{R}}$；

(3)写出以$\widetilde{\boldsymbol{R}}$为增广矩阵的线性方程组；

(4)以第一个非零元为系数的未知量作为固定未知量，留在等号的左边，其余的未知量作为自由未知量，移到等号的右边，并令自由未知量为任意常数，从而求得线性方程组的解.

**命题** (1)$n$元非齐次线性方程组有解的充分必要条件是第一个非零元不出现在$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的最后一列；

(2)$n$元非齐次线性方程组有唯一解的充分必要条件是第一个非零元不出现在$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的最后一列，且第一个非零元的个数等于未知量的个数；

(3)$n$元非齐次线性方程组有无穷多解的充分必要条件是第一个非零元不出现在$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的最后一列，且第一个非零元的个数小于未知量的个数.

**4. 初等矩阵与矩阵的逆矩阵**

逆矩阵的定义：设$\boldsymbol{A}$为$n$阶方阵，如果存在$n$阶方阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为$n$阶单位矩阵，则称矩阵$\boldsymbol{A}$是可逆的，矩阵$\boldsymbol{B}$称为$\boldsymbol{A}$的逆矩阵；否则称$\boldsymbol{A}$是不可逆的.

逆矩阵的性质：

(1)若 $A$ 可逆，则 $A^{-1}$也可逆，并且$(A^{-1})^{-1}=A$；

(2)若矩阵 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 都可逆，则它们的乘积 $A_1A_2\cdots A_s$ 也可逆，并且$(A_1A_2\cdots A_s)^{-1}=A_s^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$；

(3)若 $A$ 可逆，则 $A^{\mathrm{T}}$ 也可逆，并且$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(4)若 $A$ 可逆并且数 $k\neq 0$，则 $kA$ 也可逆，并且$(kA)^{-1}=k^{-1}A^{-1}$.

初等矩阵：对 $n$ 阶单位矩阵 $E$ 实施一次初等变换得到的矩阵称为 $n$ 阶初等矩阵.

(1)交换单位矩阵 $E$ 的第 $i$ 行和第 $j$ 行，或交换 $E$ 的第 $i$ 列和第 $j$ 列，得到初等矩阵 $E(i,j)$. 即

$$E(i,j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&0&&1&&\\&&&\ddots&&&\\&&1&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\第\,i\,行\\\\第\,j\,行\\\\\\\end{array}\end{array}.$$

(2)用非零的数 $k$ 乘以单位矩阵 $E$ 的第 $i$ 行或第 $i$ 列，得到初等矩阵 $E(i(k))$. 即

$$E(i(k))=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&k&&&\\&&&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\\\第\,i\,行\\\\\\\\\end{array}\end{array}.$$

(3)将单位矩阵 $E$ 的第 $i$ 行乘以 $k$ 加到第 $j$ 行(或将单位矩阵 $E$ 的第 $j$ 列乘以 $k$ 加到第 $i$ 列)，得到初等矩阵 $E(i(k),j)$，即

$$E(i(k),j)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&0&&\\&&&\ddots&&&\\&&k&&1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\\\第\,i\,行\\\\第\,j\,行\\\\\\\end{array}\end{array}.$$

**命题 1** 初等矩阵都是可逆的，并且初等矩阵的逆矩阵仍为同一类型的初等矩阵. 即

$$\boldsymbol{E}(i,\ j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,\ j),\ \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),\ \boldsymbol{E}(i(k),\ j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i(-k),\ j).$$

**命题 2** 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 $m$ 阶初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换，相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 $n$ 阶初等矩阵.

**定理 1** 下面命题互相等价：

(1) $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆；

(2) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 行等价于 $n$ 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$；

(3) 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可表示为一些初等方阵的乘积.

**定理 2** 对于任意 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，均存在一个 $m$ 阶可逆方阵 $\boldsymbol{P}$ 和一个 $n$ 可逆方阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}$ 为标准型.

## 三、典型例题

在矩阵乘法运算中，有三种特殊矩阵的方幂的求法是需要大家掌握的，我们以例题的方式给出具体的求解方法.

第一种，$n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 均为 $n\times 1$ 维列矩阵，求 $\boldsymbol{A}^n$.

由于矩阵乘法满足结合律，所以

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})^n=\underbrace{\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}}_{n个}=\boldsymbol{\alpha}\,\underbrace{(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha})}_{n-1个}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}\,(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},$$

而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个实数，由矩阵的数乘运算性质，有 $\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$.

**例 1** 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

**解** 由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}(1\quad -1\quad 1)=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，其中

微课视频

$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(1\quad -1\quad 1)$，而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1\quad -1\quad 1)\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=-2$，所以

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=(-2)^{n-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=(-2)^{n-1}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}(1\quad -1\quad 1)=(-2)^{n-1}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&2\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

类似于例 1 的矩阵是秩 $R(A)=1$ 的矩阵(矩阵的秩的概念见教材第三章第三节). 可以证明, 秩为 1 的矩阵一定可以写成一个列向量与一个行向量的乘积的形式, 具体的证明过程可以参见第三章典型例题的例 12.

第二种, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

求这种矩阵的方幂时, 可以先求 $\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3$, 然后找规律, 求出 $\boldsymbol{A}^n$.

**例 2**　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

微课视频

**解**　$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 所以当 $n\geqslant 3$ 时, $\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

**例 3**　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

**解**　令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$, 由例 2 可知, $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $n\geqslant 3$ 时,

$\boldsymbol{B}^n=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{BE}$, 所以有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\boldsymbol{E}^n+C_n^1\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{B}+C_n^2\boldsymbol{E}^{n-2}\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}+n\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2}\boldsymbol{B}^2\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2n&3n\\0&0&4n\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{8n(n-1)}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2n&4n^2-n\\0&1&4n\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

第三种，若 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$，其中矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是 $n$ 阶可逆阵，则 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.（当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相似. 矩阵相似的概念见教材第四章第三节.）

**例 4** 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

**解** $\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\1&4&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&2&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&2&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$，

所以矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且逆矩阵为 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

微课视频

于是由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$ 得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.$$

**例 5** （**考研真题** 1999 年数学三）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而 $n\geqslant 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}$ $=$________.

**解** 由于 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A}$，

$$\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}.$$

另解 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$，由于

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$.

**例 6** （**考研真题** 2008 年数学二第 7 题）【单选题】设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶非零矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则(　　).

微课视频

A. 矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆

B. 矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆

C. 矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆